دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

رنگ‌آمیزی نقره‌ای گراف پترسن تعمیم‌یافته

نازلی بشارتی*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۷/۰۱

چکیده

فرض‌کنید G=(V,E). زیرمجموعه I از رأس‌های گراف را یک مجموعه مستقل می‌نامند، هرگاه هیچ دو رأسی از I در G مجاور نباشند. هرمجموعه مستقل ماکزیمم ازگراف را یک قطر گراف می‌نامند. فرض‌کنیدc یک (r+۱)-رنگ‌آمیزی معتبر برای گراف r-منتظم G باشد. رأس v نسبت به رنگ‌آمیزی c رنگین‌کمان است، هرگاه همه‌ی رنگ‌ها در همسایگی بسته v، N[v]=N(v)∪{v}، ظاهر شوند. فرض‌کنید I یک قطر، برای گراف r -منتظم G باشد. یک (r+۱)-رنگ‌آمیزی معتبر c را رنگ‌آمیزی نقره‌ای نسبت به I می‌نامند، هرگاه هر رأس $v\in I$ رنگین‌کمان باشد. گراف G را نقره‌ای می‌نامند، اگر دارای یک رنگ‌آمیزی نقره‌ای نسبت به I باشد. در مقاله [۱]، این مسأله مطرح گردیده است: "خانواده گراف‌های r-منتظم G را تعیین کنید که نقره‌ای باشند." برای پاسخ دادن به این سؤال در این مقاله، گراف‌های پترسن تعمیم‌یافته را در نظر گرفته‌ایم و نشان می‌دهیم گراف پترسن تعمیم‌یافته $P(n,k)$ به ازای $n\equiv 0\ (\mathrm{mod} 4)$ و k یک عدد فرد، یک گراف کاملاً نقره‌ای است. همچنین، نشان می‌دهیم برای هرعدد طبیعی n، یک رنگ آمیزی نقره‌ای برای گراف‌های پترسن تعمیم یافته $P(n,1)$، $P(n,2)$ به ازای $n>5$ و $P(n,3)$ به ازای $n\neq 10,14,26$، نسبت به یک مجموعه مستقل ماکزیمم آن وجود دارد. همچنین، به ازای هر $k>2$، گراف $P(2\mathrm{k}+1,\mathrm{k})$، به ازای هر $k>3$، گراف $P(3\mathrm{k}+1,\mathrm{k})$ و به ازای هر $k>3$، $k\neq 5,9$، گراف $P(3\mathrm{k}-1,\mathrm{k})$ نقره‌ای هستند.

واژه‌های کلیدی: عدد رنگی، مجموعه‌ی تعیین‌کننده، رنگ‌آمیزی نقره‌ای، گراف پترسن تعمیم‌یافته، مجموعه مستقل.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:nbesharati@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

برای اعداد طبیعی nو k ($n > ۲k$) گراف پترسن تعمیم یافته $P(n,k)$، گرافی با مجموعه رئوس $\{u_i, v_i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ و مجموعه‌یال‌های $\{u_iv_i, u_iu_{i+1}, v_iv_{i+k} \mid i = 1,2,\dots,n\}$ است که اندیس‌ها به پیمانه n هستند. یال $\{u_iv_i\}$ را پره و زیرگراف القاء شده روی u-رأس‌ها را دور بیرونی و زیرگراف القاء شده روی v-رأس‌ها را زیرگراف درونی می‌نامیم.

اگر $\gcd(n,k) = 1$، در این‌صورت زیرگراف درونی به‌صورت یک دور n رأسی است که آن را دور درونی می‌نامیم و اگر $\gcd(n,k) = d \neq 1$، در این صورت زیر گراف درونی به‌صورت اجتماع d تا دور به طول $\frac{n}{d}$ است. کاکستر در سال ۱۹۵۰ این خانواده از گراف‌ها را معرفی نمود و واتکینز در سال ۱۹۶۹ آن‌ها را **گراف‌های پترسن تعمیم‌یافته** نامید[۲]. از سال ۱۹۶۹ تاکنون این خانواده از گراف‌ها بسیار مورد توجه قرارگرفته‌اند و بسیاری از خصوصیات این گراف‌ها مورد بررسی رارگرفته است. به‌عنوان‌مثال می‌توان به مقالات [۳]، [۴]، [۵] و [۶] در این زمینه اشاره کرد.

توجه داشته باشید که گراف $P(n,k)$ یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر n زوج و k فرد باشد. در [۷] ثابت شده‌است که گراف $P(n,k)\cong P(n,k)$ اگر و تنها اگر $kl\equiv \pm 1 \pmod n$.

فرض‌کنید $G = (V,E)$. زیرمجموعه I از رأس‌های گراف را یک **مجموعه مستقل** می‌نامند، هرگاه هیچ دو رأسی از I در G مجاور نباشند. تعداد رأس‌های بزرگ‌ترین مجموعه مستقل G را عدد استقلال می‌نامند. هم‌چنین هر مجموعه مستقل ماکزیمم از گراف را یک **قطر** گراف نامند. زیرمجموعه Q از رئوس گراف G را یک پوشش رأسی نامند، هرگاه هریال گراف دارای حداقل یک رأس در Q باشد. تعداد رأس‌های کوچک‌ترین مجموعه پوشش رأسی را عدد پوشش رأسی می‌نامند و با نماد $\beta(G)$ نمایش می‌دهند. در مقالات [۳] و[۴] عدد پوشش رأسی گراف پترسن تعمیم‌یافته مورد بررسی قرارگرفته است. در هر گراف ساده G، $(G) +$ $\beta(G) = |V(G)|$ [۸]، نتایج به‌دست‌آمده در مورد $\beta(P(n,k))$ را می‌توان برحسب $\alpha(P(n,k))$ نوشت. در مقاله [۵] کران بالا و پایین و به ازای برخی از مقادیر n وk مقدار دقیق $\alpha(P(n,k))$ را به دست آورده‌ایم. زیرمجموعه D از رئوس گراف $G = (V,E)$ را یک مجموعه **احاطه‌گر** می‌نامند، هرگاه هر رأس $V\backslash D$ با حداقل یک رأس از D مجاور باشد. اندازه کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر را عدد احاطه‌گری می‌نامند و با نماد $\gamma(G)$ نمایش می‌دهند. مجموعه D را یک مجموعه **احاطه‌گرمؤثر** می‌نامند، هرگاه هر رأس $V\backslash D$ با دقیقاً یک رأس از D مجاور باشد. طبق این تعریف، واضح است که هر مجموعه احاطه‌گر مؤثر یک مجموعه مستقل ماکزیمال است.

