دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

میانگین پذیری ضعیف ضرب‌های تانسوری وابسته به همریختی‌ها

عصمت قریشی مدینه[1]، امین محمودی کبریا[2*]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکز، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۰۸

چکیده

در این مقاله ارتباط میان همریختی‌های جبرهای باناخ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ و همریختی‌های جبرهای باناخ $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})$ را مورد مطالعه قرار داده و سپس به بررسی رابطه بین $\sigma-$ میانگین‌پذیری ضعیف $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ و $\sigma-$ میانگین‌پذیری ضعیف $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: $\sigma-$ میانگین‌پذیر ضعیف، $\sigma-$ قطر تقریبی کراندار، $\sigma-$ اشتقاق، ضرب تانسوری.

* . عهده دار مکاتبات: Email:a_mahmoodi@iauctb.ac.ir

۱- مقدمه

مفهوم میانگین‌پذیری جبر باناخ توسط جانسون بیان شده است [۴]. فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند مفهوم ضعیفا میانگین‌پذیری ضرب‌های تانسوری $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ را یزدان پناه مورد بحث و بررسی قرار داد [۸].

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد، فضای همه همریختی‌های پیوسته از $\mathcal{A}$ به داخل $\mathcal{A}$ را با $Hom(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و E یک باناخ $\mathcal{A}-$ دو مدول باشد و $\sigma_{\mathcal{A}}\in Hom(\mathcal{A})$ باشد. نگاشت خطی و کراندار $D:\mathcal{A}\to E$ را $\sigma_{\mathcal{A}}-$ اشتقاق گوییم هرگاه برای هر $b\in\mathcal{A}$ و داشته باشیم [۵و۶]:

$$D(ab)=D(a)\cdot\sigma_A(b)+\sigma_A(a).D(b)$$

و به ازای هر $x\in E$، نگاشت $\delta_x^a:\mathcal{A}\to E$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_x^a=\sigma_{\mathcal{A}}(a)\cdot x-x\cdot\sigma_{\mathcal{A}}(a)$$

را یک $\sigma_{\mathcal{A}}-$ اشتقاق درونی (القا شده به وسیله x) می‌گوییم.

یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ را $\sigma_{\mathcal{A}}-$ انقباض‌پذیر ($\sigma_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر) می‌نامیم هرگاه به ازای هر باناخ $\mathcal{A}-$ دو مدول E، هر $\sigma_{\mathcal{A}}-$ اشتقاق $D:\mathcal{A}\to E$ ($D:\mathcal{A}\to E^*$)، $\sigma_{\mathcal{A}}-$ اشتقاق درونی باشد.

یزدان پناه و همکاران میانگین‌پذیری ضعیف و $\sigma_{\mathcal{A}}-$ را مورد بررسی قرار دادند [۷].

یک جبر باناخ $\mathcal{A}$را $\sigma_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف گوییم، هرگاه برای هر باناخ $\mathcal{A}-$ دو مدول $\mathcal{A}$ و هر $\sigma_{\mathcal{A}}-$ اشتقاق $D:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^*$، $\sigma_{\mathcal{A}}-$ اشتقاق درونی باشد. نگاشت $\pi:\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ یک نگاشت ضربی با ضابطه زیر است:

$$\pi(a\otimes b)=ab\qquad(a.b\in\mathcal{A})$$

برای یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ حاصل ضرب تانسوری $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ یک باناخ $\mathcal{A}-$ دو مدول با ضرب‌های مدولی زیر است:

$$\mathrm{a}.(\mathrm{b}\otimes\mathrm{c})=\mathrm{ab}\otimes\mathrm{c}$$

و

$$(\mathrm{b}\otimes\mathrm{c}).\mathrm{a}=\mathrm{b}\otimes\mathrm{ca}\quad(\mathrm{a,b,c}\in\mathcal{A})$$

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\sigma_{\mathcal{A}}\in Hom(\mathcal{A})$ باشد. یک تور کراندار $(u_\alpha)\subset\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ را یک $\sigma_{\mathcal{A}}-$ قطر تقریبی کراندار برای $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه برای هر $a\in\mathcal{A}$، داشته باشیم:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a)\cdot u_\alpha-u_\alpha\cdot\sigma_{\mathcal{A}}(a)\to 0$$
$$\pi(u_\alpha)\sigma_{\mathcal{A}}(a)\to\sigma_{\mathcal{A}}(a)$$

یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ را اساسی می‌گوییم هرگاه $\mathcal{A}^2=\{ab:a$ و $b\in\mathcal{A}\}$ در $\mathcal{A}$ چگال باشد.

