دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و سوم، مرداد و شهریور ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری با داده‌های چند مرحله‌ای با استفاده از مدل‌های DEA-R

مهسا ترکاون‌نژاد[۱]، بهروز دانشیان[۲*]، قاسم توحیدی[۲]، مهناز مقبولی[۳]، فرزین مدرس خیابانی[۱]

(۱) گروه ریاضی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
(۳) گروه ریاضی، واحد ارس، دانشگاه آزاد اسلامی، جلفا، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۳۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۱۷

چکیده

در اندازه‌گیری کارآیی مجموعه‌ای از واحدها در یک بازه زمانی که چند دوره را پوشش می‌دهد، مدل‌های مبتنی بر تکنیک DEA استاندارد، وضعیت هر واحد در هر دوره را نادیده می‌گیرند که این باعث نتایج گمراه‌کننده می‌شود. این مقاله مدل‌های DEA-R را در حضور داده‌های چند دوره‌ای به گونه‌ای توسعه می‌دهد که روش پیشنهادی می‌تواند کارآیی کلی را با توجه به کارآیی کلی و دوره‌ای همه واحدها ارزیابی کند. روش پیشنهادی با ارائه یک کران پایین در وزن‌های بدست آمده از دوره‌ها، به اولویت‌بندی واحدها پرداخته و با ایجاد بینش‌های ارزشمند به تصمیم‌گیرندگان کمک می‌کند تا یافته‌های یک فرآیند ارزیابی عملکرد را بهتر درک کنند. از سوی دیگر وی و همکاران (۲۰۱۱) نشان دادند که مدل‌های DEA استاندارد نه تنها امتیاز کارایی DEA ناکارا را دست کم می‌گیرند، بلکه DMU کارا را ناکارا شناسایی می‌کنند. این مقاله دارای چهار ویژگی است: (۱) کارآیی کلی محاسبه شده از روش پیشنهادی به عملکرد تمام واحدها در تمام دوره‌ها بستگی دارد، (۲) روش پیشنهادی، کارآیی کلی را با تحمیل یک کران پایین به دست آمده از تمام دوره‌ها بر روی وزن‌ها ارزیابی می‌کند، (۳) این رویکرد دارای قدرت تشخیص بالا در تمییز واحدهایی است که در مدل‌های چند دوره‌ای موجود به عنوان کارآ ارزیابی می‌شوند، (۴) برای روشن شدن جزئیات روش پیشنهادی، مقایسه‌ای بین مدل‌های موجود و مدل DEA-R چند دوره‌ای پیشنهادی، برای اندازه گیری کارآیی ۲۲ بانک تجاری تایوانی در دوره زمانی ۲۰۰۹-۲۰۱۱ انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها مبتنی بر تحلیل کسری (DEA-R)، سیستم‌های چند دوره‌ای، کارآیی کلی، وزن‌های غیرصفر.

* عهده دار مکاتبات
Email: be_daneshian@yahoo.com

۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روش غیر پارامتری است که کارآیی نسبی واحدهای متجانس با چند ورودی و چند خروجی را در مقایسه با یکدیگر ارزیابی می‌کند. در این روش نیازی به شناخت شکل تابع تولید نبوده و محدودیتی در تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها نمی‌باشد. نخستین بار فارل [۱]، به تعیین کارآیی به روش غیر پارامتری پرداخت. چارنز و همکاران [۲] به تعمیم کار فارل پرداختند و نتیجه کار آنها به عنوان مدل CCR، در سال ۱۹۷۸ انتشار یافت. بنکر و همکاران [۳] با معرفی مدل BCC در حقیقت کار چارنز و همکارانش را توسعه بخشیدند. بعدها مشخص شد که این تکنیک در حوزه‌های مختلف به عنوان مثال در شرکت‌های سود محور مانند بانک‌ها [۴، ۵، ۶]، صنعت [۷]، بیمارستان‌ها [۸] و فروشگاه‌های خرده فروشی [۹] و سایر کاربرد دارد. هر چند مدل‌های استاندارد و معرفی شده DEA از انعطاف‌پذیری زیادی برخوردارند اما بیشتر مطالعات DEA با داده‌های مقطعی و اندازه گیری کارآیی نسبی در یک دوره، سرو کار داشتند. اما سوال اساسی زمانی هست که چند دوره زمانی برای ارزیابی کارآیی نسبی واحدها مورد توجه قرار بگیرد. در سال ۱۹۹۹، نموتو و گوتو [۱۰] روش پویا یا دینامیک را برای ارزیابی کارآیی یک سیستم چند مرحله‌ای ارایه دادند. کایو [۱۱] برای مطالعه سیستم‌های با ساختار سری از مدل‌های پویا استفاده کرد. تون و تسوتسوی [۱۲] نیز از دیگر توسعه دهندگان این روش در مطالعه ساختارهای شبکه بودند. ماریز و همکاران [۱۳] مروری بر مدل‌های پویا و کاربرد آن‌ها در مطالعات مختلف داشتند. نکته‌ی مشترک در مطالعات DEA پویا این بود که برای محاسبه‌ی کارآیی کل، کل ورودی‌های مصرفی و کل خروجی‌های تولید شده در همه دوره‌ها برای اندازه گیری کارآیی در نظر گرفته می‌شود. کارآیی کل محاسبه شده با استفاده از داده‌های استفاده شده در کل دوره، تنها کارآیی کل واحد تحت ارزیابی (DMU_o) را بدون در نظر گرفتن کارآیی دوره‌ای دوره‌های اختصاصی به دست می‌دهد که این خود یکی از کاستی‌های این روش‌هاست. برای دخیل کردن کارآیی دوره‌ای در محاسبه کارآیی چند دوره‌ای، روش تحلیل پوششی داده‌های چند دوره‌ای یا همان (Multi Period DEA) توسط کایو و لی [۱۴] ارایه شد. آنها مدل شبکه‌ی رابطه‌ای را پیشنهاد کردند که کارآیی کل و کارآیی دوره‌ای را همزمان محاسبه می‌کند. تمرکز اصلی آنها در مدل بر روی عملکرد واحد در هر دوره برای محاسبه‌ی کارآیی است. جالب توجه است که کارآیی کلی با میانگین وزنی کارآیی‌های دوره‌ای حاصل می‌شود و وزن‌های مورد استفاده شده، مطلوب‌ترین وزن‌ها در ارزیابی DMU هستند. مطالعات موردی بر روی ۲۲ بانک تجاری در تایوان برای ۳ سال ۲۰۰۹ تا ۲۰۱۱ دال بر قوت تمایز مدل پیشنهادی آنها در مقایسه با مدل‌های دینامیک یا پویا هست. اما از طرفی، کارآیی کلی بدست آمده از روش کایو و لی برای هر واحد، اندازه‌ای بین ۰ و ۱ است به عبارتی کارآیی حاصله متعلق به بازه‌ی (۱و۰) بوده و از این رو مدل پیشنهادی آنها قادر به تمییز بین واحدهای کارآ و ناکارآ نیست از طرف دیگر وجود جواب‌های چندگانه یکی دیگر از ضعف‌های مدل شبکه‌ی رایطه‌ای است. اخیراً وی و همکاران [۱۵] تلاش کردند تا اندازه‌گیری کارآیی را در مدل DEA شبکه چند دوره‌ای با بازخورد ارائه کنند، آنها از یک الگوریتم اکتشافی باینری برای به دست آوردن کارآیی بهینه استفاده کردند. در نهایت ارتباط بین کارآیی کلی و کارآیی دوره‌ای همچنان به عنوان یک چالش پابرجا می‌باشد. یک رویکرد علمی در این راستا، بکارگیری مدل‌های DEA-R می‌باشد. در نظر گرفتن داده‌ها بصورت نسبتی (کسری) ما را در حل این چالش توانا می‌سازد. ایده‌ی استفاده از مدل تحلیل پوششی

