دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره چهلم، بهمن و اسفند ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

طول فیبوناتچی بعضی زیرگروه‌های S_n

زهرا شفیعی کلایه[۱]، محمد مقاصدی[۲*]

(۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران
(۲) دانشیار، گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۲۸

چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی و $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ یک مولد مرتب آن باشد. طول فیبوناتچی G متناظر با مجموعه مولد A، که با $\mathrm{LEN}_A(G)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از کوچکترین عدد صحیح مثبتی مانند ℓ، به‌طوری که برای دنباله فیبوناتچی، $x_1=a_1, x_2=a_2, \ldots, x_n=a_n$ و $x_i=\prod_{j=1}^{n} x_{j+i-n-1}$، $i\geq n+1$ از اعضای G، داشته باشیم $x_{\ell+k}=a_k$ برای $k=1,\ldots,n$. در این مقاله، طول فیبوناتچی ۲-سیلو زیرگروه‌های گروه متقارن S_n را محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: طول فیبوناتچی، دنباله فیبوناتچی،گروه متناهی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: maghasedi@kiau.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی و $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ یک مجموعه‌ی مولد مرتب آن باشد. طول فیبوناتچی G متناظر با مجموعه مولد A که با $\mathrm{LEN}_A(G)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از کوچکترین عدد صحیح مثبتی مانند ℓ به‌طوری‌که برای دنباله فیبوناتچی $x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_n=a_n$ و $x_i=\prod_{j=1}^{n} x_{j+i-n-1}$، $i\geq n+1$ و از اعضای G داشته باشیم $x_{\ell+k}=a_k$، برای هر $k=1,\dots,n$.

ایده‌ی تشکیل دنباله‌ی بازگشتی از عناصر یک ساختار جبری اولین بار در [۱۱] معرفی شده است. این ایده به‌طور دقیق‌تر در [۱، ۲، ۴، ۹،۱۰] توسعه پیدا کرده است. به عنوان کاربردی از این ایده، در سال ۲۰۰۴ طول فیبوناتچی و طول اساسی فیبوناتچی گروه‌های دو وجهی، گروه‌های کواترنیون، و گروه‌های ساده از مرتبه‌ی کمتراز 10^5 و گروه‌های فوق دوری محاسبه شده است[5].

فرض کنید G یک گروه و A یک مجموعه مولد برای آن باشد. برای هر $g\in G$، بدیهی است که A^g $\left(A^g=\{g^{-1}ag \mid a\in A\}\right)$ یک مجموعه مولد برای G است. و به علاوه $L_A(G)=L_{A^g}(G)$.

در این مقاله با در نظر گرفتن یک مجموعه مولد مناسب طول فیبوناتچی ۲- سیلو زیرگروه‌های S_n را محاسبه می کنیم. همچنین، فرمول‌های صریحی برای طول فیبوناتچی ۲- سیلو زیرگروه‌ها در بعضی از موارد ارائه می‌کنیم.

بنابر قضایای مقدماتی نظریه گروه ها هر دو p– سیلو زیر گروه یک گروه مزدوج هستند.بنابراین با محاسبه طول فیبوناتچی یکی طول فیبوناتچی همگی بدست می آید.از نماد $\mathrm{H_n}$ برای نمایش ۲- سیلو زیر گروه $\mathrm{S_n}$ استفاده خواهیم کرد.

۲- تعیین طول فیبوناتچی H_n

فرض کنید $n\geq 4$باشد، H_n را ۲-سیلو زیرگروه، گروه متقارن S_n در نظر می‌گیریم.

ابتدا تعریف زیر را داریم:

تعریف ۱-۱. برای عدد صحیح و مثبت n و عدد اول p، $\alpha_p(n)$، را بزرگترین توان p در نظر می‌گیریم که $n!$ را عاد می‌کند. به سادگی دیده می‌شود که:

$$\alpha_p(n)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right],$$

که در آن $[x]$ بزرگترین عدد صحیح نا بیشتر از x است و همچنین برای مقادیر زوج n، $\alpha_2(n)=\alpha_2(n+1)$. بنابراین، برای هر n زوج که $n\geq 4$ داریم $|H_n|=2^{\alpha_2(n)}$. در نتیجه $H_n\cong H_{n+1}$.