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. جبر باناخ $\mathcal{A}^\#=\mathcal{A}\oplus\mathbb{C}$ است و نرم روی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|a+\alpha\|=\|a\|+|\alpha|\quad(\forall a\in\mathcal{A}\ \text{و}\ \alpha\in\mathbb{C})$$

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ جابجایی و I یک ایده‌آل بسته در $\mathcal{A}$ باشد و $\sigma_{\mathcal{A}}\in Hom(\mathcal{A})$ دارای برد چگال باشد. اگر $\mathcal{A}$، $\sigma_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد و $\overline{\sigma_{\mathcal{A}}(I)}=I$. قریشی و همکاران $\sigma_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیری ضعیف I را مورد بررسی قرار دادند [۳].

۲- مفاهیم و تعاریف

در این بخش، برخی تعاریف که در ادامه مقاله استفاده خواهند شد را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۲: فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $a_0\in\mathcal{A}$ و $b_0\in\mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند. نگاشت‌های $S_1:\mathcal{A}\to\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ با ضابطه $S_1(a)=a\otimes b_0$ و $S_2:\mathcal{B}\to\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$

با ضابطه $S_2(b) = a_0 \otimes b$ را برای $a \in \mathcal{A}$ و $b \in \mathcal{B}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲-۲: فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند. همریختی‌های پیوسته و پوشای $T_1 : \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ با ضابطه $T_1(a \otimes b) = a$ و $T_2 : \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ با ضابطه $T_2(a \otimes b) = b$ را برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $b \in \mathcal{B}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳-۲: فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند. برای هر همریختی $\tau \in Hom(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$، همریختی $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ با ضابطه $\tau_{\mathcal{A}} = T_1 \tau S_1$ و همریختی $\tau_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ با ضابطه $\tau_{\mathcal{B}} = T_2 \tau S_2$ را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۴-۲: فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند برای همریختی‌های $\sigma_{\mathcal{A}} \in Hom(\mathcal{A})$ و $\sigma_{\mathcal{B}} \in Hom(\mathcal{B})$، همریختی $\sigma_{\mathcal{A}} \otimes \sigma_{\mathcal{B}} \in Hom(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_{\mathcal{A}} \otimes \sigma_{\mathcal{B}} (a \otimes b) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) \otimes \sigma_{\mathcal{B}}(b)$$
$(b \in \mathcal{B}$ و $a \in \mathcal{A})$

این مقاله تعمیمی از مرجع [۸] با موضوع $\sigma-$ میانگین‌پذیری ضعیف ضرب‌های تانسوری جبرهای باناخ است. در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$، $\tau-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ اساسی است [۱-۳].

همچنین اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$، $\tau-$میانگین‌پذیر ضعیف باشد، آنگاه $\mathcal{A}$، $\tau_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف است[۳]. سرانجام ثابت می‌کنیم که اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$، $\tau-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ ، $\tau_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف است [۵].

۳- میانگین پذیری ضعیف $\sigma-$

در این بخش ارتباط میان میانگین‌پذیری ضعیف همریختی‌های $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ و همریختی‌های جبرهای باناخ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تذکر ۱-۳: فرض کنید $\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}$ جبرهای باناخ با عضوهای خودتوان $a_0 \in \mathcal{A}$ و $b_0 \in \mathcal{B}$ باشند. اگر $\tau \in Hom(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد، آنگاه همریختی‌های $\tau_{\mathcal{A}} \in Hom(\mathcal{A})$ و $\tau_B \in Hom(B)$ دارای برد چگال هستند. که در آن $\tau_{\mathcal{A}} = T_1 \tau S_1$ و $\tau_{\mathcal{B}} = T_2 \tau S_2$.