داده‌ها براساس تحلیل کسری برای اولین بار توسط دیسپیک و همکاران [۱۶] پیشنهاد گردید و DEA-R نام گرفت. در تحلیل پوششی داده‌ها از مدل‌های پوششی و مضربی در ماهیت ورودی و خروجی با بازده به مقیاس ثابت و متغیر استفاده می‌شود. با توجه به تعریف کارآیی، باید وزن‌های مثبت در نظر گرفته شود، این خود باعث محدودیت وزنی می‌شود. از طرفی با مشخص شدن مقیاس کارایی کاذب در تحلیل پوششی داده‌ها و ارایه‌ی مدلی مناسب می‌توان کارایی واقعی واحد تصمیم گیرنده را با در نظرگرفتن مجموع وزن دار شده نسبت هر خروجی به ورودی در نظر گرفت. لذا تغییر مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها از حالت کلاسیک به مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس تحلیل کسری ضروری به نظر می رسد. دیسپیک و همکاران [۱۶] مدل برنامه‌ریزی خطی را با در نظر گرفتن تمام نسبت‌های شکل گرفته بین همه‌ی خروجی‌ها و همه‌ی ورودی‌ها برای تجزیه و تحلیل کارایی به کار برده و برای اولین بار مدل DEA-R را برای ارزیابی کارایی یک واحد ارایه دادند. آنها با معرفی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس تحلیل کسری رابطه بین میانگین حسابی، هندسی و وزنی در مقدار کارآیی را به دست آوردند. با وجود نقاط قوت فراوان مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، گاهی این مدل‌ها سبب طبقه بندی اشتباه واحدهای کارا به عنوان واحدهای نا کارا می‌شوند. هر چند برای رفع این نقطه ضعف راهکارایی متعدد همانند روش‌های دوفازی در مقاله کوپر، سیفورد و همکاران (۲۰۰۲) یا مدل‌های مبتنی بر متغیرهای کمکی و یا مدل SBM در مقاله تون (۲۰۰۱) پیشنهاد شده است. یکی دیگر از ایرادات مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، وجود مفهومی به نام ناکارایی کاذب[۲] است. ناکارایی کاذب، که DMU کارآ را به عنوان DMU ناکارا شناسایی می‌کند، مسئله‌ای است که نادیده گرفته شده است. نادیده گرفتن این مساله در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده، ممکن است منجر به بروز برخی تعدیلات غیر ضروری در ورودی‌ها یا خروجی شده و سبب شود که نقاط قوت از دست برود وجود این نقص که منجر به تاثیرات عملی می‌شود ووی، چن، لی و همکاران (۲۰۱۱) به بررسی و شناسایی ناکارایی کاذب به منظور اجتناب از نتایج غیر منطقی، بررسی کردند. نکته جالب توجه در این مقاله، استفاده از مدل‌های ورودی محور تحلیل پوششی داده‌های کسری یا نسبتی به جای مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها بهمراه فرض محدودیت وزن برای شناسایی علل ناکارایی کاذب است. آنها با بررسی مطالعات دیگر نتیجه گرفتند که CCR نه تنها امتیاز کارایی واحدهای ناکارا دست کم می گیرد، بلکه DMU کارا را ناکارا شناسایی می‌کند. از آنجایی که این اشتباه که از آن به‌عنوان ناکارایی کاذب یاد کردند، آشکار و قابل روئت نمی‌باشد، آنها به مقابسه CCR-I بهمراه فرض محدودیت وزن با DEA-R-I بدون فرض محدودیت وزن پرداخته و ثابت کردند نمره کارآیی DEA-R-I همیشه بزرگتر از نمره کارایی CCR-I است. سپس با مقایسه هر دو روش برای ارزیابی عملکرد مراکز پزشکی در تایوان، واحدهایی را که دارای ناکارایی کاذب بودند شناسایی کرده و نشان دادند که علت ناکارایی کاذب تعداد وزن و همچنین فرض محدودیت وزن است. از این رو نشان داده شد که DEA-R-I می‌تواند یک مدل جایگزین برای CCR-I باشد تا از ناکارایی کاذب جلوگیری شود. در این رساله بدنبال ناکارایی کاذب در حالت چند دوره‌ای هستیم.

وی و همکاران [۱۷، ۱۸، ۱۹] رویکرد مدل‌های DEA-R را توسعه دادند. آنها با استفاده از مدلهای DEA-R ۲۱ مرکز درمانی را در تایوان مورد ارزیابی قرار داده و ناکارآیی کاذب را مورد بررسی

[2] Psedue Inefficiency

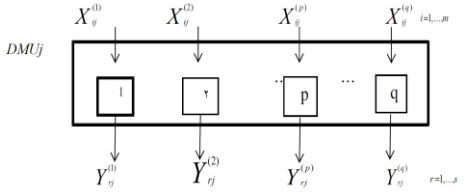
قرار دادند. لی و همکاران [۲۰] مدل‌های DEA-R را بدون استفاده از ورودی‌های صریح در ۱۵ مؤسسه تحقیقاتی چین بررسی کردند. آنها رویکرد متفاوتی را با تمرکز بر تعریف مجموعه امکان تولید و اندازه گیری کارآیی تکنیکی ارائه کردند. بر اساس این مبانی، آنها مدل‌های DEA-R ورودی محور را با فرض بازده به مقیاس ثابت برای ارزیابی کارآیی و ابرکارآیی توسعه دادند. مظفری و همکاران [۲۱] بحث کارآیی درآمد و هزینه را در مدلهای DEA و DEA-R را در حالی که داده‌های نسبتی در دسترس باشند مورد مطالعه قرار دادند. مظفری و همکاران [۲۲] و مظفری و همکاران [۲۳] مجموعه امکان تولید را با استفاده از اصول موضوعه CRS برای DEA-R مشخص کرده و در نهایت یک الگوریتم اصلی برای شناسایی سطوح کارآ در این کلاس از مدل‌ها را پیشنهاد کردند. اولسن و همکاران [۲۴] مشکلات مربوط به داده‌های نسبتی را پس از طبقه بندی آنها نشان داده، مجموعه امکان تولید متناسب با این نوع از داده‌ها را تعریف کرده و مدل‌های مربوطه در CRS/VRS را معرفی کرده و پاسخ علمی به بحث موجود با توجه به استفاده از مدل‌های DEA برای داده‌های نسبتی ارائه کردند. اولسن و همکاران [۲۴] همچنین روشی را مورد بحث قرار دادند که توسط آن مدل‌های DEA با داده‌های نسبتی حل می‌شوند و نوع جدیدی از ناکارآیی را معرفی کردند. اخیراً کامیاب و همکاران [۲۵] مدل‌های CRA مبتنی بر DEA-R را برای ارزیابی بانک‌های تجاری در یک سیستم دو مرحله‌ای توسعه دادند. سیزده بانک تجاری که به عنوان شبکه‌های دو مرحله‌ای مدل‌سازی شده‌اند، توسط مدل‌های پیشنهادی آنها در دو مورد مختلف از داده‌های نسبتی مورد ارزیابی قرار گرفتند. نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی اندازه‌های کارآیی دقیق‌تری را به دست آورده و لذا امکان تمییز بهتر بین DMUها را فراهم می‌کند. مظفری و همکاران [۲۶] یک رویکرد مبتنی بر DEA-R را برای در نظر گرفتن ترجیحات مدیریتی معرفی کردند. آنها یک مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) را برای ارزیابی کارآیی بر اساس تعریف مجموعه امکان تولید در حضور داده‌های نسبتی و برای به‌دست آوردن الگوی مربوطه برای هر واحد تصمیم‌گیری ارائه کردند. با استفاده از تنظیم هدف توسط مدیر در بین راه حل‌های ناشی از مسئله MOLP، آنها بهترین راه حل را با توجه به ترجیحات مدیران به عنوان معیار انتخاب می‌کنند. همه این تحقیقات و سایر تحقیقات علاوه بر کاربرد آنها در دنیای واقعی نشان دهنده‌ی اهمیت این موضوع در ادبیات DEA است. هدف این مقاله توسعه‌ی یک سیستم تولید چند دوره‌ای، بر اساس رویکرد DEA-R، برای اندازه‌گیری کارآیی کلی مجموعه‌ای از DMUها در یک دوره زمانی است. برای انجام این کار، روش دو مرحله‌ای زیر در نظر گرفته می‌شود: فاز اول، یک مدل DEA-R جدید در حضور داده‌های چند دوره‌ای معرفی می‌کنیم. به دلیل وجود وزن‌های صفر، برخی از ورودی‌ها ممکن است نقشی در تولید برخی از خروجی‌ها نداشته باشند. برای غلبه بر این مشکل، مدل بر اساس مفاهیم وزنی در سیستم چند دوره‌ای توسعه می‌شود. فاز دوم، با استفاده از وزن‌های غیرصفر مشتق‌شده از فاز اول، یک کران پایین برای وزن‌ها ارائه می‌کنیم. با افزودن این محدودیت جدید به مدل موجود در فاز اول، به آنچه مطلوب است می‌رسیم. جهت تاکید بر نقطه قوت مدل پیشنهادی، مدل مورد نظر بر روی داده‌های ۲۲ بانک تجاری تایوان پیاده سازی شده و با مدل‌های موجود مقایسه می‌شود.

