دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

درجه جابجایی نیم گروه از مرتبه $p^{\alpha}q^{\beta}-1$

ماندانا قانعی[۱]، مهرداد آزادی[۲]*

(۱و۲) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکز، جمهوری اسلامی ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۱۹

چکیده

درجه جابجایی یک نیم گروه ناجابجایی متناهی S احتمال انتخاب زوج مرتب (x,y) از اعضای S است که در آن x با y جابجا می‌شود. بنابه تعریف درجه جابجایی واضح است که اگر S یک نیم گروه جابجایی باشد درجه جابجایی آن یک است. قاعدتاً آن دسته از نیم گروه‌هایی مورد بحث هستند که ناجابجایی و متناهی باشند، لذا به ازای هر عدد صحیح مثبت و دلخواه $n=p^{\alpha}q^{\beta}$، $S=\left\langle a,b \middle| a^{p^{\alpha}}=a, b^{q^{\beta}}=b, ab=a \right\rangle$ که در آن p و q اعداد اول $(2\leq p<q)$، α و β اعداد صحیح مثبت هستند، نمایش متناهی نیم گروه S از مرتبه $p^{\alpha}q^{\beta}-1$ است. در این مقاله، ثابت می‌کنیم که درجه جابجایی این دسته از نیم گروه‌ها از مرتبه $p^{\alpha}q^{\beta}-1$ کمتر از $\frac{1}{2}$ است. برای مثال، در پایان این مقاله درجه جابجایی دسته خاصی از نیم گروه‌های ناجابجایی متناهی بررسی شده که کمتر از $\frac{1}{2}$ است. این مطلب به ما کمک می‌کند که بطور دقیق ارزیابی کنیم کران بالای درجه جابجایی چه دسته‌ای از نیم گروه‌ها کمتر از $\frac{1}{2}$ است و همینطور برعکس کران پایین بیشتر از $\frac{1}{2}$ دارند.

واژه‌های کلیدی: درجه جابجایی، رده هم ارزی، مرکز ساز، نمایش متناهی نیم گروه‌ها.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: meh.azadi@iauctb.ac.ir

۱- مقدمه

برای یک ساختار جبری متناهی دلخواه A، احتمال انتخاب زوج مرتب (x,y) از اعضای A که در آن x با y جابجا می‌شود را درجه جابجایی نامیده و با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. همچنین داریم:

$$P(A)=\frac{\left|\{(x,y)\in A\times A: xy=yx\}\right|}{|A|^2}=\frac{\sum_{x\in A}|C_A(x)|}{|A|^2}$$

که در آن $C_A(x)$ مرکز ساز x در A است. در مرجع [۵] ثابت شده که برای گروه متناهی A،

$$P(A)=\frac{\kappa(A)}{|A|}$$

که درآن $\kappa(A)$ تعداد رده‌های هم ارزی A است.

برای یک الفبا A، A^+ را نیم‌گروه آزاد روی A در نظر می‌گیریم. فرض کنید R زیرمجموعه‌ای از $A^+\times A^+$ بوده و ρ رابطه هم ارزی تولید شده توسط R باشد، دراینصورت نیم‌گروه $S=\frac{A^+}{\rho}$ را به $\langle A|R\rangle$ نمایش می‌دهیم. بدون کاستن از کلیت، برای $w_1,w_2\in A^+$، اگر w_1 و w_2 با هم یکسان باشند می‌نویسیم $w_1\equiv w_2$ و اگر هر عضو از S، نمایش مشابه داشته باشند (به این معنی که اگر $(w_1,w_2)\in\rho$ آنگاه می‌نویسیم $w_1=w_2$.)

برای مثال، اگر $A=\{a,b\}$ و $R=\{ab=ba\}$، آنگاه $aba=a^2b$ اما $aba\not\equiv a^2b$.