قضیه ۱: ([۵]) گراف $P(n,k)$ دارای یک مجموعه احاطه‌گر مؤثر است اگر و فقط اگر $n \equiv 0 \ (mod4)$ و k یک عدد فرد باشد.

فرض‌کنید $G = (V,E)$ یک گراف ساده باشد. یک k-رنگ‌آمیزی معتبر از گراف G نگاشتی مانند $c:V(G)\rightarrow\{1,2,\dots,k\}$ است، به‌طوری‌که برای هر یال uv در E، $c(u)\neq c(v)$. فرض‌کنید c یک (r+1)-رنگ‌آمیزی معتبر از یک گراف r-منتظم G باشد. رأس v را نسبت به رنگ‌آمیزی c **رنگین‌کمان** نامند، هرگاه همه‌ی رنگ‌ها در همسایگی بسته v، $N[v]=N(v)\cup\{v\}$ ظاهر شوند. فرض‌کنید I یک مجموعه مستقل ماکسیمم، **قطر**، برای گراف r-منتظم G باشد. یک (r+1) رنگ‌آمیزی معتبر c را **رنگ‌آمیزی نقره‌ای** نسبت به I می‌نامند، هرگاه هر رأس $v \in I$ رنگین‌کمان باشد. گراف G را **نقره‌ای** می‌نامند، اگر دارای یک رنگ‌آمیزی نقره‌ای نسبت به I باشد. اگر همه رئوس G رنگین‌کمان باشند، در این‌صورت c را رنگ‌آمیزی **کاملاً نقره‌ای** و گراف G را کاملاً نقره‌ای می‌نامند. توجه داشته باشید که نقره‌ای بودن یک گراف کاملاً وابسته به انتخاب مجموعه مستقل ماکسیمم است. به‌عبارت‌دیگر ممکن است گراف نسبت به مجموعه مستقل ماکسیمم I نقره‌ای ولی نسبت به مجموعه مستقل ماکسیمم I' نقره‌ای نباشد. به‌عنوان‌مثال در شکل۱، اگر مجموعه مستقل ماکسیمم رئوس داخل کادر

در نظر گرفته شود، گراف سمت چپ دارای رنگ‌آمیزی نقره‌ای نسبت به I است، ولی گراف سمت راست نسبت به I' نقره‌ای نیست.

برای اطلاعات بیشتر در مورد رنگ‌آمیزی نقره‌ای می‌توانید به مراجع [۱]،[۹] و [۱۰] مراجعه کنید. به‌عنوان‌مثال در [۹] ارتباط بین رنگ‌آمیزی نقره‌ای، نظریه کد و هندسه متناهی بیان شده است.

فرض کنیدگراف G=(V,E). $S \subseteq V(G)$ و c یک k-رنگ‌آمیزی از رأس‌های S باشد. اگر c را بتوان به‌طور منحصربه‌فرد به یک k-رنگ‌آمیزی از G گسترش دهیم، در این‌صورت S را یک **مجموعه تعیین‌کننده** برای G می‌نامند. اندازه کوچک‌ترین مجموعه‌ی تعیین‌کننده را عدد تعیین‌کننده‌ی G می‌نامند و با نماد $d(G,k)$ نشان می‌دهند. مفهوم مجموعه‌ی تعیین‌کننده در طرح‌های بلوکی و مربع‌های لاتین نیز تعریف‌شده و مورد بررسی قرار گرفته است. برای اطلاعات بیش‌تر در زمینه مجموعه‌ی تعیین‌کننده در ترکیبیات می‌توانید به مرجع [۱۱] مراجعه کنید.

گراف‌های نقره‌ای ارتباط بسیار نزدیکی با مجموعه‌ی تعیین‌کننده‌ی رنگی دارند. در گزاره ۲، ارتباط بین رنگ‌آمیزی نقره‌ای و مجموعه‌ی تعیین‌کننده‌ی رنگی را بیان می‌کنیم.

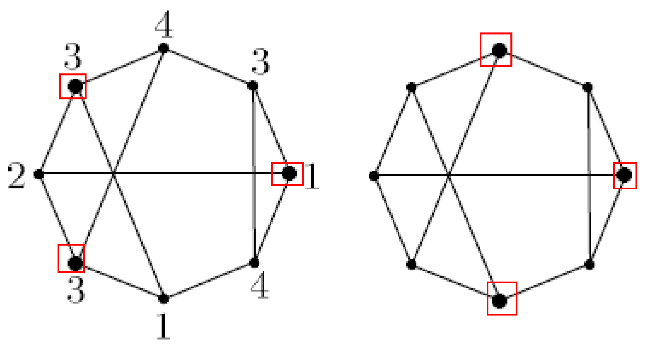
گزاره ۲: گراف r-منتظم G نقره‌ای است اگر و فقط اگر $d(G,r+1) = |V(G)| - \alpha(G)$.

اثبات: فرض‌کنیم c یک رنگ‌آمیزی نقره‌ای G نسبت به قطر I باشد. پس c یک $(r+1)$-رنگ‌آمیزی معتبر برای G است، به‌طوری‌که r رنگ متفاوت در همسایگی باز هر رأس از I ظاهرشده است. بنابراین $S = V(G) \setminus I$ یک مجموعه‌ی تعیین‌کننده برای G است و $d(G,r+1) \leq |V(G)| - \alpha(G)$. از طرف دیگر اگر S یک مجموعه‌ی تعیین‌کننده‌ی $(r+1)$-رنگ‌آمیزی برای گراف r-منتظم G باشد، در این‌صورت $V(G) \setminus S$ یک مجموعه مستقل است و $d(G,r+1) \geq |V(G)| - \alpha(G)$. پس $d(G,r+1) = |V(G)| - \alpha(G)$. برعکس فرض‌کنیم $d(G,r+1) = |V(G)| - \alpha(G)$ S یک کوچک‌ترین مجموعه‌ی تعیین‌کننده‌ی $(r+1)$ رنگ‌آمیزی برای G باشد، پس $|S| = d(G,r+1)$. بنابراین $I = \mathrm{V(G)} \setminus \mathrm{S}$ یک مجموعه مستقل و $|I| = |V(G)| - |S| = \alpha(G)$، یعنی I یک مجموعه مستقل ماکسیمم برای گراف G است. چون S یک مجموعه‌ی تعیین‌کننده و I یک مجموعه مستقل ماکسیمم است، باید r رنگ متفاوت در همسایگی باز هر رأس I ظاهر شود. بنابراین رئوس I رنگین‌کمان هستند و G نقره‌ای است. ■