قضیه ۱-۳: فرض کنید $\mathcal{A}$و$\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $a_0 \in \mathcal{A}$و $b_0 \in \mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند و $\tau \in Hom(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد. اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$، $\tau-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگا ه $\mathcal{A}$و $\mathcal{B}$ هر دو اساسی است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{A}$، اساسی نباشد. یعنی: $\overline{span}\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$. طبق قضیه هان باناخ ، عضو ناصفر $a^* \in \mathcal{A}^*$ وجود دارد به طوری که: $\langle \tau_{\mathcal{A}}(aa').a^* \rangle = 0$ و $(a.a' \in \mathcal{A}.)$ از رابطه فوق واضح است که برای هر $a \in \mathcal{A}$، $a^* . a = a . a^*$.

فرض کنید b^* عضو ناصفری از $\mathcal{B}^*$ باشد. نگاشت خطی کراندار $a^* \otimes b^*$ روی $\mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^*$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle \tau(a \otimes b).a^* \otimes b^* \rangle = \langle \tau_{\mathcal{A}}(a).a^* \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b).b^* \rangle$$

نگاشت $D : (A \widehat{\otimes} B) \to (A \widehat{\otimes} B)^*$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(m) = \langle \tau(m).a^* \otimes b^* \rangle a^* \otimes b^*$$

این نگاشت، برای هر $a.a' \in \mathcal{A}$ و $b.b' \in \mathcal{B}$ کراندار است. به آسانی می‌توان نشان داد که D، $\tau-$ اشتقاق است. زیرا:

$$D(a \otimes b \cdot a' \otimes b') = \\ = \langle \tau(aa' \otimes bb').a^* \otimes b^* \rangle a^* \otimes b^*$$

$$= \langle \tau_{\mathcal{A}}(aa').a^*\rangle\langle\tau_{\mathcal{B}}(bb').b^*\rangle = 0$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned}
&\tau(a\otimes b)\cdot D(a'\otimes b') + D(a\otimes b)\cdot \tau(a'\otimes b')\\
&= \tau(a\otimes b)\langle\tau(a'\otimes b').a^*\otimes b^*\rangle a^*\otimes b^* + \langle \tau(a\otimes b).a^*\otimes b^*\rangle a^*\otimes b^*\cdot \tau(a'\otimes b')\\
&= \langle\tau_{\mathcal{A}}(a').a^*\rangle\langle\tau_{\mathcal{B}}(b').b^*\rangle\tau_{\mathcal{A}}(a)a^*\otimes \tau_{\mathcal{B}}(b)b^*\langle\tau_{\mathcal{A}}(a).a^*\rangle\langle\tau_{\mathcal{B}}(b).b^*\rangle a^*\tau_{\mathcal{A}}(a')\otimes b^*\tau_{\mathcal{B}}(b') = 0
\end{aligned}$$

بنابراین D، یک $\tau -$ اشتقاق است، پس $\varphi \in (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^*$ وجود دارد به طوری که: $D=\delta_\varphi$. برای هر $a\in\mathcal{A}$ و $b\in\mathcal{B}$ داریم:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle\tau(a\otimes b).\tau(a\otimes b)\cdot\varphi - \varphi\cdot\tau(a\otimes b)\rangle\\
&= \langle\tau(a\otimes b).D(a\otimes b)\rangle\\
&= \langle\tau(a\otimes b).\langle\tau(a\otimes b).a^*\otimes b^*\rangle a^*\otimes b^*\rangle\\
&= \langle\tau(a\otimes b).a^*\otimes b^*\rangle^2\\
&= (\langle\tau_{\mathcal{A}}(a).a^*\rangle\langle\tau_{\mathcal{B}}(b).b^*\rangle)^2
\end{aligned}$$

حال $b\in\mathcal{B}$ را چنان اختیار می‌کنیم که $\tau_{\mathcal{B}}(b)\neq 0$ پس $\langle\tau_{\mathcal{A}}(a).a^*\rangle = 0$ برای هر $a\in\mathcal{A}$. آنگاه $a^*=0$ روی $\tau_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$. از آنجا که $\tau_{\mathcal{A}}$ دارای برد چگال است پس a^* صفر است و این تناقض است.

به طور مشابه می‌توان نشان داد که $\mathcal{B}$ اساسی است.