مقاله بصورت زیر سازمان دهی شده است.: بخش بعدی به بررسی مفاهیم اولیه در مورد سیستم تولید چند دوره‌ای و خلاصه‌ی مختصری از مبنای مدل‌های DEA-R می‌پردازد. در بخش ۳، رویکرد پیشنهادی برای برخورد با سیستم چند دوره‌ای بر

اساس مدل‌های DEA-R ارائه می‌شود. بخش ۴ کاربرد روش پیشنهادی را با یک مثال عددی واقعی نشان می‌دهد. بخش نتیجه‌گیری، مقاله را به پایان می‌رساند.

۲. مفاهیم اولیه

۲/۱. کارآیی چند دوره‌ای



شکل ۱. سیستم چند دوره‌ای

ارزیابی کارآیی در مدل‌های چند دوره‌ای توجه قابل ملاحظه‌ای را در بین محققان به خود جلب کرده است. برای توصیف اندازه‌گیری کارآیی فرض کنید برای n واحد تصمیم‌گیری، X_{ij} و Y_{rj} به ترتیب i امین ورودی $(i=1,...,m)$و r امین خروجی $(r=1,...,s)$، برای DMU_j $j=1,...,n$ باشند و سیستم نیز متشکل از q دوره باشد که هر دوره، ورودی نظیر $X_{ij}^{(p)}$ را برای تولید خروجی $Y_{rj}^{(p)}$ مصرف می‌کند. سیستم چند دوره‌ای متشکل از q دوره در شکل ۱ نشان داده شده است.

مقادیر کلی ورودی i ام و خروجی r ام برای تمام این q دوره برای DMU_j عبارت است از $X_{ij}=\sum_{p=1}^{q}X_{ij}^{(p)}$ و $Y_{rj}=\sum_{p=1}^{q}Y_{rj}^{(p)}$. اولسون و همکاران [۲۸] و کایو [۱۱] مدل استاندارد CCR را برای ارزیابی کارآیی یک دوره خاص $p(p=1,...,q)$ به طور جداگانه با استفاده از داده‌های آن دوره در مدل (۱) انجام دادند:

$$E_k^{CCR}=Max\sum_{r=1}^{s}u_rY_{rk} \qquad (1)$$
$$s.t.$$
$$\sum_{r=1}^{s}u_rY_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_iX_{ij}\le 0 \quad , \quad j=1,...,n$$
$$\sum_{i=1}^{m}v_iX_{io}=1$$
$$u_r\ge 0, v_i\ge 0 \quad r=1,...,s \quad , \quad i=1,...,m.$$

این مدل تحت بازده به مقیاس ثابت است که در آن u_r و v_i به ترتیب وزن‌های متناظر با ورودی i-ام و خروجی r-ام هستند. استفاده از کل ورودی $X_{ij}=\sum_{p=1}^{q}X_{ij}^{(p)}$، و کل خروجی $Y_{rj}=\sum_{p=1}^{q}Y_{rj}^{(p)}$ کل دوره‌ها در یک محدوده‌ی زمانی برای اندازه‌گیری کارآیی کل یک سیستم با مدل (۱) اشاره به سیستمی است که همانند جعبه سیاه عمل کرده از عملکرد دوره‌ای چشم پوشی می‌کند. این مدل، مدل تجمیع (Aggregate Model) می‌باشد که می‌توان دوآل آن را به صورت زیر نشان داد:

$$E_k^{AGR}=Min \quad \theta-\varepsilon(\sum_{i=1}^{m}s_i^-+\sum_{r=1}^{s}s_r^+)$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_jX_{ij}+s_i^-=\theta X_{ik}, \quad i=1,...,m \qquad (2)$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_jY_{rj}-s_r^+=Y_{rk}, \qquad r=1,...,s$$
$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+\ge 0 \quad j=1,...,n, \ i=1,...,m, \ r=1,...,s$$

برای اندازه‌گیری کاارآیی کلی q دوره بطور جداگانه، پارک و پارک [۲۷]، مدل (۲) را با بکارگیری مفهوم کارآیی تکنیکی فارل بصورت زیر گسترش دادند:

$$E_k^{pp}=\min \ \theta-\varepsilon(\sum_{p=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}s_i^{-(p)}+\sum_{p=1}^{q}\sum_{r=1}^{s}s_r^{+(p)})$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(p)}X_{ij}^{(p)}+s_i^{-(p)}=\theta X_{ik}^{(p)}, \ p=1,...q, \ i=1,...,m \qquad (3)$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(p)}Y_{rj}^{(p)}-s_r^{+(p)}=Y_{rk}^{(p)}, \quad p=1,...,q, \ r=1,...,s$$
$$\lambda_j^{(p)}, s_i^{-(p)}, s_r^{+(p)}\ge 0, \ p=1,...,q, \ r=1,...,s \ , \ i=1,...,m, j=1,...,n$$

قابل ذکر است که مدل (۲) حالت خاصی از مدل (۳) می‌باشد که با اعمال متغیر $\lambda_j^p (p=1,..,q, j=1,..n)$، برای هر دوره به عنوان فرآیندی مستقل با استفاده از متغیرهای کمکی در محدودیت‌ها مدل‌بندی شده است. قابل ذکراست که مدل (۳) از مدل DEA شبکه‌ای پیشنهاد شده توسط فار و گروسکوف [۲۹] برای سیستم نشان داده شده در شکل ۱ اتخاذ شده است. از آنجایی که تمامی دوره‌ها با اندازه‌ی فاصله‌ی یکسان θ به یکدیگر مرتبط هستند این مدل، مدل شبکه‌ای متصل (Connected Network) نامیده می‌شود. زمانی که اندیس p با یک مقدار خاص t ثابت می‌شود فقط مجموعه داده‌های دوره‌ی t برای کل n ، DMU استفاده می‌شود. فاصله متناظر اندازه θ، کارآیی دوره‌ی t می‌باشد. از این نقطه نظر کارآیی کل یک DMU در صورتی که هر دوره به طور جداگانه ارزیابی شود، در واقع بهترین عملکرد است زیرا بقیه‌ی دوره‌های DMU با اندازه‌های فاصله‌ی کوچکتر متغیرهای S، در محدودیت‌های متناظر، بزرگترین مقدار در θ بکار برده شده در محدودیت $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j{}^{(p)}X_{ij}{}^{(p)}+s_i^{-(p)}=\theta X_{ik}{}^{(p)}$ را تنظیم می‌کنند. بر این اساس کارآیی کل اندازه‌ی فاصله از بهترین عملکرد است که با ε تاثیر روی متغیرهای S تنظیم می‌شوند. به همین دلیل کارآیی محاسبه شده از این مدل نسبتاً بزرگ می‌باشد. برای شکل ۱ کایو و لی [۱۴] مدل شبکه‌ای رابطه‌ای که برای سیستم‌های موازی طراحی شده بود را برای سیستم‌های چند دوره‌ای توسعه دادند. مدل پیشنهادی آنها برای ارزیابی همزمان کارآیی کلی و کارآیی مختص هر دوره (کارآیی دوره‌ای) در سیستم چند دوره‌ای متشکل از q دوره به صورت زیر بیان می‌شود:

(۴)

$$E_k^{KL}=\max\sum_{r=1}^{s}u_rY_{rk}$$

$$s.t$$

$$\sum_{i=1}^{m}v_iX_{ik}=1$$

$$\sum_{r=1}^{s}u_rY_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_iX_{ij}\le 0,\ j=1,...,n$$

$$\sum_{r=1}^{s}u_rY_{rj}{}^{(p)}-\sum_{i=1}^{m}v_iX_{ij}{}^{(p)}\le 0,\ j=1,...,n,\ p=1,...,q$$

$$u_r,v_i\ge\varepsilon, r=1,...,s, i=1,...,m$$

مدل (۴) که موسوم به مدل Relational network است دارای دو ویژگی مهم است: اولین ویژگی این مدل، یکسان بودن ضرایب مربوط به فاکتورهای ورودی و خروجی صرفنظر از دوره‌ی متناظر می‌باشد. بعبارت دیگر در $X_{ij}^{(p)}$ و $Y_{rj}^{(p)}$ ، دوره‌های مختلف p ، $(p=1,2,...,q)$ ضرایب یکسان v_i و u_r را دارند. ویژگی دوم این است که در محاسبه کارآیی کل سیستم، نه تنها باید ورودی‌ها و خروجی‌ها را در نظر گرفت بلکه باید دوره‌های متناظر آنها را هم مد نظر داشت. از آنجایی که مجموع محدودیت‌های متناظر q دوره برای یک DMU ، $\sum_{r=1}^{s}u_rY_{rj}{}^{(p)}-\sum_{i=1}^{m}v_iX_{ij}{}^{(p)}\le 0,(p=1,...,q)$ معادل با محدودیت نظیر کل سیستم برای هر DMU است بعنی همان محدودیت $\sum_{r=1}^{s}u_rY_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_iX_{ij}\le 0$. بنابراین محدودیت $\sum_{r=1}^{s}u_rY_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_iX_{ij}\le 0$ در این مدل زائد می‌باشد لذا آنچه در ساخت مرز بکار می‌رود، اطلاعات دوره‌ای واحد می‌باشد. پس از محاسبه‌ی جواب‌های بهین u_r^*, v_i^* کارآیی کل و کارآیی دوره‌ای متناظر هر دوره برای DMU به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$E_{overall}=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r^*Y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m}v_i^*X_{ik}}=\sum_{r=1}^{s}u_r^*Y_{rk} \qquad (۵)$$

$$E_i^{(p)} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r^* Y^{(p)}{}_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^* X^{(p)}{}_{ik}} \ , \ p = 1,\ldots,q \qquad (۶)$$

همچنین می‌توان کارآیی کل را به عنوان میانگین وزن‌دار شده کارآیی هر دوره محاسبه کرد که در آن وزن مربوط به هر دوره به صورت $w^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i^* X_{ik}^{(p)}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^* X_{ik}}$ بطور جداگانه محاسبه می‌شود. در نهایت برای بدست آوردن کارآیی کلی در حالت چند دوره‌ای، وزن هر دوره را به کارآیی دوره‌ی مربوطه ضرب کرده و سپس کلیه دوره‌ها جمع می‌شوند، حاصل جمع را کارآیی کلی می‌نامند. بعبارت دیگر $E_{overall} = \sum_{p=1}^{q} w^{(p)} \ E_i^{(p)}$.

وزن‌های انتخاب شده توسط هر واحد بهترین وزن انتخاب شده برای محاسبه کارآیی کل است، لذا برای تمام DMUها یکسان نیست. یعنی مدل(۴) نه تنها کارآیی کل و کارآیی دوره‌ای را در یک سیستم چند دوره‌ای به صورت همزمان محاسبه می‌کند بلکه قادر به ایجاد رابطه ریاضی بین این دو کمیت است. با این حال، وجود جواب‌های چندگانه در این مدل مشکل‌ساز است. از سوی دیگر نتایج حاصل از بکار گیری مدل (۴) بر روی ۲۲ بانک تجاری تایوانی در دوره زمانی ۲۰۰۹-۲۰۱۱ در مقاله کایو و لی (۲۰۱۴) حاکی از آن است که به خاطر وجود ناکارایی کاذب که ناشی از بکارگیری مدل CCR در محیط چند دوره ایست این مدل تمام واحد ها را ناکارا ارزیابی کرده است. وی و همکاران (۲۰۱۱) نشان دادند کهCCR نه تنها امتیاز کارایی DMU ناکارا را دست کم میگیرد، بلکهDMU کارا را ناکارا شناسایی می کند. ما در این مقاله برای رفع این مشکل مدل‌های DEA-R را در فضای چند دوره‌ای گسترش داده و مدل جدیدی را معرفی می‌کنیم که کارآیی کلی واحد را با در نظر گرفتن کارآیی‌های کلی و دوره‌ای تمام واحدها محاسبه کرده و واحدهای کارآ را از ناکارآ جدا می‌سازد.

۲/۲. مدل‌های DEA-R

دوباره فرض کنید X_{ij} و Y_{rj} به ترتیب i امین ورودی $(i = 1,\ldots,m)$و r امین خروجی $(r = 1,\ldots,s)$ ، DMU_j $j = 1,\ldots,n$ باشند و نیز فرض کنید داده‌های ورودی و خروجی مثبت بوده و نسبت‌های $\frac{x_{ij}}{x_{ip}}$ و $\frac{y_{rj}}{y_{rp}}$ در دسترس باشند.

دسپیک و همکاران [۱۶] مدل DEA-R را برای ارزیابی کارآیی DMU_p با فرض بازده به مقیاس ثابت به صورت زیر پیشنهاد دادند.

$$\hat{e}_o = Max_{w_{ir}} Min_j \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir} \frac{\left(X_{ij} / Y_{rj}\right)}{\left(X_{io} / Y_{ru}\right)}$$

$$s.t. \qquad (۷)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir} = 1$$

$$w_{ir} \geq 0 \quad i = 1,\ldots,m, r = 1,\ldots,s$$

در این مدل x_{io} و y_{ro} به ترتیب بردار ورودی و خروجی واحد تحت ارزیابی بوده و w_{ir} وزن‌های نسبی بردار ورودی i-ام و خروجی r-ام می‌باشند.

تعریف ۱. واحد تحت ارزیابی (DMU_o) در مدل (۷) کارآست اگر و تنها اگر مقدار بهینه‌ی تابع هدف برابر با ۱ باشد یعنی $\hat{e}_o^* = 1$، در غیر اینصورت واحد تحت ارزیابی ناکارآست.

می‌توان ثابت کرد که اندازه‌ی کارآیی بدست آمده از مدل (۷) بهتر یا برابر با اندازه‌ی کارآیی بدست آمده از مدل CCR استاندارد است [۲۱].

۳. رویکرد پیشنهادی

فرض کنید X_{ij} و Y_{rj} به ترتیب i امین ورودی

$(i=1,...,m)$ و r امین خروجی $(r=1,...,s)$ ، $j=1,...,n$ DMU_j باشند و سیستم نیز متشکل از q دوره باشد که هر دوره ورودی نظیر $X_{ij}^{(p)}$ را برای تولید خروجی $Y_{rj}^{(p)}$ مصرف می‌کند. مجدداً شکل۱ را در نظر بگیرید. در ادامه، مدل جدیدی برای $Y_{rj}=\sum_{p=1}^{q}Y_{rj}^{(p)}$ محاسبه کارآیی کلی یک فرآیند تولید چند دوره‌ای بر اساس مدل‌های DEA-R معرفی می‌شود. برای انجام این کار، ما هر دو رویکرد DEA-R و رویکردهای مرتبط با سیستم‌های چند دوره‌ای را بکار می‌گیریم. به منظور تجزیه و تحلیل سیستم‌های چند دوره‌ای با مدل‌های DEA-R، اندازه‌گیری کارآیی کلی با توجه به کارآیی دوره‌ای و دستیابی به وزن‌های بهینه مربوطه برای هر DMU مورد مطلوب ماست. با توجه به اشارات قبلی مقدار کلی ورودی i-ام و خروجی r-ام برای $DMU_j\,(j=1,..,n)$ در تمام دوره‌ها به ترتیب بصورت $X_{ij}=\sum_{p=1}^{q}X_{ij}^{(p)}$ و $Y_{rj}=\sum_{p=1}^{q}Y_{rj}^{(p)}$ می‌باشند. از طرفی فرض کنید $\boldsymbol{\theta_o}$کارآیی کلی DMU_o، $\boldsymbol{\theta_j}$ و $\boldsymbol{\theta_j^{(p)}}$ به ترتیب کارآیی کلی و کارآیی دوره‌ای برای ($j=1, \ldots, n$ DMU_j) باشند؛ و نیز فرض کنید که مجموع وزن‌ها که برای تمام دوره‌ها یکسان هستند برابر با ۱ باشند. با توجه به مفروضات در نظر گرفته شده، مدل پیشنهادی بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\max \theta_o \\
&s.t. \\
&\theta_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir}\frac{\left(X_{ij}/Y_{rj}\right)}{\left(X_{io}/Y_{ru}\right)}, && j=1,\ldots,n \\
&\theta_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir}\frac{\left(X_{ij}^{(p)}/Y_{rj}^{(p)}\right)}{\left(X_{io}^{(p)}/Y_{ro}^{(p)}\right)}, && j=1,\ldots,n \\
&\theta_j^{(p)} \le \sum_{\substack{i=1\\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}w_{ir}=1}}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir}\frac{\left(X_{ij}^{(p)}/Y_{rj}^{(p)}\right)}{\left(X_{io}^{(p)}/Y_{ro}^{(p)}\right)}, && j=1,\ldots,n;\ p=1,\ldots,q \\
&\theta_j,\theta_j^{(p)} \ge 0, \quad \theta_j^{(p)} \le 1 && j=1,\ldots,n;\ p=1,\ldots,q \\
&w_{ir} \ge 0, && i=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s.
\end{aligned}
\qquad (۸)
$$