تعریف ۱-۲. برای عدد صحیح و مثبت n که $n\geq 4$ و $i,j,k\in\{1,\dots,n\}$ جایگشت $\sigma_{i,j}$ از گروه S_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_{i,j}(k)=\begin{cases} k, & i>j \ or\ i=j\ , \\ i+j-k, & i\leq k<j \ or\ i<k\leq j\ , \\ k, & j<k \ or\ k<i\ , \end{cases}$$

به وضوح دیده می‌شود که $\sigma_{i,j}$ برای هر i و j، یک جایگشت مرتبه دوم است. نماد $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ را برای k-دورها در S_n استفاده می‌کنیم.

در این مقاله برای H_n مجموعه مولدمناسبی پیدا می‌کنیم و طول فیبوناتچی آن را تعیین می‌کنیم.

ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱-۳. برای هر عددصحیح مثبت و زوج n که $n\geq 8$، $H_n=\langle X_n\rangle$، که

آ) $X_8=\{(1,2),(3,4),(5,6),(7,8),(1,3)(2,4),$
$(5,7),(6,8),(1,5)(2,6),(3,7)(4,8)\},$

ب) برای $n \ge 10$، $X_n = X_{n-2} \cup A$ که $A=\{y_1,y_2,\dots,y_l\}$ ، $l = \alpha_2(n) - \alpha_2(n-2)$ و برای $1 \le i \le l$

$$y_i = (n-2^i+1, n-2^{i-1}+1)\,(n-2^i+2, n-2^{i-1}+2)\cdots(n-2^{i-1}, n).$$

اثبات. به به استقرا روی n ثابت می‌شود. ■

لم ۱-۴. برای nهای زوج که $n \ge 8$، $|X_n| = \alpha_2(n)$.

اثبات. برای هر $n \ge 10$ و زوج، فرض کنیم $l = \alpha_2(n) - \alpha_2(n-2)$. به سادگی دیده می‌شود که $\alpha_2(n) = \alpha_2(n-2) + l$.

برای $n=8$، داریم، $|X_8| = \alpha_2(8) = 7$ و برای هر $n \ge 10$، با توجه به لم ۱-۳ داریم:

$$|X_n| = |X_{n-2}| + l = \alpha_2(n-2) + l = \alpha_2(n).$$

قضیه ۱-۵. فرض کنید X_n مجموعه ی مولدهای ۲- سیلوزیرگروه‌های H_n در لم ۱-۳ باشد، در اینصورت:

آ) برای nهای زوج:

$$LEN(H_n) = LEN(H_{n+1}) = \alpha_2(n) + 1,\ n \ge 4\ ؛$$

ب) برای هر $m \ge 3$،

$$LEN(H_{2^m}) = LEN(H_{2^m+1}) = 2^m + 1$$

و

$$LEN(H_{2^m+2}) = 2^m + 2\ .$$

اثبات. الف) طبق تعریف $\alpha_2(n)$، داریم $LEN(H_n) = LEN(H_{n+1})$. با توجه به لم ۱-۴، می‌توان فرض کرد $H_n = \langle X_n \rangle$، که $X_n = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha_2(n)}\}$ دنباله‌ی فیبوناتچی $\{x_i\}$ از H_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_{\alpha_2(n)} = s_{\alpha_2(n)}$$

$$x_k = x_{k-\alpha_2(n)} \cdot x_{k-\alpha_2(n)+1} \cdots x_{k-1}, \quad k \ge \alpha_2(n)+1$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که $x_{\alpha_2(n)+1}$ یک عضو از مرتبه‌ی ۲ در H_n است. فرض کنید،

$$n = 2^k + 2^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 2^2 a_2 + 2a_1$$

که $a_i \in \{0,1\}$، و فرض کنید،

$$l_i = \begin{cases} 0, & if\ \ a_i = 0 \\ 2^i, & if\ \ a_i = 1 \end{cases}$$

برای $1 \le i \le k-1$.ادعا می کنیم:

$$x_{\alpha_2(n)+1} = \sigma_{1,2^k} \cdot \sigma_{2^k+l_{k-1}+1,\, 2^k+l_k} \cdots \sigma_{2^k+l_{k-1}+\cdots+l_2+1,\, 2^k+\cdots+l_2+l_1}. \qquad (1)$$

به استقرا روی n مطلب راثابت می‌کنیم.