قضیه ۲-۳: فرض کنید $\mathcal{A}$و$\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $a_0\in\mathcal{A}$ و $b_0\in\mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند و $\tau\in Hom(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})$دارای برد چگال باشد. اگر $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $\tau -$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه $\mathcal{A}(\mathcal{B})$، $\tau_{\mathcal{A}}\,(\tau_B)-$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

برهان. فرض کنید b^* عضو ناصفر $\mathcal{B}^*$باشد. طبق قضیه ۱-۳، وجود دارد $b.b'\in\mathcal{B}$ به طوری که:

$$\langle\tau_{\mathcal{B}}(bb').b^*\rangle = 1$$

فرض کنید نگاشت $d:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^*$، $\tau_{\mathcal{A}}-$ اشتقاق باشد، نگاشت $D:(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})\to(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\langle\tau(a'\otimes b').D(a\otimes b)\rangle\\
&= \langle\tau_{\mathcal{A}}(a').d(a)\rangle\langle\tau_{\mathcal{B}}(b').\tau_{\mathcal{B}}(b)b^*\rangle
\end{aligned}$$

بنابراین نگاشت D خطی کراندار است و برای هر $a'.a_1.a_2\in\mathcal{A}$ و $b'.b_1.b_2\in\mathcal{B}$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\langle\tau(a'\otimes b').D(a_1\otimes b_1\cdot a_2\otimes b_2)\rangle =\\
&\langle\tau_{\mathcal{A}}(a').d(a_1a_2)\rangle\langle\tau_{\mathcal{B}}(b').\tau_{\mathcal{B}}(b_1b_2)b^*\rangle =\\
&\langle\tau_{\mathcal{A}}(a').\tau_{\mathcal{A}}(a_1)\cdot d(a_2) + d(a_1)\tau_{\mathcal{A}}(a_2)\rangle\langle\tau_{\mathcal{B}}(b').\tau_{\mathcal{B}}(b_1b_2)b^*\rangle =\\
&\langle\tau_{\mathcal{A}}(a'a_1).d(a_2)\rangle\langle\tau_{\mathcal{B}}(b')\tau_{\mathcal{B}}(b_1).\tau_{\mathcal{B}}(b_2)b^*\rangle +\\
&\langle\tau_{\mathcal{A}}(a_2a').d(a_1)\rangle\langle\tau_{\mathcal{B}}(b_2)\tau_{\mathcal{B}}(b').\tau_{\mathcal{B}}(b_1)b^*\rangle\\
&= \langle\tau(a'\otimes b').\tau(a_1\otimes b_1)\cdot D(a_2\otimes b_2)\rangle + \langle\tau(a'\otimes b').D(a_1\otimes b_1)\cdot\tau(a_2\otimes b_2)\rangle
\end{aligned}$$

بنابراین D ، $\tau-$ اشتقاق است. پس وجود دارد $\varphi\in(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^*$ به طوری که $D=\delta_\varphi$.

بعلاوه a^* روی $\tau_{\mathcal{A}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^*\tau_{\mathcal{A}}(a) = \varphi\tau(a\otimes bb')$$

برای هر $a\in\mathcal{A}$ و $b.b'\in\mathcal{B}$. a^* یک تابعک خطی کراندار است و برای هر $a.a'\in\mathcal{A}$، داریم:

$$\begin{aligned}
&\langle\tau_{\mathcal{A}}(a').d(a)\rangle\\
&= \langle\tau_{\mathcal{A}}(a').d(a)\rangle\langle\tau_{\mathcal{B}}(bb').b^*\rangle\\
&= \langle\tau_{\mathcal{A}}(a')\otimes\tau_{\mathcal{B}}(b).D(a\otimes b')\rangle\\
&= \langle\tau_{\mathcal{A}}(a')\otimes\tau_{\mathcal{B}}(b).\tau(a\otimes b')\cdot\varphi - \varphi\cdot\tau(a\otimes b')\rangle\\
&= \langle\tau_{\mathcal{A}}(a')\cdot\tau_{\mathcal{A}}(a)\otimes\tau_{\mathcal{B}}(b)\cdot\tau_{\mathcal{B}}(b').\varphi\rangle\\
&-\langle\tau_{\mathcal{A}}(a')\cdot\tau_{\mathcal{A}}(a)\otimes\tau_{\mathcal{B}}(b)\cdot\tau_{\mathcal{B}}(b').\varphi\rangle\\
&= \langle\tau_{\mathcal{A}}(a')\cdot\tau_{\mathcal{A}}(a).a^*\rangle - \langle\sigma_{\mathcal{A}}(a)\cdot\tau_{\mathcal{A}}(a').a^*\rangle\\
&= \langle\tau_{\mathcal{A}}(a')\cdot\tau_{\mathcal{A}}(a) - \tau_{\mathcal{A}}(a)\cdot\tau_{\mathcal{A}}(a').a^*\rangle\\
&= \langle\tau_{\mathcal{A}}(a').\delta_{a^*}(a)\rangle.
\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم d روی $\tau_{\mathcal{A}}$ یک $\tau_{\mathcal{A}}-$ اشتقاق درونی است. لذا $\mathcal{A}$، $\tau_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