در مقاله [۱]، مسأله زیر مطرح گردیده است:

مسأله: "خانواده گراف‌های r- منتظم G را تعیین کنید که برای آن‌ها $d(G,r+1) = |V(G)| - \alpha(G)$ است".

بنا به گزاره ۲، این سؤال معادل است با: "خانواده گراف‌ها r-منتظم G را تعیین کنید که نقره‌ای باشند".



شکل ۱- گراف G نسبت به I در سمت چپ نقره‌ای است.

برای پاسخ دادن به این سؤال در این مقاله گراف‌های پترسن تعمیم‌یافته را در نظر گرفتیم. نشان می‌دهیم گراف $P(n,k)$، به ازای $n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}4)$ و k یک عدد فرد، یک گراف کاملاً نقره‌ای است. بنا به تعریف رنگ‌آمیزی نقره‌ای فقط می‌توانیم گراف‌هایی را مورد بررسی قرار دهیم که عدد استقلال آن‌ها مشخص باشد. لذا گراف $P(n,k)$ به ازای $k = 1,2,3$ را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم گراف پترسن تعمیم‌یافته $(n,1)$، $P(n,2)$ و $P(n,3)$ به جز $P(5,2)$، $P(10,3)$، $P(14,3)$ و$P(26,3)$ نقره‌ای هستند. هم‌چنین، بنا به یکریختی گراف‌ها، به ازای $k > 2$، گراف $P(2k+1,k)$ و به ازای $k > 3$، گراف $P(3k+1,k)$ و به ازای $k > 3$،$k \neq 5,9$، گراف $P(3k-1,k)$ نقره‌ای هستند.

۲- رنگ‌آمیزی نقره‌ای گراف پترسن تعمیم‌یافته

همان‌طور که گفتیم رنگ‌آمیزی نقره‌ای وابسته به انتخاب مجموعه مستقل ماکزیمم، قطر، گراف است. بنابراین برای رنگ‌آمیزی نقره‌ای ابتدا باید یک قطر از گراف را انتخاب کنیم. از نگاشت $c: V\backslash I \to \{1,2,3,4\}$ برای رنگ‌آمیزی استفاده می‌کنیم.

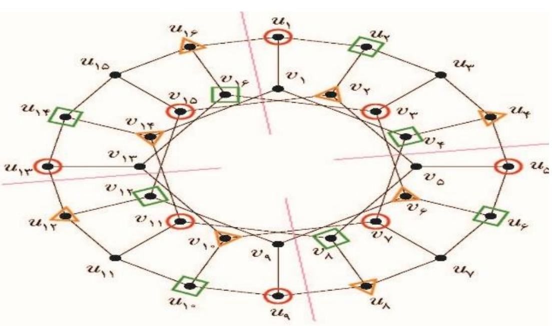
قضیه ۳: اگر $n \equiv 0 (mod4)$ و k یک عدد فرد باشد، آن‌گاه گراف $P(n,k)$ یک گراف کاملاً نقره‌ای است.

اثبات: چون n زوج و k فرد است، گراف $P(n,k)$ دوبخشی و $\alpha(P(n,k)) = n$. هم‌چنین بنا به قضیه ۱، گراف دارای مجموعه احاطه‌گر مؤثر است. نشان می‌دهیم که می‌توانیم مجموعه رئوس گراف را به چهار مجموعه احاطه‌گر مؤثر افراز کنیم. گراف $P(n,k)$ به قطاع‌های ۴-تایی افراز می‌کنیم و مجموعه D_iها، $i = 1,2,3,4$، را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$D_1 = \{u_{4l-3}, v_{4l-1} | 1 \leq l \leq \frac{n}{4}\}$$
$$D_2 = \{u_{4l-2}, v_{4l} | 1 \leq l \leq \frac{n}{4}\}$$
$$D_3 = \{u_{4l-1}, v_{4l+1} | 1 \leq l \leq \frac{n}{4}\}$$
$$D_4 = \{u_{4l}, v_{4l+2} | 1 \leq l \leq \frac{n}{4}\}$$

به‌وضوح دیده می‌شود که مجموعه‌های D_iها یک افراز برای رئوس گراف است و $|D_i| = \frac{n}{2}$. هم‌چنین $i = 1,2,3,4$، D_i یک مجموعه مستقل ماکزیمال است. از آنجائی‌که گراف $P(n,k)$، ۳-منتظم و اختلاف اندیس رئوس مجموعه‌های D_i، $i = 1,2,3,4$ چهار و k یک عدد فرد است، به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که مجموعه D_i، $i = 1,2,3,4$ یک مجموعه احاطه‌گرمؤثر است. حال کافی است به هرکدام از این مجموعه‌های D_i، $i = 1,2,3,4$ یک رنگ متفاوت نسبت دهیم، در این صورت هر رأس گراف با سه رأس از رنگ‌های متفاوت مجاور است. بنابراین تمامی رئوس گراف رنگین‌کمان خواهند بود و گراف کاملاً نقره‌ای است. ■

در شکل ۲، چهار مجموعه احاطه‌گر موثر گراف $P(16,3)$ نشان داده شده است. رئوس مجموعه D_1 را با دایره، رئوس مجموعه D_2 با مربع و .... مشخص شده‌اند.



شکل ۲- رئوس چهارمجموعه احاطه‌گرموثر در گراف P(16,3)، مشخص شده‌اند.