قابل توجه است که مقدار بهینه‌ی تابع هدف در مدل (۸) یعنی θ^*، کارآیی کلی واحد تحت ارزیابی را با توجه به کارآیی‌های کلی و دوره‌ای تمام واحدها در تمام دوره‌ها محاسبه می‌کند.

مدل پیشنهادی دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. وزن‌های مربوط به عوامل مشابه نسبت به دوره‌ی مربوطه یکسان هستند.

۲. در مدل (۸) ، همواره $\theta^* \le 1$.

۳. مدل همواره شدنی بوده و نسبت به تغییر واحد، پایا می‌باشد.

مقیاس کارآیی در مدل (۸) ارزیابی DMU_o با نسبت‌های $\frac{X_o}{Y_o}$ را مشخص می‌کند.

۵. اگر داده‌ها نسبتی باشند فقط مدل های-DEA R می‌توانند مقیاس کارآیی را محاسبه کنند و مدل‌های DEA نمی‌توانند مقیاس کارآیی را مشخص کنند. مدل پیشنهادی هم برای داده‌های نسبتی و هم برای داده‌های معمولی قابل اجراست.

۶. مدل (۸) کارآیی کلی واحد تحت ارزیابی را با توجه به کارآیی‌های کلی و دوره‌ای تمام واحدها در تمام دوره‌ها محاسبه می‌کند.

در نظر داشته باشید، از آنجایی که مجموعه‌ی محدودیت‌های q دوره $\forall i,r,p$ $\theta_j^{(p)} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir}\frac{\left(X_{ij}^{(p)}/Y_{rj}^{(p)}\right)}{\left(X_{io}^{(p)}/Y_{ro}^{(p)}\right)}$ معادل با محدودیت نظیر کل سیستم برای هر DMU است بعنی همان محدودیت $\forall i,r$ $\theta_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir}\frac{\left(X_{ij}/Y_{rj}\right)}{\left(X_{io}/Y_{ru}\right)}$ لذا محدودیت زائد بوده و $\forall i,r$ $\theta_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir}\frac{\left(X_{ij}/Y_{rj}\right)}{\left(X_{io}/Y_{ru}\right)}$ می‌توان آن را حذف کرد.

همانگونه که مشخص است مدل (۸)، کارآیی کلی واحد تحت ارزیابی را محاسبه می‌کند. اما در محاسبات عملی بخاطر وجود وزن‌های صفر ممکن است برخی نسبت‌ها در محاسبه‌ی کارآیی نادیده

گرفته شوند. برای غلبه بر این مشکل، رویکرد زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

۱. مدل (۸) را بکار برده و وزن‌های بهینه را استخراج کنید.

۲. $\overline{w}$ را بصورت رابطه‌ی (۹) تعریف کرده و آنرا بعنوان کران پایین وزن‌ها در نظر بگیرید. نقش $\overline{w}$ در این رویکرد فاکتوری است که مانع از صفر شدن مقدار وزن‌ها در جواب بهینه می‌شود.

$$\overline{w} = \min_{o\in J}\left\{\frac{\sum_p\sum_i\sum_r w^*_{ir}.x^{(p)}_{io}}{\max_j \sum_p\sum_i\sum_r w^*_{ir}.x^{(p)}_{ij}}\right\} \qquad (۹)$$

۳. محدودیت $w \geq \overline{w}$ را به مدل (۸) اضافه کرده و مدل را دوباره اجرا کنید.

در نتیجه مدل نسبتی چند دوره‌ای MPR (Multi-Period Ratio Model) بصورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Max\tilde{\theta}_o \\
&s.t \\
&\tilde{\theta}_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir}\frac{\left(X^{(p)}_{ij}/Y^{(p)}_{rj}\right)}{\left(X^{(p)}_{io}/Y^{(p)}_{ro}\right)}, && j=1,\ldots,n \\
&\tilde{\theta}^{(p)}_j \le \sum_{\substack{i=1 r=1 \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir}=1}}^{m\ s} w_{ir}\frac{\left(X^{(p)}_{ij}/Y^{(p)}_{rj}\right)}{\left(X^{(p)}_{io}/Y^{(p)}_{ro}\right)}, && j=1,\ldots,n;\ p=1,\ldots,q \\
&\tilde{\theta}_j,\ \tilde{\theta}^{(p)}_j \ge 0,\quad \tilde{\theta}^{(p)}_j \le 1, && j=1,\ldots,n;\ p=1,\ldots,q \\
&w_{ir} \ge \overline{w}, && i=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s.
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

شایان ذکر است با تحمیل کران پایین به وزن ها, دسته دوم قیود در مدل (۱۰) عملا بی تاثیر است و می توان آن را حذف کرد. لذا مدل MPR بصورت مدل (۱۱) تقلیل می یابد:

$$\begin{aligned}
&\max\ \theta_o \\
&s.t.\quad \theta_o \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir}\frac{\left(x^{(p)}_{ij}/y^{(p)}_{rj}\right)}{\left(x^{(p)}_{io}/y^{(p)}_{ro}\right)},\quad j=1,\ldots,n;\ p=1,\ldots,q \qquad (۱۱) \\
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} w_{ir}=1 \\
&\theta_o \ge 0, && j=1,\ldots,n; \\
&w_{ir} \ge \overline{w}, && i=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s.
\end{aligned}$$

تعریف ۲. واحد تحت ارزیابی (DMU_o) کارآی کلی است اگر و تنها اگر مقدار بهینه‌ی تابع هدف در مدل MPR برابر با ۱ باشد یعنی $\tilde{\theta}^*_o = \mathbf{1}$، در غیر اینصورت واحد تحت ارزیابی ناکارآست.

بطور خلاصه می‌توان گفت که مدل MPR پیشنهادی در این مقاله اندازه‌ی کارآیی کلی واحدها را محاسبه کرده و این امکان را به تصمیم‌گیرنده می‌دهد تا یک اولویت‌بندی منطقی توام با شناسایی واحدهای کارآ و ناکارآ را داشته باشد و این بزرگترین وجه تمایز مدل پیشنهادی در مقایسه با رویکردهای موجود است.