مثال ۱-۳: فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده و $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. $C(X,\mathcal{A})$ یک جبر باناخ است[۸]. اگر $\tau \in Hom(\mathcal{A}\hat{\otimes}C(X.\mathcal{A}))$ دارای برد چگال باشد. اگر $\mathcal{A}\,\widehat{\otimes}\,C(X,\mathcal{A})$، $\tau-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد، آنگاه بنا به قضیه ۱-۳، $C(X,\mathcal{A})$ اساسی است.

تذکر ۲-۳: فرض کنید $\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}$ جبرهای باناخ باشند. یک همریختی $\sigma_{\mathcal{A}} \in Hom(\mathcal{A})$ را می‌توان به یک همریختی $\sigma^\#_{\mathcal{A}} \in Hom(\mathcal{A}^\#)$ توسیع داد، به طوری که:

$$\sigma^\#_{\mathcal{A}}(a+\lambda e_{\mathcal{A}}) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)+\lambda e_{\mathcal{A}} (a\in\mathcal{A}.\lambda\in\mathbb{C})$$

که در آن $e_{\mathcal{A}}$ عضو همانی $\mathcal{A}^\#$ است.
به طور مشابه، یک همریختی $\sigma_{\mathcal{B}} \in Hom(\mathcal{B})$ را نیز می‌توان به یک همریختی $\sigma^\#_{\mathcal{B}} \in Hom(\mathcal{B}^\#)$ توسیع داد. بنابراین برای $\sigma \in Hom(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})$ می‌توان یک همریختی $\sigma^\# \in Hom(\mathcal{A}^\#\widehat{\otimes}\mathcal{B}^\#)$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\sigma^\#\big((a+\lambda e_{\mathcal{A}})\otimes(b+\lambda e_{\mathcal{B}})\big) = \sigma^\#_{\mathcal{A}}(a+\lambda e_{\mathcal{A}})\otimes\sigma^\#_{\mathcal{B}}(b+\lambda e_{\mathcal{B}}) \quad (a\in\mathcal{A}.b\in\mathcal{B})$$

قضیه ۳-۳: فرض کنید $\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}$ جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $\sigma_{\mathcal{A}} \in Hom(\mathcal{A})$ و $\sigma_{\mathcal{B}}\in Hom(\mathcal{B})$ دارای برد چگال باشند. اگر $\mathcal{A}$، $\sigma_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف و $\mathcal{B}$، $\sigma_{\mathcal{B}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشند، آنگاه ، $\sigma_{\mathcal{A}}\otimes\sigma_{\mathcal{B}}-$ $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ میانگین‌پذیر ضعیف است. که در آن $\sigma_{\mathcal{A}}\otimes\sigma_{\mathcal{B}} \in Hom(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})$ برای هر، $a\in\mathcal{A}.b\in\mathcal{B}$ تعریف می‌شود.

برهان. فرض کنید E، یک باناخ $\mathcal{A}^\#\widehat{\otimes}\mathcal{B}^\#-$ دو مدول باشد. فرض کنید $D\in Z^1_\sigma(\mathcal{A}^\#\widehat{\otimes}\mathcal{B}^\#.E)$ جایی که $\sigma=\sigma_{\mathcal{A}}\otimes\sigma_{\mathcal{B}}$. E، یک باناخ $\mathcal{A}-$ دو مدول است [۸]. نگاشت $\mathcal{A}\times E\mapsto E$ با ضابطه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(a.x)\mapsto(\sigma_{\mathcal{A}}(a)\otimes e_{\mathcal{B}}).x (a\in\mathcal{A}.x\in E)$$