۱-۲- رنگ‌آمیزی نقره‌ای گراف $P(n,1)$

در این بخش، نشان می‌دهیم که گراف $P(n,1)$ به ازای هر $n > 2$، یک گراف نقره‌ای است. می‌دانیم

$$\alpha(P(n,1)) = \begin{cases} n & \text{زوج } n \\ n-1 & \text{فرد } n \end{cases}$$

[۳]. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که در این گراف مجموعه‌های مستقل ماکزیمم تحت دوران رئوس یکریخت هستند. بنابراین بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم:

$$\boldsymbol{I = \{u_{2l+1} | 0 \le l < \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor\} \cup \{v_{2l} | 1 \le l \le \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor\}}$$

یک مجموعه مستقل ماکزیمم باشد. حال نگاشت c را طوری تعریف می‌کنیم که گراف نسبت به I نقره‌ای باشد. گراف $P(n,1)$ به $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ قطاع ۴-تایی افراز می‌کنیم. می‌توانیم قطاع‌بندی را از رأس‌های u_1, v_1 در جهت عقربه‌های ساعت شروع کنیم. رأس‌های داخل هر قطاع ۴-تایی lام، $1 \le l \le \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$، را به‌صورت زیر رنگ می‌کنیم.

$$c(u_{4l-2}) = 1 \qquad c(u_{4l}) = 2$$
$$c(v_{4l-3}) = 3 \qquad c(v_{4l-1}) = 4$$

اگر $n \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$، در این حالت قطاع ۳ تایی آخر، شامل رئوس $u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n$ است، که در آن $u_{n-2}, v_{n-1} \in I$. فرض می‌کنیم $c(u_{n-1}) = 1, c(v_n) = 4$. پس از اعمال این رنگ‌آمیزی بر روی رئوس، رنگ رأس‌های u_n, v_{n-2} هنوز مشخص نشده‌اند، ولی بنا به معتبر بودن رنگ‌آمیزی و تعریف رنگ‌آمیزی نقره‌ای مشخص خواهند شد. بنابراین با رنگ آمیزی ارائه‌شده، رنگ رأس‌های I به‌طور منحصربه‌فرد تعیین خواهند شد. بنابراین گراف، یک گراف نقره‌ای نسبت به قطر I است و $d(P(n,1),4) = 2n - \alpha(P(n,1))$. در حالت $n \equiv 0\ (\mathrm{mod} 4)$ به راحتی می‌توان بررسی کرد که همه رئوس گراف رنگین‌کمان هستند، بنابراین در این حالت، $P(n,1)$ یک گراف کاملاً نقره‌ای است.

۲-۲- رنگ‌آمیزی نقره‌ای $P(n,2)$

در این بخش، نشان می‌دهیم که گراف پترسن تعمیم‌یافته $P(5,2)$ نقره‌ای نیست، ولی به ازای هر $n > 5$ گراف $P(n,2)$ یک گراف نقره‌ای است. می‌دانیم برای هر $n > 4$، $\alpha(P(n,2)) = \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil$ [۴].

فرض‌کنیم G یک گراف دلخواه r-منتظم و I یک قطر برای G باشد. اگر هر دو رأس G که همسایه مشترک در I دارند را به‌هم وصل کنیم، گراف جدیدی به‌دست می‌آید که این گراف را H می‌نامیم.

گزاره ۴: فرض‌کنیم I یک قطر از گراف r-منتظم G باشد. در این صورت گراف G دارای یک رنگ‌آمیزی نقره‌ای نسبت به I است اگر و فقط اگر گراف H، $(\mathrm{r}+1)$-رنگ‌پذیر باشد.

برهان: فرض‌کنیم G دارای یک رنگ آمیزی نقره‌ای نسبت به قطر I است. بنابراین طبق تعریف رنگ‌آمیزی نقره‌ای همه‌ی رئوس I رنگین‌کمان هستند. از آنجائی‌که I یک مجموعه مستقل ماکزیمم است، طبق تعریف گراف H همسایه‌های هر رأس $x \in I$، در گراف H یک r-خوشه می‌سازند. بنابراین گراف H، $(\mathrm{r}+1)$-رنگ‌پذیر است. برعکس، فرض‌کنیم گراف H $(\mathrm{r}+1)$-رنگ‌پذیر باشد.

برای هر رأس $x \in I$ رئوس همسایه x یک گراف r-خوشه در H می‌سازند، بنابراین رنگ همه رأس‌های همسایه x متفاوت است، لذا هر رأس $x \in I$ رنگین‌کمان است و گراف G نسبت به I نقره‌ای است. ■

توجه داریم که چون I یک مجموعه مستقل ماکزیمم است همسایه‌های هر رأس $x \in I$ درگراف H یک r-خوشه می‌سازند و $\chi(H) = r+1$ اگر و تنها $\chi(H-I) \le r+1$. گراف $H-I$ را **گراف کاهش نقره‌ای** G نسبت به I می‌نامیم و با نماد $SR(G,I)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۵: گراف پترسن، $\mathrm{P}(5,2)$، نقره‌ای نیست.

برهان: $\alpha(P(5,2)) = 4$، به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که در این گراف مجموعه‌های مستقل ماکزیمم

تحت دوران رئوس یکریخت هستند. بنابراین بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $I = \{u_1, u_3, v_4, v_5\}$ یک قطر گراف باشد. گراف H را می‌سازیم. گراف کاهش نقره‌ای آن، $H - I = SR(P(5,2), I) \cong K_6$.
پس $\chi(SR(P(5,2), I)) = 6$ و بنا به گزاره۴، $P(5,2)$ نقره‌ای نیست. ■

حال نشان می‌دهیم به ازای هر $n > 5$، $P(n,2)$ یک گراف نقره‌ای است. برای این منظور باید یک قطر از گراف مانند I را انتخاب کرده و نگاشت c را طوری تعریف‌کنیم که رأس‌های I رنگین‌کمان باشند. پنج حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$\boldsymbol{n \equiv 0 (\mathrm{mod} 5)}$

گراف $P(n,2)$ را به قطاع‌های ۵-تایی افراز می‌کنیم. می‌توانیم قطاع‌بندی را از رأس‌های u_1, v_1 درجهت عقربه‌های ساعت شروع کنیم. فرض‌کنیم

$$\boldsymbol{I = \{u_{5l-3}, u_{5l-1}, v_{5l-4}, v_{5l} | 1 \le l \le \tfrac{n}{5}\}}$$

یک قطرگراف باشد. رأس‌های قطاع ۵-تایی lام، $1 \le l < \frac{n}{5}$، را به‌صورت زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم.