۴. مثال عددی

جهت تشریح مدل پیشنهادی و مقایسه‌ی آن با مدل‌های (۲)، (۳) و (۴)، داده‌های به کار رفته در مقاله کایو و لی [۱۴] جهت ارزیابی ۲۲ بانک تجاری در تایوان در سال‌های ۲۰۰۹، ۲۰۱۰ و ۲۰۱۱ مورد بررسی قرار گرفته است. جدول ۱ اطلاعات سه ساله‌ی داده‌های ورودی و خروجی بانک‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۱. مجموعه داده ها

DMUs	Year	Labor	Physical capital	Purchased funds	Demand deports	S-term loans	ML- terms loarn
1.Chang Hwa	2011	8.58	23.51	973.32	303.99	320.61	805.60
	2010	8.67	23.78	933.48	298.78	322.96	723.61
	2009	7.64	24.24	938.09	267.82	263.18	739.54
2.King's Town	2011	0.84	2.65	115.01	21.08	25.09	70.52
	2010	0.88	2.90	116.59	18.02	25.95	70.88
	2009	0.92	3.17	119.33	15.89	23.50	71.25
3.Taichung	2011	1.94	3.34	260.14	73.55	82.27	196.63
	2010	1.79	3.23	238.21	64.37	73.48	171.07
	2009	1.68	3.56	217.73	58.65	76.66	139.90
4.Taiwan Business	2011	7.00	13.76	786.33	247.20	262.90	677.74
	2010	6.76	14.19	751.26	240.54	232.17	686.72
	2009	6.43	14.51	725.53	238.10	273.47	644.01
5.Kaohsiung	2011	1.25	2.20	155.64	21.72	71.37	95.15
	2010	1.27	2.24	149.68	20.15	72.61	89.06
	2009	1.16	2.28	127.67	18.17	55.94	81.31
6.Cosmos	2011	1.91	6.08	99.52	12.88	32.76	43.62
	2010	1.89	6.16	94.83	13.60	36.63	32.71
	2009	2.20	6.52	92.88	10.30	33.19	38.98
7.Union	2011	2.57	7.97	273.52	47.26	50.66	139.48
	2010	2.43	8.10	246.22	41.73	42.95	145.19
	2009	2.39	8.31	233.58	36.28	29.08	136.22
8.Far Eastern	2011	2.99	2.94	313.52	32.00	67.65	206.14
	2010	2.83	2.88	292.52	30.17	63.96	175.10
	2009	2.25	2.24	276.12	29.56	48.07	165.80
9.Ta Chong	2011	3.78	2.99	287.15	46.05	65.99	214.37
	2010	3.76	4.66	238.04	51.11	69.73	188.77
	2009	3.44	5.24	238.50	46.66	60.11	171.15
10.En Tie	2011	2.03	1.41	223.27	24.09	42.15	156.67
	2010	1.72	2.16	208.01	23.46	40.01	157.23
	2009	1.42	2.79	175.89	19.91	39.64	146.42
11.Hua Nan	2011	9.86	28.01	1138.20	474.04	416.39	888.58
	2010	9.45	25.91	1106.80	458.11	425.02	811.31
	2009	9.17	23.11	1094.84	408.93	372.19	716.07
12.Fubon	2011	7.04	10.94	944.66	215.07	243.92	709.48

DMUs	Year	Labor	Physical capital	Purchased funds	Demand deports	S-term loans	ML- terms loarn
	2010	6.51	12.07	907.23	265.58	215.67	638.85
	2009	6.17	12.39	887.51	191.89	202.72	624.30
13.Cathay	2011	8.22	24.93	1232.79	249.07	264.84	741.54
	2010	7.56	25.46	1113.09	234.74	227.25	677.38
	2009	7.23	26.43	1059.43	249.63	192.00	629.22
14.East Sun	2011	4.80	15.60	741.16	211.89	148.12	511.01
	2010	4.37	14.19	253.84	194.15	121.80	476.90
	2009	3.83	13.86	206.14	165.74	90.35	459.00
15.Yuanta	2011	2.85	2.54	382.03	55.63	73.85	278.40
	2010	2.59	2.62	321.93	59.42	59.52	233.04
	2009	2.31	2.68	254.72	42.18	44.64	200.75
16.Mega	2011	10.94	14.18	1092.21	488.22	418.62	1037.72
	2010	11.23	14.02	1074.03	470.93	405.56	919.92
	2009	9.76	15.64	1045.93	427.16	349.10	919.25
17.Taishin	2011	7.94	17.53	614.69	130.82	132.24	466.17
	2010	6.98	24.33	573.01	131.92	123.48	407.91
	2009	6.54	24.96	536.50	111.40	109.72	383.79
18.Shin Kong	2011	3.26	6.01	403.70	76.03	88.92	281.22
	2010	2.83	6.23	346.86	65.25	69.96	255.58
	2009	2.64	6.36	310.47	63.82	47.63	235.01
19.Sino Pac	2011	6.96	9.60	769.00	197.88	156.79	576.29
	2010	6.75	8.95	739.72	186.08	156.14	557.95
	2009	6.51	9.15	669.00	176.42	146.94	524.88
20.China Trust	2011	17.29	33.96	902.88	126.37	285.69	780.41
	2010	17.01	33.02	871.78	114.28	267.01	729.38
	2009	14.89	33.84	791.39	116.41	228.07	691.54
21.First	2011	10.38	25.56	1184.16	416.12	437.39	918.15
	2010	9.60	22.87	1196.79	409.69	409.59	840.06
	2009	9.22	22.83	1154.62	363.26	317.89	775.09
22.Taiwan Cooperative	2011	13.08	35.39	1753.07	386.84	433.96	1511.29
	2010	13.00	33.66	1704.62	373.01	338.50	1439.46
	2009	12.66	33.89	1668.48	342.02	357.91	1428.26

فاکتورهای ورودی عبارتند از نیروی انسانی (Labor)، سرمایه مادی (Physical capital) و سهام‌های خریداری شده (Purchased commercial)؛ و سپرده‌های مورد نیاز (Demand deposits)، وام‌های کوتاه مدت (Short –term loans)، و وام‌های میان مدت و کوتاه مدت (Medium and long-term loans) به عنوان سه فاکتور خروجی در نظر گرفته شده است. با بکارگیری مدل‌های (۲)، (۳) و (۴)، کارآیی کلی بانک‌ها در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲.کارآیی کل بدست آمده از اجرای مدل‌های (۲)، (۳) و (۴)

Banks	مدل تجمیع مدل (۲)	مدل شبکه‌ی متصل مدل (۳)	مدل شبکه‌ی ارتباطی مدل (۴)
1.Chang Hwa	0.9362	0.9472	0.8981
2.King's Town	0.7809	0.8060	0.7457
3.Taichung	1.0000	1.0000	0.9721
4.Taiwan Business	1.0000	0.9988	0.9681
5.Kaohsiung	1.0000	1.0000	0.9731
6.Cosmos	0.7868	0.8113	0.7361
7.Union	0.5304	0.5635	0.5067
8.Far Eastern	0.8887	0.9963	0.7591
9.Ta Chong	0.7997	0.8653	0.7202
10.En Tie	0.9595	0.9997	0.9018
11.Hua Nan	1.0000	1.0000	0.9754
12.Fubon	1.0000	0.9979	0.9680
13.Cathay	0.8538	0.8629	0.8173
14.East Sun	1.0000	1.0000	0.9878
15.Yuanta	1.0000	1.0000	0.9475
16.Mega	1.0000	1.0000	0.9683
17.Taishin	0.6533	0.7865	0.5280
18.Shin Kong	0.8482	0.8615	0.8123
19.Sino Pac	0.9018	0.9433	0.8430
20.China Trust	0.8540	0.8881	0.6259
21.First	0.9592	0.9746	0.9279
22.Taiwan Cooperative	1.0000	1.0000	0.9818

ستون دوم جدول ۲ محاسبات کارآیی حاصل از مدل (۲)، مدل نجمیع را گزارش می‌کند. ستون سوم اندازه‌ی کارآیی کلی محاسبه شده توسط مدل (۳)، مدل شبکه‌ی متصل را نشان می‌دهد و در نهایت ستون چهارم کارآیی کلی را با استفاده از مدل (۴)، مدل شبکه‌ی رابطه‌ای نشان می‌دهد. با توجه به اطلاعات بدست آمده از جدول ۲ واحدهای ۳، ۴، ۵، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶ و ۲۲ تحت مدل تجمیع و واحدهای ۳، ۵، ۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۶ و ۲۲ تحت مدل شبکه‌ی متصل کارآ هستند. ستون چهارم به وضوح نشان می‌دهد که کارآیی‌های کلی بدست آمده از مدل شیکه‌ی رابطه‌ای کایو و لی