به ازای عدد صحیح $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}\geq 4$، $k\geq 2$، نمایش متناظر نیم گروه S از مرتبه $n-1$ که در مرجع [1] بیان شده است، به صورت زیر است

$$S=\left\langle a_1,a_2,\cdots,a_k \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i^{p_i^{\alpha_i}}=a_i\ \ (i=1,2,\cdots,k),\\ a_ia_{i+1}=a_i\ \ (i=1,2,\cdots,k-1)\end{array}\right\rangle$$

قضیه اصلی این مقاله به صورت زیر است:

قضیه ۱.۱: به ازای عدد صحیح مثبت و دلخواه $n=p^\alpha q^\beta$، که در آن p و q اعداد اول بوده $(2\leq p<q)$، و α و β $(1\leq\alpha<\beta)$ ، اعداد صحیح هستند، اگر

$$S=\left\langle a,b \;\middle|\; a^{p^\alpha}=a\ ,b^{q^\beta}=b, ab=a\right\rangle$$

نمایش نیم گروه متناهی S از مرتبه $p^\alpha q^\beta-1$ باشد، داریم:

$$P(S)=\frac{\sum_{x\in S}|C(x)|}{|S|^2}=\frac{3n+p^{2\alpha}+q^{2\beta}+5\left(p^\alpha+q^\beta-1\right)}{(n-1)^2}<\frac{1}{2}$$

۲- اثبات قضیه اصلی

در این بخش قضیه اصلی را اثبات می‌کنیم

اثبات: نیم گروه S را می‌توان به صورت زیر بیان نمود $S=\{b^ja^i:0\leq i\leq p^\alpha-1,\ 0\leq j\leq q^\beta-1\}$ مرکز سازها و تعداد اعضای آنها را به صورت زیر هستند

$$C(a)=C\left(a^2\right)=\cdots=C\left(a^{p^\alpha-1}\right)=\left\{a,a^2,\cdots,a^{p^\alpha-1}\right\}$$

$$C(b)=C\left(b^2\right)=\cdots=C\left(b^{q^\beta-2}\right)=\left\{b,b^2,\cdots,b^{q^\beta-1}\right\}$$

$$C\left(b^{q^\beta-1}\right)=\left\{\begin{array}{r} b^{q^\beta-1},b^ja^i\ :\ 1\leq i\leq p^\alpha-1,\\ 1\leq j\leq q^\beta-1\end{array}\right\}$$

$$C\left(b^ja^i\right)=\left\{b^ja^i,b^{q^\beta-1}\right\}$$

که در آن

$$1\leq i\leq p^\alpha-1,\ 1\leq j\leq q^\beta-1$$

تعداد اعضای مرکزساز هر عضو به صورت زیر است

$$\left|C(a)\right|=\left|C\left(a^2\right)\right|=\cdots=\left|C\left(a^{p^{\alpha}-1}\right)\right|$$
$$=p^{\alpha}-1$$
$$\left|C(b)\right|=\left|C\left(b^2\right)\right|=\cdots=\left|C\left(b^{q^{\beta}-2}\right)\right|$$
$$=q^{\beta}-1$$
$$\left|C\left(b^{q^{\beta}-1}\right)\right|=p^{\alpha}\left(q^{\beta}-1\right)$$
$$\left|C\left(b^{j}a^{i}\right)\right|=2\left(p^{\alpha}-1\right)\left(q^{\beta}-1\right)$$

که در آن

$$1\le i\le p^{\alpha}-1,\ 1\le j\le q^{\beta}-1$$

بنابراین

$$P(S)=\frac{\left(p^{\alpha}-1\right)\left(p^{\alpha}-1\right)+\left(q^{\beta}-2\right)\left(q^{\beta}-1\right)}{\left(p^{\alpha}q^{\beta}-1\right)^2}+\frac{1\times p^{\alpha}\left(q^{\beta}-1\right)+\left(p^{\alpha}-1\right)\left(q^{\beta}-1\right)\times 2}{\left(p^{\alpha}q^{\beta}-1\right)^2}$$
$$=\frac{3n+p^{2\alpha}+q^{2\beta}-5\left(p^{\alpha}+q^{\beta}-1\right)}{(n-1)^2}$$

می‌خواهیم نشان دهیم: $P(S)<\frac{1}{2}$، یعنی:

$$P(S)=\frac{3p^{\alpha}q^{\beta}+p^{2\alpha}+q^{2\beta}-5p^{\alpha}-5q^{\beta}+5}{\left(p^{\alpha}q^{\beta}-1\right)^2}<\frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه نامساوی فوق معادل نامساوی

$$2\left(3p^{\alpha}q^{\beta}+p^{2\alpha}+q^{2\beta}-5p^{\alpha}-5q^{\beta}+5\right)<\left(p^{\alpha}q^{\beta}-1\right)^2$$