- $\boldsymbol{l \equiv 0 (\mathrm{mod} 4)}$
$$c(u_{5l-4}) = c(u_{5l}) = 2, c(u_{5l-2}) = 1$$
$$c(v_{5l-2}) = c(v_{5l-3}) = 3, c(v_{5l-1}) = 4$$

- $\boldsymbol{l \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)}$
$$c(u_{5l-4}) = c(u_{5l}) = 1, c(u_{5l-2}) = 2$$
$$c(v_{5l-2}) = c(v_{5l-1}) = 3, c(v_{5l-3}) = 4$$

- $\boldsymbol{l \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)}$
$$c(u_{5l-4}) = c(u_{5l}) = 2, c(u_{5l-2}) = 1$$
$$c(v_{5l-2}) = c(v_{5l-3}) = 4, c(v_{5l-1}) = 3$$

- $\boldsymbol{l \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)}$
$$c(u_{5l-4}) = c(u_{5l}) = 1, c(u_{5l-2}) = 2$$
$$c(v_{5l-2}) = c(v_{5l-1}) = 4, c(v_{5l-3}) = 3$$

- $\boldsymbol{l = \frac{n}{5}}$

در قطاع ۵-تایی آخر، چون رئوس $u_{n-3}, u_{n-1}, v_{n-4}, v_n \in I$. کافی است فرض کنیم $c(u_{n-2}) = 2$.

$\boldsymbol{n \equiv 1 (\mathrm{mod} 5)}$

گراف $\mathrm{P}(6,2)$ را به راحتی می‌توانیم به‌صورت نقره‌ای رنگ‌آمیزی کنیم. برای $\mathrm{n} > 6$، گراف $P(n,2)$ را به $(\lfloor\frac{n}{5}\rfloor - 1)$ قطاع ۵-تایی و یک قطاع ۶-تایی افراز می‌کنیم. فرض‌کنیم

$$\boldsymbol{I = \{u_{5l-3}, u_{5l-1}, v_{5l-4}, v_{5l} | 1 \le l \le \left\lfloor\tfrac{n}{5}\right\rfloor\} \cup \{u_{n-4}, u_{n-1}, v_{n-5}, v_n\}}$$

یک قطرگراف باشد. رأس‌های قطاع ۵-تاییlام، $1 \le l < \frac{n}{5}$ را به‌صورت زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} c(u_{5l-4}) &= 1 + (l-1) \pmod 4 \\ c(u_{5l-2}) &= 3 + (l-1) \pmod 4 \\ c(u_{5l}) &= 1 + (l-1) \pmod 4 \\ c(v_{5l-3}) &= 2 + (l-1) \pmod 4 \\ c(v_{5l-2}) &= 2 + (l-1) \pmod 4 \\ c(v_{5l-1}) &= 4 + (l-1) \pmod 4 \end{aligned} \tag{۱}$$

در قطاع ۶-تایی، رأس‌های $u_{n-4}, u_{n-1}, v_{n-5}, v_n$ متعلق به قطر I هستند. کافی است در این قطاع، رنگ سه رأس را مشخص کنیم.

$$c(u_n) = 4, c(u_{n-2}) = 2, c(u_{n-3}) = 3$$

$\boldsymbol{n \equiv 2 (\mathrm{mod} 5)}$

فرض‌کنیم $n = 5q + 2$. در این حالت گراف $P(n,2)$ را به $(\lfloor\frac{n}{5}\rfloor - 1)$ قطاع ۵-تایی و یک قطاع ۷-تایی افراز می‌کنیم. فرض‌کنیم

$$\boldsymbol{I = \left\{u_{5l-3}, u_{5l-1}, v_{5l-4}, v_{5l} \middle| 1 \le l < \left\lfloor\tfrac{n}{5}\right\rfloor\right\} \cup \{u_{n-5}, u_{n-3}, u_{n-1}, v_{n-6}, v_n\}}$$

یک قطر گراف باشد. رأس‌های قطاع ۵-تاییlام، $1 \le l < \lfloor\frac{n}{5}\rfloor$ را با نگاشت رنگیc طبق رابطه (۱) رنگ‌آمیزی می‌کنیم. در قطاع ۷-تایی آخر، کافی است رنگ پنج رأس $u_{n-6}, v_{n-5}, v_{n-4}, v_{n-3}, v_{n-2}$ را مشخص کنیم. برای این‌که رنگ‌آمیزی نقره‌ای باشد، فرض می‌کنیم $c(v_{n-3}) = 4,\ c(v_{n-2}) = 1$.
رنگ مابقی رئوس وابسته به مقدار q است.

- $q \equiv 0,\ q \equiv 1(\mathrm{mod}4)$

$c(u_{n-6}) = 1, c(v_{n-4}) = 4, c(v_{n-5}) = 2$

- $q \equiv 2(\mathrm{mod}4)$

$c(u_{n-6}) = 2, c(v_{n-4}) = 3, c(v_{n-5}) = 3$

- $q \equiv 3(\mathrm{mod}4)$

$c(u_{n-6}) = 4, c(v_{n-4}) = 2, c(v_{n-5}) = 1$

$n \equiv 3(\mathrm{mod}5)$

فرض‌کنیم $n = 5q + 3$ و I یک قطر گراف باشد.

$$\boldsymbol{I = \{u_{5l-3}, u_{5l-1}, v_{5l-4}, v_{5l} | 1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{5}\rfloor\} \cup \{u_{n-1}, v_n\}}$$

برای این‌که رنگ‌آمیزی نقره‌ای باشد، دو حالت زیر را برحسب مقدار q در نظر می‌گیریم.

- $q \equiv 2(\mathrm{mod}4)$

در این حالت گراف $P(n,2)$ را به $\lfloor\frac{n}{5}\rfloor$ قطاع ۵-تایی و یک قطاع۳-تایی افراز می‌کنیم. رأس‌های قطاع ۵-تایی، lام، $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{5}\rfloor$، را با نگاشت c که طبق رابطه (۱) تعریف شد، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. در قطاع ۳-تایی آخر، رأس‌های $u_{n-1}, v_n \in I$. فرض کنیم $c(u_{n-2}) = 1,\ c(v_{n-2}) = 4$.