[۱۴] بین ۰ و ۱ بوده و نیز کمتر یا مساوی با اندازه‌ی کارآیی‌های حاصله از مدل‌های تجمیع و شبکه‌ی متصل می‌باشند زیرا کارآیی کل در این مدل میانگین وزین کارآیی‌های ۳ دوره می‌باشد. نتایج نشان می‌دهند که مدل (۴) در تمییز بین واحدهای کارآ و ناکارآ ناتوان است. جدول ۳ نتایج بکارگیری مدل (۸) را برای داده‌های موجود در جدول ۱ نشان می‌دهد. مقدار بهینه‌ی θ_o^* بهمراه مقدار بهینه‌ی w_{ir}^*ها به ترتیب در ستون‌های دوم تا یازدهم جدول ۳ نشان داده شده‌اند. نتایج ثبت شده در ستون دوم جدول ۳، واحدهای ۳، ۵، ۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۶ و ۲۲ را کارآ گزارش داده و ستون‌های سوم تا یازدهم وجود تعداد وزن‌های صفر قابل تاملی را نشان می‌دهند که حضور این وزن‌ها باعث نادیده انگاشتن تاثیر موثر تمام نسبتها در بدست آوردن یک کارآیی منطقی می‌شوند. برای رفع این مشکل، کران پایینی را برای وزن‌ها تعریف می‌کنیم تا آنها را ملزم به اختیار کردن مقادیر غیرصفر در جواب بهینه کند. در این راستا، با بکار گیری رابطه‌ی (۹) مقدار $\overline{w} = 0.0537$ بدست می‌آید.

حال با اجرای مدل MPR به آنچه مطلوبمان است می‌رسیم. نتایج حاصله در جدول ۴ گزارش شده‌اند.

جدول ۳ مقدار بهینه‌ی تابع هدف، بهمراه مقدار بهینه‌ی وزن‌های حاصل از بکارگیری مدل (۸)

DMUs	θ^*	w_{11}^*	w_{12}^*	w_{13}^*	w_{21}^*	w_{22}^*	w_{23}^*	w_{31}^*	w_{32}^*	w_{33}^*
DMU01	0.9104	0.00	0.31	0.61	0.00	0.00	0.00	0.08	0.00	0.00
DMU02	0.7348	0.00	0.22	0.78	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DMU03	1.0000	0.13	0.73	0.00	0.00	0.00	0.14	0.00	0.00	0.00
DMU04	0.9690	0.00	0.53	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27
DMU05	1.0000	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DMU06	0.7399	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11	0.89	0.00
DMU07	0.4859	0.00	0.26	0.74	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DMU08	0.8056	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.65	0.00	0.35	0.00
DMU09	0.7306	0.00	0.00	0.00	0.00	0.28	0.00	0.00	0.00	0.72
DMU10	0.9375	0.00	0.00	0.25	0.00	0.07	0.25	0.00	0.00	0.42
DMU11	1.0000	0.00	0.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.25	0.00	0.00
DMU12	0.9929	0.06	0.07	0.66	0.00	0.00	0.21	0.00	0.00	0.00
DMU13	0.8346	0.30	0.22	0.48	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DMU14	1.0000	0.69	0.00	0.31	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DMU15	1.0000	0.00	0.11	0.00	0.00	0.00	0.89	0.00	0.00	0.00
DMU16	1.0000	0.00	0.75	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DMU17	0.5480	0.00	0.39	0.44	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DMU18	0.8120	0.08	0.03	0.66	0.00	0.00	0.22	0.00	0.00	0.00
DMU19	0.8461	0.00	0.00	0.76	0.00	0.00	0.18	0.06	0.00	0.00
DMU20	0.6857	0.00	0.00	0.00	0.00	0.29	0.00	0.00	0.49	0.00
DMU21	0.9203	0.40	0.34	0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DMU22	1.0000	0.00	0.00	0.77	0.00	0.00	0.23	0.00	0.00	0.00

جدول ۴. اندازه‌ی کارآیی کلی واحدها با بکارگیری مدل MPR

DMUs	اندازه‌ی کارآیی کلی	اولویت‌بندی
DMU01	0.8592	10
DMU02	0.6396	16
DMU03	0.9782	3
DMU04	0.9097	7
DMU05	1.0000	1
DMU06	0.5822	18
DMU07	0.4395	20
DMU08	0.7298	14
DMU09	0.6462	15
DMU10	0.8415	11
DMU11	0.9587	4
DMU12	0.9162	6
DMU13	0.7440	13
DMU14	0.9004	8
DMU15	0.9971	2
DMU16	1.0000	1
DMU17	0.5101	19
DMU18	0.7393	14
DMU19	0.7715	12
DMU20	0.5829	17
DMU21	0.8606	9
DMU22	0.9167	5

ستون دوم در جدول ۴، واحدهای ۵ و ۱۶ را کارآی کلی و بقیه‌ی واحدها را ناکارآ گزارش می‌دهد. نتایج حاصله از اجرای مدل جز برای واحدهای ۳، ۴، ۵ و ۱۶ بطور قابل توجهی کمتر از اندازه‌های حاصله از مدل (۴) هستند البته واحدهای ۵ و ۱۶ تحت مدل MPR کارآ هستند. در ستون سوم اولویت‌بندی واحدهاآورده شده است که نشان از قدرت تشخیص رویکرد پیشنهادی در نمییز واحدها دارد.

۵. نتیجه‌گیری

با وجود نقاط قوت فراوان مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، گاهی این مدل‌ها سبب طبقه بندی اشتباه واحدهای کارا به عنوان واحدهای نا کارا می‌شوند. هر چند برای رفع این نقطه ضعف راهکارایی متعدد همانند روش‌های دوفازی در مقاله کوپر، سیفورد و همکاران (۲۰۰۲) یا مدل‌های مبتنی بر متغیرهای کمکی و یا مدل SBM در مقاله تون (۲۰۰۱) پیشنهاد شده است. یکی دیگر از ایرادات مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده ها، وجود مفهومی به نام ناکارایی کاذب[3] است. ناکارایی کاذب، که DMU کارآ را به عنوان DMU ناکارا شناسایی می‌کند، مسئله‌ای است که نادیده گرفته شده است. نادیده گرفتن این مساله در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده، ممکن است منجر به بروز برخی تعدیلات غیر ضروری در ورودی‌ها یا خروجی شده و سبب شود که نقاط قوت از دست برود وجود این نقص که منجر به تاثیرات عملی می‌شود ووی، چن، لی و همکاران (۲۰۱۱) به بررسی وشناسایی ناکارایی کاذب به منظور اجتناب از نتایج غیر منطقی، بررسی کردند. نکته جالب توجه در این مقاله، استفاده از مدل‌های ورودی محور تحلیل پوششی داده‌های کسری یا نسبتی به جای مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها بهمراه فرض محدودیت وزن برای شناسایی علل

[3] Psedue Inefficiency

ناکارایی کاذب است . آنها با بررسی مطالعات دیگر نتیجه گرفتند که CCR نه تنها امتیاز کارایی واحد های ناکارا دست کم می‌گیرد، بلکهDMU کارا را ناکارا شناسایی می‌کند. از آنجایی که این اشتباه که از آن به عنوان ناکارایی کاذب یاد کردند، آشکار و قابل روئت نمی باشد، آنها به مقابسه CCR-I بهمراه فرض محدودیت وزن با DEA-R-I بدون فرض محدودیت وزن پرداخته و ثابت کردند نمره کارآیی DEA-R-I همیشه بزرگتر از نمره کارایی CCR-I است. سپس با مقایسه هر دو روش برای ارزیابی عملکرد مراکز پزشکی در تایوان، واحدهایی را که دارای ناکارایی کاذب بودند شناسایی کرده و نشان دادند که علت ناکارایی کاذب تعداد وزن و همچنین فرض محدودیت وزن است. از این رو نشان داده شد که DEA-R-I می‌تواند یک مدل جایگزین برای CCR-I باشد تا از ناکارایی کاذب جلوگیری شود. در این رساله بدنبال ناکارایی کاذب در حالت چند دوره‌ای هستیم. مقاله‌ی دسپیک و همکاران در سال ۲۰۰۷ اولین رویکرد استفاده از داده‌های نسبتی در ادبیات DEA است. از سوی دیگر، بسیاری از مطالعات به بررسی چگونگی اندازه گیری کارآیی مجموعه‌ای از واحدها در یک دوره‌ی زمانی پرداختند. زمانی که بازه زمانی اندازه‌گیری کارآیی چندین دوره را پوشش می‌دهد، بدست آوردن کارآیی کلی واحدها چالشی است که نویسندگان مختلفی به بررسی آن پرداختند. برخی از مجموع داده‌های تمام دوره‌ها برای به دست آوردن کارآیی کلی استفاده کردند و برخی دیگر کارآیی‌های دوره‌ای را محاسبه کرده و میانگین آنها را بعنوان کارآیی کلی در نظر گرفتند که هر کدام از این رویکردها به نوبه‌ی خود دارای کاستی‌هایی است که پیش‌تر بدان پرداخته شد. در پاسخ به ضعف مدل‌های چند دوره‌ای موجود، یک روش مبتنی بر DEA-R پیشنهاد شد تا کارآیی کلی واحدها را با در نظر گرفتن همزمان کارآیی‌های کلی و دوره‌ای تمام واحدها اندازه‌گیری کند. در این مطالعه برای سیستم‌های چند دوره‌ای، DEA-R معمولی برای ترکیب هر دوره بطور اخص در اندازه‌گیری کارآیی کلی اصلاح شد تا بین واحدهای کارآ و ناکارآی کلی تمایز قائل شود. علاوه بر این روش پیشنهادی اولویت‌بندی واحدها را بر اساس اندازه‌های کارآیی کلی آنها فراهم کرد. در نهایت، یک برنامه کاربردی بر روی ۲۲ بانک تجاری تایوانی، عملی بودن و برتری مدل پیشنهادی را نشان داد.