است، نشان می‌دهیم:

$$2\left(\left(p^{\alpha}+q^{\beta}-2\right)^2+\left(p^{\alpha}-1\right)\left(q^{\beta}-1\right)\right)<\left(p^{\alpha}q^{\beta}-1\right)^2$$

لذا کافیست نشان دهیم

$$\left(p^{\alpha}q^{\beta}-1\right)^2-2\left(p^{\alpha}+q^{\beta}-2\right)^2>2\left(p^{\alpha}-1\right)\left(q^{\beta}-1\right)$$

یا

$$\left(p^{\alpha}q^{\beta}-1-\sqrt{2}p^{\alpha}-\sqrt{2}q^{\beta}+2\sqrt{2}\right)\times\left(p^{\alpha}q^{\beta}-1+\sqrt{2}p^{\alpha}+\sqrt{2}q^{\beta}-2\sqrt{2}\right)>2\left(p^{\alpha}-1\right)\left(q^{\beta}-1\right)$$

یا به طور معادل

$$\left(p^{\alpha}q^{\beta}+\sqrt{2}p^{\alpha}+\sqrt{2}q^{\beta}-2\sqrt{2}-1\right)-\left(p^{\alpha}-1\right)\left(q^{\beta}-1\right)$$
$$=\left(p^{\alpha}q^{\beta}+\sqrt{2}\left(p^{\alpha}+q^{\beta}\right)-2\sqrt{2}-1\right)-\left(p^{\alpha}q^{\beta}-\left(p^{\alpha}+q^{\beta}\right)+1\right)$$
$$=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(p^{\alpha}+q^{\beta}\right)-2\sqrt{2}-2$$
$$=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(p^{\alpha}+q^{\beta}\right)-2\left(\sqrt{2}+1\right)$$
$$=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(p^{\alpha}+q^{\beta}-2\right)>0$$

پس

$$\left(p^{\alpha}q^{\beta}+\sqrt{2}p^{\alpha}+\sqrt{2}q^{\beta}-2\sqrt{2}-1\right)>\left(p^{\alpha}-1\right)\left(q^{\beta}-1\right)\quad(1)$$

همچنین داریم

$$p^{\alpha}q^{\beta}-\sqrt{2}p^{\alpha}-\sqrt{2}q^{\beta}+2\sqrt{2}-1$$
$$>p^{\alpha}q^{\beta}-2p^{\alpha}-\sqrt{2}q^{\beta}+2\sqrt{2}-1$$
$$=q^{\beta}\left(p^{\alpha}-\sqrt{2}\right)-2\left(p^{\alpha}-\sqrt{2}\right)-1$$
$$=\left(p^{\alpha}-\sqrt{2}\right)\left(q^{\beta}-2\right)-1$$

چون $2\le p<q$ و $1\le\alpha<\beta$، داریم

$$\left(p^{\alpha}-\sqrt{2}\right)\left(q^{\beta}-2\right)-1>2$$

لذا

$$p^{\alpha}q^{\beta}-\sqrt{2}p^{\alpha}-\sqrt{2}q^{\beta}+2\sqrt{2}-1>\left(p^{\alpha}-\sqrt{2}\right)\left(q^{\beta}-2\right)-1>2\quad(2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم

$$\left(p^{\alpha}q^{\beta}-\sqrt{2}p^{\alpha}-\sqrt{2}q^{\beta}+2\sqrt{2}-1\right)\times \left(p^{\alpha}q^{\beta}+\sqrt{2}p^{\alpha}+\sqrt{2}q^{\beta}-2\sqrt{2}-1\right) > 2\left(p^{\alpha}-1\right)\left(q^{\beta}-1\right)$$

و این اثبات را کامل می‌کند.■

۳- مثال

بنا به مرجع [۷]، نیم گروه

$$S=\left\langle a,b \,\middle|\, a^2=b^n, bab=a\right\rangle$$

از مرتبه $|S|=5n-1$ است. اگر $n\geq 2$ و زوج باشد، آنگاه $|S|$ فرد بوده و S نیم‌گروهی شبه- ناجابجایی است، بطوریکه به ازای $n=2$ درجه جابجایی این نیم گروه بیشتر از $\frac{1}{2}$ بوده و به ازای $n>2$ از $\frac{1}{2}$ کمتر است.