- $q \not\equiv 2(\mathrm{mod}4)$

در این حالت گراف $P(n,2)$ را به $(\lfloor\frac{n}{5}\rfloor - 1)$ قطاع ۵-تایی و یک قطاع ۸-تایی افراز می‌کنیم. رأس‌های قطاع ۵-تاییlام، $1 \leq l < \lfloor\frac{n}{5}\rfloor$، را با نگاشت c که طبق رابطه (۱) تعریف شد، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. در قطاع ۸-تایی آخر، رأس‌های v_n, v_{n-3}, v_{n-7} و $u_{n-1}, u_{n-4}, u_{n-6}$ متعلق به قطر I هستند. کافی است در این قطاع، رنگ چهار رأس را مشخص کنیم. فرض‌کنیم

$c(u_{n-3}) = 1, c(u_{n-5}) = 2$
$c(v_{n-1}) = c(v_{n-2}) = 3$

$n \equiv 4(mod5)$

فرض‌کنیم $n = 5q + 4$. در این حالت گراف $P(n,2)$ را به $\lfloor\frac{n}{5}\rfloor$ قطاع ۵-تایی و یک قطاع ۴-تایی افراز می‌کنیم. فرض کنیم

$$\boldsymbol{I = \left\{u_{5l-3}, u_{5l-1}, v_{5l-4}, v_{5l} \middle| 1 \leq l \leq \left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor\right\} \cup \{u_{n-2}, v_{n-3}, v_n\}}$$

یک قطر گراف باشد. رأس‌های قطاع ۵-تاییlام، $1 \leq l \leq \left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor$، با نگاشت c طبق رابطه (۱)، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. در قطاع ۴-تایی آخر رأس‌های $u_{n-2}, v_{n-3}, v_n \in I$. برای رنگ‌آمیزی نقره‌ای رئوس قطاع آخر کافی است فرض می‌کنیم $c(u_{n-1}) = 1$.

در تمامی حالت‌های فوق، پس از اعمال رنگ‌آمیزی ارائه‌شده بر روی رئوس، هنوز رنگ برخی از رأس‌های $V \backslash I$ مشخص نیستند، ولی بنا به معتبر بودن رنگ‌آمیزی و تعریف رنگ‌آمیزی نقره‌ای مشخص خواهند شد. با رنگ‌آمیزی ارائه‌شده، در تمامی حالت‌های فوق، رنگ رأس‌های I به‌طور منحصربه‌فرد تعیین خواهند شد، بنابراین رئوس I رنگین‌کمان هستند و برای هر $n > 5$ $P(n,2)$ یک گراف نقره‌ای نسبت به قطر انتخاب شده I است، به‌عبارت‌دیگر برای هر $n > 5$

$$d(P(n,2),4) = 2n - \lfloor\frac{4n}{5}\rfloor.$$

۳-۲- رنگ‌آمیزی نقره‌ای $P(n,3)$

در این بخش، نشان می‌دهیم که گراف $P(n,3)$ به ازای هر $n \neq 10,14,26$ یک گراف نقره‌ای است. می‌دانیم [۵]، برای هر $n > 6$،

$$\alpha(P(n,3)) = \begin{cases} n & \text{زوج باشد } n \\ n-2 & \text{فرد باشد } n \end{cases}$$

اگر n زوج باشد، گراف دوبخشی است و فقط به دو طریق می‌توان قطر گراف را انتخاب کرد. بدون اینکه خللی به کلیت وارد شود، فرض می‌کنیم

$$\boldsymbol{I = \left\{u_{2l-1} \middle| 1 \leq l \leq \frac{n}{2}\right\} \cup \left\{v_{2l} \middle| 1 \leq l \leq \frac{n}{2}\right\}}$$

یک قطر گراف باشد. اگر n فرد باشد، آن‌گاه
$$\boldsymbol{I} = \{\boldsymbol{u_{2i-1}}|\boldsymbol{1} \le \boldsymbol{i} \le \lfloor\tfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}\rfloor\} \cup \{\boldsymbol{v_{2i}}|\boldsymbol{1} \le \boldsymbol{i} < \lfloor\tfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}\rfloor\}$$

را به‌عنوان قطر گراف انتخاب می‌کنیم.
برای رنگ‌آمیزی گراف $P(n,3)$ چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$\boldsymbol{n \equiv 0 \pmod 4}$

در این حالت طبق قضیه ۳، گراف $P(n,3)$ کاملاً نقره‌ای است.

$\boldsymbol{n \equiv 1 \pmod 4}$

فرض می‌کنیم
$$\mathbf{I} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_3}, \dots, \boldsymbol{u_{n-2}}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_4}, \dots, \boldsymbol{v_{n-3}}\}$$

یک قطر گراف باشد. کافی است رنگ رأس‌های u_l, v_l، $l < n$، را به‌صورت زیر مشخص کنیم.
$$c(u_l) = \begin{cases} 2 & l \equiv 0 \pmod 4 \\ 1 & l \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

$$c(v_l) = \begin{cases} 3 & l \equiv 1 \pmod 4 \\ 4 & l \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$\boldsymbol{n \equiv 2 \pmod 4}$

در این حالت، گراف دوبخشی است، ولی به ازای برخی مقادیر n گراف‌های غیرنقره‌ای وجود دارند. ابتدا مشخص می‌کنیم به ازای چه مقادیری از n گراف نقره‌ای نیست.

گزاره ۶: به ازای $n = 10,14,26$ گراف $P(n,3)$ نقره‌ای نیست.