منابع مالی

در طی مطالعه مذکور مبلغ مالی از سوی هیچ موسسه یا ارگانی دریافت نشده است.

تعارض با منافع

بدین وسیله نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد، همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال‌شده را مشاهده و تأیید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله، اثر اصلی آنها بوده، قبلاً چاپ نشده، و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

فهرست منابع

[1] Farrell, M. J. (1957) 'The measurement of productivity efficiency', *Journal of The Royal Statistical Society Series A*: *General*, Vol. 120, No. 3, pp. 253–281.

[2] Charnes, A., Cooper, W. W. and Rhodes, E. (1978) 'Measuring the efficiency of decision making units', *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, pp. 429-444.

[3] Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2002) Data Envelopment Analysis – A comprehensive text with models, *applications, references and DEA-solver software. Massachusetts: Kluwer*, 68–74.

[4] Banker, R. D., Charnes, A. and Cooper, W. W.. (1984) 'Some models estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis', *Management Science*, Vol. 30, pp. 1078-1092.

[5] Paradi, J.C. and Zhu, H. (2013) 'A survey on bank branch efficiency and performance research with data envelopment analysis', *Omega International Journal of Management Science* , Vol. 41 pp. 61–79.

[6] Asmild, M., Bogetoft, P. and Hougaard, J.L (2013) 'Rationalizing inefficiency: staff utilization in branches of a large Canadian bank', *Omega International Journal of Management Science*, Vol. 41, pp. 80–87.

[7] Saljoughian, M., Shirouyehzad, H., Khajeh, E. and Dabestani, R. (2019) 'Evaluating the efficiency of the commercial banks admired in Fortune 500 list; using data envelopment analysis', *International Journal of Productivity and Quality Management*, Vol. 26, No. 1, pp. 58-73

[8] Hwang, S. N., Chen, C. L., Chen, Y., Lee, H. S. and Shen, P. D. (2013) 'Sustainable design performance evaluation with applications in the automobile industry: focusing on inefficiency by undesirable factors', *Omega International Journal of Management Science*, Vol. 41, pp. 553–558.

[9] Chang, S. J., Hsiao, H. C. and Huang, L. H. (2011) 'Taiwan quality indicator project and hospital productivity growth', *Omega International Journal of Management Science* , Vol. 39, pp. 14–22.

[10] Assaf, A. G., Barros, C. and Sellers-Rubio, R. (2011) 'Efficiency determinants in retail stores: A Bayesian framework'. *Omega International Journal of Management Science*, Vol. 9, pp. 283–292.

[11] Nemoto, J. and Goto, M. (1999) 'Dynamic data envelopment analysis: Modeling intertemporal behavior of a firm in the presence of productive inefficiencies', *Economics Letters*, Vol. 64, pp. 51–56.

[12] Kao, C. (2009) 'Efficiency measurement for parallel production systems*', European Journal of Operational Research*, Vol. 196, pp. 1107-1112.

[13] Tone, K., & Tsutsui, M. (2014). 'Dynamic DEA with network structure'. *Omega* , Vol. 42, No, 1, pp 124–131.

[14] Mariz, F. B. A. R., Almeida, M. R. and Aloise, D. (2017) 'A review of Dynamic Data Envelopment Analysis: state of the art and applications', *International Transaction in Operation*

[22] Mozaffari, M. R., Kamyab, P., Jablonsky, J. and Gerami, J. (2014b) 'Cost and revenue efficiency in DEA-R models', *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 78, pp. 188-194.

[23] Mozaffari, M. R., Gerami, J. and Jablonsky, J. (2014a) 'Relationship between DEA models without explicit inputs and DEA models without explicit inputs and DEA-R models', *Central European Journal of Operation Research*, Vol. 22, pp. 1-12.

[24] Mozaffari, M. R., Dadkhah, F., Jablonsky, J. and Wanke, P. F. (2020) 'Finding Efficient surface in DEA-R models', *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 386, pp. 125497.

[25] Olesen, O. B., Petersen, N. C. and Podinovski, V. (2015) 'Efficiency analysis with ratio measures', *European Journal of Operational Research*, Vol. 245, pp. 446-462.

[26] Kamyab, P., Mozaffari, M. R., Gerami, J. and Wankei, P. F. (2021), 'Two-stage incentives system for commercial banks based on centralized resource allocation model in DEA-R', *International Journal of Productivity and Performance Management*, Vol. 70 No. 2, pp. 427-458.

[27] Mozaffari, M. R., Gerami, J., Wanke, P. F., Kamyab, P and Peyvas, M. (2022) 'Ratio-based data envelopment analysis: An interactive approach to identify benchmark', *Results in Control and Optimization*, Vol. 6, 100081.

[28] Park, K. S. and Park, K. (2009) 'Measurement to multipored aggregative efficiency', *European Journal of Operational Research*, Vol. 193, pp. 567–580.

Research, 1-37, DOI: 10.1111/itor.12468.

[15] Kao, C. and Liu, S.T. (2014) 'Multi-period efficiency measurement in data envelopment analysis: The case of Taiwanese Commercial banks', *Omega*, Vol. 47, pp. 90-98.

[16] Wei, X. Y., Jun, Z. H., Kai, C., Xuan, Z. Z. and Tian, C. Y. (2021) 'Efficiency measurement in multi-period network DEA model with feedback', Expert Systems with Applications, Vol. 175, 114815

[17] Despic, O., Despic, M. and Paradi, J. C. (2007) 'DEA-R: Ratio-based comparative efficiency model, its mathematical relation to DEA and its use in applications', *Journal of Productivity Analysis*, Vol. 28, pp. 33–44.

[18] Wei, C. K., Chen, L. C., Li, R. K. and Tsai, C. H. (2011a) 'Using the DEA-R model in the hospital industry to study the pseudo-inefficiency', *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, pp. 2172-2176.

[19] Wei, C. K., Chen, L. C., Li, R. K. and Tsai, C. H. (2011b) 'Exploration of efficiency underestimation of CCR model: Based on medical sectors with DEA-R model', *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, pp. 3155–3160.

[20] Wei, C. K., Chen, L. C., Li, R. K. and Tsai, C. H. (2011c) 'A study of developing an input- oriented ratio-based comparative efficiency model', *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, pp. 2473–2477.

[21] Liu, W. B., Zhang, D. Q., Meng, W., Li, X. X. and Xu, F. A. (2011) 'Study of DEA models without explicit inputs', *Omega*, Vol. 39, pp. 472–480.

[29] Olesen, O. B., Petersen, N. C. and Podinovski, V. (2017) 'Efficiency measures and computational approaches for data envelopment analysis models with ratio inputs and outputs', *European Journal of Operational Research*, Vol. 261, pp. 640–655.

[30] Färe, R. and Grosskopf, S. (2000) 'Network DEA', Socio-Economic Planning Sciences, Vol. 34, pp. 35–49.