به سادگی می‌توان نشان داد:

$$D|(\mathcal{A}^\#\otimes e_{\mathcal{B}})\in Z^1{}_\sigma(\mathcal{A}^\#.E)$$

$\mathcal{A}^\#$، $\sigma^\#_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف است [۶] و بنابراین $D|(e_{\mathcal{A}}\otimes\mathcal{B}^\#)=0$. در نتیجه $D|(\mathcal{A}^\#\otimes e_{\mathcal{B}})=0$. از این رو $D=0$ است لذا $\mathcal{A}^\#\widehat{\otimes}\mathcal{B}^\#$، $\sigma^\#-$ ضعیفا میانگین‌پذیر است.
اکنون از [قضیه ۶، مرجع۷] نتیجه می‌گیریم که: $\overline{\mathcal{A}^2}=\mathcal{A}$ و $\overline{\mathcal{B}^2}=\mathcal{B}$.
در ادامه فرض کنید $I = \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$. I یک ایده‌آل بسته در $\mathcal{A}^\#\widehat{\otimes}\mathcal{B}^\#$ است، آنگاه طبق [۷،۳ گزاره، ۳] می‌توان نتیجه گرفت که، $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $\sigma-$ میانگین‌پذیر ضعیف است.
قضیه زیر عکس قضیه ۳-۳ است.

قضیه ۴-۳: فرض کنید $\mathcal{A}$و$\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $a_0\in\mathcal{A}$ و $b_0\in\mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند و $\tau\in Hom(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد. اگر $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $\tau-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه $\mathcal{A}$، $\tau_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف و $\mathcal{B}$، $\tau_{\mathcal{B}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

برهان. اثبات این قضیه با استفاده از قضیه ۲. ۳ بدست می‌آید.

تذکر ۳-۳: یک مشخصه ϕ روی جبر باناخ $\mathcal{A}$ یک تابعک خطی ناصفر است به طوری که برای هر $a.a'\in\mathcal{A}$ داریم:

$$\phi(aa')=\phi(a)\phi(a')$$

مجموعه همه مشخصه‌های $\mathcal{A}$ را با $\phi_{\mathcal{A}}$ نشان

می‌دهیم، طبق [۳,۱۶ قضیه ۱]، $\phi_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}^*$ است. قضیه زیر مهمترین قضیه این مقاله است.

قضیه ۵-۳: فرض کنید $\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}$ جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $a_0 \in \mathcal{A}$ و $b_0 \in \mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند و $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد و $\phi_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$. اگر $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ ، $\tau-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه $\mathcal{A}$، $\tau_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

برهان. $\varphi \in \phi_{\mathcal{B}}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $c_0 \in \mathcal{B}$ به طوری که $\varphi(c_0) = 1$. اکنون فرض کنید $d: \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$. نگاشت d، $\tau_{\mathcal{A}}-$ اشتقاق است. نگاشت $D: (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}) \to (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^*$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle \tau(a' \otimes b'). D(a \otimes b)\rangle = \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'). d(a)\rangle \varphi(bb')$$

D، یک نگاشت خطی کراندار است و برای هر $a'. a_1. a_2 \in \mathcal{A}$ و $b'. b_1. b_2 \in \mathcal{B}$داریم:

$$\begin{aligned}&\langle \tau(a' \otimes b'). \tau(a_1 \otimes b_1) \cdot D(a_2 \otimes b_2) + D(a_1 \otimes b_1) \cdot \tau(a_2 \otimes b_2)\rangle = \\ &\langle \tau_{\mathcal{A}}(a'a_1) \otimes \tau_{\mathcal{B}}(b'b_1). D(a_2 \otimes b_2)\rangle + \langle \tau_{\mathcal{A}}(a_2a') \otimes \tau_{\mathcal{B}}(b_2b'). D(a_1 \otimes b_1)\rangle = \\ &(\langle \tau_{\mathcal{A}}(a'a_1). d(a_2)\rangle + \langle \tau_{\mathcal{A}}(a_2a'). d(a_1)\rangle)\varphi(b'b_1b_2) = \\ &\langle \tau(a' \otimes b'). D(a_1 \otimes b_1.\ a_2 \otimes b_2)\rangle\end{aligned}$$

نگاشت D، $\tau-$ اشتقاق است. بنابراین وجود دارد $\psi \in (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^*$ به طوری که: $D = \delta_\psi$.