اثبات: بنا به مرجع ۷، برای $n=2$ مرتبه S برابر ۹ است و داریم:

$$S=\left\{a,a^2,a^3,a^4,b,ab,ba,a^2b,aba\right\}$$

همچنین داریم:

$$\left|C(a)\right|=\left|C\left(a^3\right)\right|=\left|\left\{a,a^2,a^3,a^4\right\}\right|=4$$

$$\left|C(b)\right|=\left|\left\{a^2,a^4,b,a^2b,aba\right\}\right|=5$$

$$\left|C\left(a^2\right)\right|=\left|C\left(a^4\right)\right| =\left|\left\{a,a^2,a^3,a^4,b,ab,ba,a^2b,aba\right\}\right| =9$$

$$\left|C(ab)\right|=\left|C(ba)\right| =\left|\left\{a^2,a^4,b,ab,ba\right\}\right|=4$$

$$\left|C\left(a^2b\right)\right|=\left|C(aba)\right| =\left|\left\{a^2,a^4,a^2b,aba\right\}\right|=5$$

و در نتیجه داریم

$$P(S)=\frac{\sum_{x\in S}\left|C(x)\right|}{|S|^2} =\frac{4\times 4+2\times 9+2\times 5}{9\times 9}=\frac{48}{81}>\frac{1}{2}$$

حال، وقتیn زوج و بیشتر از ۲ باشد داریم:

$$S=\left\{\begin{array}{c} a^i,b^j,ab^j,b^ja,a^2b^j,a^4b^j\ ; \\ 1\leq i\leq 4\ \ ,1\leq j\leq n-1\end{array}\right\}$$

بنابراین

$$\left|C(a)\right|=\left|C\left(a^3\right)\right|=4$$

$$\left|C\left(a^2\right)\right|=\left|C\left(a^4\right)\right|=5n-1$$

$$\left|C\left(ab^i\right)\right|=\left|C\left(b^ia\right)\right|=4\ ,\ (1\leq i\leq n-1)$$

$$\left|C\left(b^i\right)\right|=\left|C\left(a^2b^i\right)\right|=\left|C\left(a^4b^i\right)\right| =3n-1 \qquad (1\leq i\leq n-1)$$

بنابراین داریم:

$$P(S)=\frac{\sum_{x\in S}\left|C(x)\right|}{|S|^2} =\frac{2\times 4+2\times(5n-1)+4(n-1)}{(5n-1)(5n-1)} +\frac{(n-1)(3n-1)+(n-1)(3n-1)}{(5n-1)(5n-1)} =\frac{9n^2+6n+1}{25n^2-10n+1}$$

در حالت اخیر داریم

$$\lim_{n\to\infty}P(S)=\frac{9}{25}.$$

بنابراین به ازای هر عدد زوج بزرگتر از ۲ مانند n داریم $P(S)<\frac{1}{2}$. ■

فهرست منابع

[1] B. Ahmadi, C.M. Campbell, H. Doostie, Non-Commutative finite monoids of a given order $n \geq 4$, An. şt. Univ. Ovidius Consţanta. 22 (2014) 29-35.

[2] K. Ahmadidelir, C.M. Campbell, H. Doostie, Almost commutativesemigroups, Algebra Colloquium. 18 (2011) 881-888.

[3] C.M. Campbell, J.D. Mitchell, N. Ruskuc, Comparing semigroup andmonoid presentations for finite monoids, Monatsh. Math. 134 (2002) 287-293.

[4] C.M. Campbell, E.F. Robertson, N. Ruskuc, R.M. Thomas, Semigroup and group presentations, Bull. London Math. Soc. 27 (1995) 46--50.

[5] H. Doostie, M. Maghasedi, Certain classes of groups withcommutativity degree $d(G) < 0.5$, Ars Combinatoria. 89 (2008) 263-270.

[6] E.F. Robertson, Y. Ünlü, On semigroup presentations, Proc. Edinburgh Math. Soc. 36 (1993) 55-68.

[7] M.R. Sorouhesh, H. Doostie, Quasi-commutative semigroups of finite order related to hamiltonian groups, Bull. Korean Math. Soc. 52 (2015) 239-246.