اثبات: در این‌حالت $\alpha(P(n,3)) = n$. گراف $P(10,3)$ را در نظر گرفته و گراف کاهش نقره‌ای آن را می‌سازیم. فرض‌کنیم
$$\boldsymbol{I} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_3}, \dots, \boldsymbol{u_9}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_4}, \dots, \boldsymbol{v_{10}}\}$$

قطر گراف باشد.
گراف $H - I = SR(P(10,3), I)$، یک گراف ۶-منتظم ۱۴ رأسی است. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که این گراف ۴-رنگ‌پذیر نیست و $\chi(H-I) = \chi(SR(P(10,3), I)) = 5$ به همین‌ترتیب می‌توانیم گراف کاهش نقره‌ای $P(14,3)$ و $P(26,3)$ را بسازیم و عدد رنگی آن‌ها را به‌دست آوریم.
$$\chi(SR(P(14,3), I)) = \chi(SR(P(26,3), I)) = 5$$

توجه داریم که این گراف‌ها دوبخشی هستند و مجموعه‌های مستقل ماکزیمم آن‌ها تحت دوران رئوس یکریخت هستند. بنابراین گراف $P(n,3)$ به ازای $n = 10,14,26$ نقره‌ای نیست. ■

حال برای $n > 14$ و $n \neq 26$، نگاشت رنگی c را تعریف می‌کنیم. فرض‌کنیم
$$\boldsymbol{I} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_{n-1}}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_4}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$$

یک قطر برای این گراف دوبخشی باشد. برای این‌که رنگ‌آمیزی نقره‌ای باشد دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم.

- $\boldsymbol{\gcd(n,3) = 3}$

در این حالت زیرگراف درونی به‌صورت سه دور مجزا به طول $\frac{n}{3}$ است. گراف $P(n,3)$ را به قطاع‌های۶-تایی افراز می‌کنیم و رأس‌های قطاع۶-تاییlام، $1 \le l < \frac{n}{6} - 1$، را به‌صورت زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم.
اگر l فرد باشد. فرض‌می‌کنیم:
$$c(u_{6l-4}) = c(u_{6l}) = 3,\ c(u_{6l-2}) = 2$$
$$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = c(v_{6l-1}) = 4$$

اگر l زوج باشد. فرض‌می‌کنیم:
$$c(u_{6l-4}) = c(u_{6l}) = 2, c(u_{6l-2}) = 3$$
$$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = c(v_{6l-1}) = 1$$

هم‌چنین، فرض می‌کنیم:
$$c(v_{n-5}) = c(v_{n-3}) = c(v_{n-1}) = 2$$
$$c(u_{n-8}) = 4$$

- $\boldsymbol{\gcd(n,3) = 1}$

در این‌حالت زیرگراف درونی یک دور کامل است. برای اینکه به‌توان نگاشت رنگی c را طوری تعریف کرد که گراف نقره‌ای باشد، گراف $P(n,3)$ را به $\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor$ قطاع

۶–تایی افراز کرده و دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

- $\boldsymbol{n \equiv 4 \pmod{6}}$

رأس‌های قطاع ۶–تاییlام، $1 \leq l < \lfloor\frac{n}{6}\rfloor$، را به‌صورت زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم.

اگر l فرد باشد. فرض‌می‌کنیم

$c(u_{6l-4}) = c(u_{6l}) = 1, c(u_{6l-2}) = 2$
$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = 3, c(v_{6l-1}) = 4$

اگر l زوج باشد. فرض‌می‌کنیم

$c(u_{6l-4}) = c(u_{6l}) = 2, c(u_{6l-2}) = 1$
$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = 4, c(v_{6l-1}) = 3$

هم‌چنین، فرض می‌کنیم:

$c(u_{n-4}) = 4, c(u_{n-2}) = 1, c(v_{n-1}) = 2$

- $\boldsymbol{n \equiv 2 \pmod{6}}$

گراف $P(n,3)$ به$\lfloor\frac{n}{6}\rfloor$ قطاع ۶–تایی و یک قطاع ۲–تایی افراز می‌شود. رأس‌های قطاع ۶–تاییlام، $1 \leq l < \lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$، را به‌صورت زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم.

اگر l فرد باشد. فرض‌می‌کنیم

$c(u_{6l-4}) = c(u_{6l}) = 2, c(u_{6l-2}) = 3$
$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = 4, c(v_{6l-1}) = 1$

اگر l زوج باشد. فرض می‌کنیم

$c(u_{6l-4}) = c(u_{6l}) = 3, c(u_{6l-2}) = 2$
$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = 4, c(v_{6l-1}) = 1$

اگر $l = \left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor - 1$ باشد، آن‌گاه

$c(u_{6l-4}) = c(u_{6l}) = 4, c(u_{6l-2}) = 2$
$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = 1, c(v_{6l-1}) = 3$

هم‌چنین، $c(u_{n-2}) = 3$.

$\boldsymbol{n \equiv 3 \pmod{4}}$

فرض‌کنیم

$\boldsymbol{I = \{u_1, u_3, \ldots, u_{n-2}, v_2, v_4, \ldots, v_{n-3}\}}$

یک قطرگراف باشد. می‌دانیم $P(7,3) \cong P(7,2)$ نقره‌ای است. برای $n > 7$، گراف را به تعدادی قطاع ۶–تایی و یک قطاعr–تایی، $r = 1,3,5$ افراز می‌کنیم. رأس‌های قطاع ۶–تاییlام، $1 \leq l < \frac{n}{6}$، را به‌صورت زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم.

اگر l فرد باشد. فرض‌می‌کنیم:

$c(u_{6l-4}) = c(u_{6l}) = 1, c(u_{6l-2}) = 2$
$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = c(v_{6l-1}) = 3$

اگر l زوج باشد. فرض‌می‌کنیم:

$c(u_{6l-4}) = c(u_{6l}) = 2, c(u_{6l-2}) = 1$
$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = c(v_{6l-1}) = 4$

برای رنگ‌آمیزی رئوس قطاع ۶–تایی آخر، $l = \lfloor\frac{n}{6}\rfloor$، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

- $\boldsymbol{n \equiv 1 \pmod{6}}$

$c(u_{6l-4}) = 1, c(u_{6l}) = 3 \;\; c(u_{6l-2}) = 4$
$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = 3, c(v_{6l-1}) = 2$

- $\boldsymbol{n \equiv 3 \pmod{6}}$

$c(u_{6l-4}) = 2, c(u_{6l}) = 3 \;\; c(u_{6l-2}) = 1$
$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = c(v_{6l-1}) = 4$

- $\boldsymbol{n \equiv 5 \pmod{6}}$

$c(u_{6l-4}) = c(u_{6l}) = 1, c(u_{6l-2}) = 2$
$c(v_{6l-5}) = c(v_{6l-3}) = c(v_{6l-1}) = 3$

در تمامی حالت‌های فوق، پس از اعمال رنگ‌آمیزی ارائه‌شده بر روی رئوس، رنگ برخی از رأس‌هایی $V\setminus I$ مشخص نیستند، ولی بنا به معتبر بودن رنگ‌آمیزی و تعریف رنگ‌آمیزی نقره‌ای مشخص خواهند شد. با رنگ آمیزی ارائه‌شده، در تمامی حالت‌های فوق، رنگ رأس‌های I به‌طور منحصربه‌فرد تعیین خواهند شد، به‌عبارت‌دیگر رئوس I رنگین‌کمان هستند. پس برای هر $n > 14$ و $n \neq 26$، $P(n,3)$ یک گراف نقره‌ای نسبت به قطر انتخاب‌شده I است.