در ادامه فرض کنید $a^*: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ و تعریف می‌کنیم:

$$a^*\tau_{\mathcal{A}}(a) = \psi(\tau_{\mathcal{A}}(a) \otimes \tau_{\mathcal{B}}(c_0^2))$$

لذا برای هر $a. a' \in \mathcal{A}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&\langle \tau_{\mathcal{A}}(a'). d(a)\rangle = \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'). d(a)\rangle \varphi(c_0^2) \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \otimes \tau_{\mathcal{B}}(c_0). D(a \otimes c_0)\rangle \\ &\langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \otimes \tau_{\mathcal{B}}(c_0). \tau(a \otimes c_0) \cdot \psi \\ &-\psi \cdot \tau(a \otimes c_0)\rangle = \\ &\langle \tau_{\mathcal{A}}(a'a) - \tau_{\mathcal{A}}(aa') \otimes \tau_{\mathcal{B}}(c_0^2). \psi\rangle \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'a) - \tau_{\mathcal{A}}(aa'). a^*\rangle\end{aligned}$$

آنگاه $d = \delta_a^*(a)$. در نتیجه $\mathcal{A}$، $\tau_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

فرض کنیم V یک فضای برداری و $ball(V) = \{0 \neq f \in V: \|f\| \leq 1\}$ باشد. یک عمل ضرب روی V به صورت ab=f(a)b، $a,b \in V$ را تعریف می‌کنیم. جبر باناخ V مجهز شده به این ضرب را با V_f نمایش می‌دهیم. به آسانی می‌توان نشان داد که فضای مشخصه‌های V_f تک عضوی و فقط شامل f است، یعنی $\phi_{V_f} = \{f\}$. برای مطالعه خواص بیشتر V_f به [۹] مراجعه کنید. بدیهی است که هر عضو $a \in V_f$ با شرط f(a)=1 یک عضو خودتوان است.

مثال ۲-۳: فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با یک عضو خودتوان باشد، آنگاه $\tau \in \mathrm{Hom}\ (\mathcal{A}\widehat{\otimes}V_f)$. اگر $\mathcal{A}\widehat{\otimes}V_f$، $\tau-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه بنا به قضیه ۵-۳، $\mathcal{A}$ نیز $\tau_{\mathcal{A}}-$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله با معرفی همریختی‌های جبرهای باناخ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ ارتباط آن‌ها را با همریختی‌های جبر باناخ $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})$ را مورد مطالعه قرار دادیم. سپس با ارایه قضایایی رابطه بین $\sigma-$ میانگین‌پذیری ضعیف $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ و $\sigma-$ میانگین‌پذیری ضعیف $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ را اثبات کردیم. همچنین نشان دادیم، اگر $\mathcal{B}$و$\mathcal{A}$ جبرهای باناخ باشند و $a_0 \in \mathcal{A}$و $b_0 \in \mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند و $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد و $\phi_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$. اگر $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $\tau-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه $\mathcal{A}$، $\tau_{\mathcal{A}}-$ میانگین پذیر ضعیف است.

فهرست مراجع

[1] F. F. Bonsall, Duncan, *Complete normed Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1973.

[2] H. D. Dales, *Banach Algebras and Automatic continuity*, London Mathematical Society Monographs, **24**, Clarendon press, Oxford, 2000.

[3] S. Ghoraishi, A. Mahmoodi, A. R. Medghalchi, *Amenability-like properties of* $C(X.A)$, Filomat. **32**, no 8, (2018), 2701-2706.

[4] B. E. Johnson, *Cohomology in Banach Algebras*. Mem. Amer. Math. Soc. **127**, 1972.

[5] M. Mirzavaziri, M. S. Moslehian, *σ-Derivations in Banach algebras*, Bull. Iranian Math. Soc. **32** (1) (2006), 65-78.

[6] M. Mirzavaziri, M. S. Moslehian, *σ-amenability of Banach algebras*, Southeast Asian Bull. Math. **33** (2009), 89-99.

[7] T. Yazdanpanah, I. Moazzami Zadeh, *σ-weak Amenability of Banach Algebras*. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. **4**, no. 1, (2013), 66-73.

[8] T. Yazdanpanah, *Weak amenability of tensor product of Banach algebras*, The Publishing House Of The Romanian Academy **13**, no. 4, (2012), 310-313.

[9] M. Ziamanesh, B. Shojaee, A. Mahmoodi, *Essential amenability of dual Banach algebras*, Bull. Aust. Math. Soc., **100**, (2019), 479-488