توجه. می‌دانیم گراف $P(n,k) \cong P(n,l)$ اگر و تنها اگر $kl \equiv \pm 1 (\mathrm{mod} n)$ [۷]. بنا به این هم ارزی نقره‌ای بودن گراف $P(n,\mathrm{k})$ به ازای بعضی از مقادیر دیگر k نیز مشخص می‌گردد.

- $P(2\mathrm{k}+1,2) \cong P(2\mathrm{k}+1,\mathrm{k})$.

بنابراین گراف $P(2\mathrm{k}+1,\mathrm{k})$ نقره‌ای است. به عنوان

مثال گراف $P(15,7)$ و $P(13,6)$ نقره‌ای است.

- به ازای $k > 3$،
$P(3\mathrm{k}+1,3) \cong P(3\mathrm{k}+1,\mathrm{k})$. بنابراین گراف $P(3\mathrm{k}+1,\mathrm{k})$ نقره‌ای است به عنوان مثال، گراف $P(16,5)$ و $P(19,6)$ نقره‌ای است.

- به ازای $k > 3$، $k \neq 5,9$،
$P(3\mathrm{k}-1,3) \cong P(3k-1,\mathrm{k})$. بنابراین گراف $P(3\mathrm{k}-1,\mathrm{k})$ نقره‌ای است. به عنوان مثال، گراف $P(17,6)$ و $P(20,7)$ نقره‌ای است. توجه داریم که $P(14,3) \cong P(14,5)$، $P(26,3) \cong P(26,9)$. پس $P(14,5)$ و $P(26,9)$ گراف های غیرنقره‌ای هستند.

۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای پیداکردن خانواده گراف‌های نقره‌ای، گراف پترسن تعمیم‌یافته را مورد بررسی قرار دادیم. نشان دادیم که گراف پترسن تعمیم‌یافته، $P(n,k)$، به ازای $n \equiv 0\ (\mathrm{mod}4)$ و k یک عدد فرد، یک گراف کاملاً نقره‌ای است. هم‌چنین، نشان دادیم یک رنگ آمیزی نقره‌ای برای گراف پترسن تعمیم یافته $P(n,1)$،$P(n,2)$ و $P(n,3)$ به جز $P(5,2)$، $P(10,3)$،$P(14,3)$ و $P(26,3)$ نسبت به مجموعه مستقل ماکزیمم آن وجود دارد. هم‌چنین، بنا به خاصیت یکریختی، به ازای $k > 3$ گراف‌های $P(2\mathrm{k}+1,\mathrm{k})$ $P(3k+1,k)$ و $P(3k-1,k)$ نقره‌ای هستند.
برای اطمینان از صحت تابع رنگ تعریف شده از برنامه‌نویسی میپل استفاده کردیم و برای برخی از مقادیر n با برنامه میپل درستی تابع رنگ ارائه شده را مورد بررسی قرار دادیم. هم‌چنین، نقره‌ای نبودن گراف‌های $P(5,2)$، $P(10,3)$،$P(14,3)$ و $P(26,3)$ با برنامه میپل و رنگ آمیزی گراف کاهش نقره‌ای آن‌ها بررسی کردیم.

تشکر و قدردانی

از جناب آقای دکتر محمودیان بخاطر معرفی این مسأله و راهنمایی‌های ایشان سپاسگزارم. هم‌چنین از سرکار خانم‌ها قاسمی و شریعتی برای نظرات مفیدی که برای بهتر شدن مقاله داشتن سپاسگزارم.

فهرست منابع

[1] M. Mahdian and E. S. Mahmoodian. The roots of an IMO97 problem. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 28:48–54, 2000.

[2] Mark E. Watkins. A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. *J. Combinatorial Theory*, 6:152–164, 1969.

[3] Babak Behsaz, Pooya Hatami, and E. S. Mahmoodian. On minimum vertex covers of generalized Petersen graphs. *Australas. J. Combin.*, 40:253–264, 2008.

[4] Mehdi Behzad, Pooya Hatami, and E. S. Mahmoodian. Minimum vertex covers in the generalized Petersen graphs $P(n,2)$. Bull. Inst. Combin. Appl., 56:98–102, 2009.

[5] J. B.Ebrahimi, Nafiseh Jahanbakht, and E. S. Mahmoodian. Vertex domination of generalized Petersen graphs. *Discrete Math.*, 309(13):4355–4361, 2009.

[6] Nazli Besharati, J. B. Ebrahimi, and A. Azadi. Independence number of generalized petersen graphs. *Ars Combinatoria*, 124 (17): 239–255, 2016.

[7] Alice Steimle and William Staton. The isomorphism classes of the generalized Petersen graphs. *Discrete Math.*, 309(1):231–237, 2009.

[8] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice-Hall, Inc, United States of American, 2001.

[9] Mohammad Ghebleh, Luis A. Goddyn, E. S. Mahmoodian, and Maryam Verdian-Rizi. Silver cubes. *Graphs Combin.*, 24(5):429–442, 2008.

[10] A. Ahadi, Nazli Besharati, E. S. Mahmoodian, and M. Mortezaeefar. Silver block intersection graphs of steiner 2-designs. *Graphs Combin.*, 29(4):735–746, 2013.

[11] Diane Donovan, E. S. Mahmoodian, Colin Ramsay, and Anne Penfold Street. Defining sets in combinatorics: a survey. In *Surveys in combinatorics, 2003 (Bangor)*, volume 307 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 115–174. Press, Cambridge, 2003.