فرض کنیم، $z_n = x_{\alpha_2(n)+1}$ اگر $n=8$، آنگاه

$$z_8 = \sigma_{1,8} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین (۱) برقرار است. اکنون فرض کنیم فرض استقرا، برقرار باشد.و $l = \alpha_2(n) - \alpha_2(n-2)$.اگر $2^l = n$ آنگاه به وضوح $z_n = \sigma_{1,2^l}$و مطلب تمام است.پس فرض کنیم $2^l \ne n$ و:

$$z_n = z_{n-2}(n-1,n)(n-2,n-1)(n-3,n)\dots(n-2^l+1, n-2^{l-1}+1)\dots(n-2^{l-1}, n).$$

حال، با توجه به تعریف l و فرض استقراء z_n را می‌توان به صورت $z_n = \theta\varphi\psi$ تجزیه کرد. که،

$$\theta = \sigma_{1,2^k} \cdot \sigma_{2^k+1,\, 2^k+l_{k-1}} \cdots \sigma_{-,\, n-2^l}$$

$$\varphi = \sigma_{n-2^l+1,\, -} \cdots \sigma_{-,\, n-2}$$

$$\psi = (n-1,n) \times (n-3,n-1)(n-2,n) \times \cdots \times \theta_1.$$

که

$$\theta_1 = (n-2^l+1, n-2^{t-1}+1)(n-2^l+2, n-2^{l-1}+2)\cdots(n-2^{l-1}, n).$$

اکنون به سادگی داریم: $\varphi\psi = \sigma_{n-2^l+1,\, n}$.

از آنجایی که در (۱) جایگشت ها دو به دو مجزا هستند پس $z_n^2 = 1$. یعنی اینکه $x^2_{\alpha_2(n)} = 1$.اینک داریم:

$$x_{\alpha_2(n)+2} = x_2 x_3 \dots x_{\alpha_2(n)} \cdot x_{\alpha_2(n)+1} = x_1 z_n z_n = x_1,$$

$$
\begin{aligned}
&x_{\alpha_2(n)+3} = x_3x_4\ldots x_{\alpha_2(n)+1}\cdot x_{\alpha_2(n)+2} = x_2x_1z_nz_nx_1 = x_2,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{\alpha_2(n)+\alpha_2(n)+1} &= x_{\alpha_2(n)+1}x_{\alpha_2(n)+2}\ldots x_{2\alpha_2(n)}\\
&= z_nx_1\ldots x_{\alpha_2(n)-1} = z_n^2x_{\alpha_2(n)} = x_{\alpha_2(n)}.
\end{aligned}
$$

و اثبات (آ) کامل می‌شود. (ب) هم مشابه (آ) اثبات می‌شود. فقط کافی است $n = 2^m + 3$ ، $n = 2^m + 1$ و $n = 2^m$ قرار دهیم.

فهرست منابع

[1] H. Aydin, R. Dikici, and C. G. Smith, (1993). "Wall and Winson revisited", In Applications of Fibonacci Numbers, 5.

[2] H. Aydin, and C. G. Smith, (1994). "It Finite p-quotients of some cyclically presented groups", J. London Math. Soc, 49.

[3] Q. J. Brinson, (1992). "Complete Fibonacci sequences in finite fields", Fibonnaci Quarterly, 30, 295-304.

[4] C. M. Compbell, H. Doostie and E. F. Robertson, (1990). "Fibonacci length of generating pairs in groups", In Applications of Fibonacci Numbers, 3.

[5] P. P. Campbell, H. Doostie and E. F. Robertson, (2004). "On the Fibonacci length of dihedral groups", In Applications of Fibonacci Numbers, 9.

[6] P. P. Campbell, H. Doostie and E. F. Robertson, (2004). "Fibonacci length for certain metacyclic groups", Algebra Colloquium, 11:2.

[7] H. Doostie and C. M. Campbell, (2000). "Fibonacci length of automorphism groups involving Tribonacci numbers", Vietnam J. of Math., 28:1.

[8] H. Doostie and R. Golamie, (2000). "Computing on the Fibonacci length of finite groups". Internat. J. Appll. Math. 4:2.

[9] H. Doostie, M. Maghasedi. (2005) "Fibonacci length of direct products of groups,"Vietnam J. of Math., 33 (2), 189-197.

[10] GAP, (2002). "GAP-groups, Algorithms and Programming, version 4.3, Aachen", St-Andrews.

[11] D. D. Wall, (1960). "Fibonacci series modulo n ", Amer. Math. Montly, 67.

[12] H. J. Wilcox, (1986). "Fibonacci sequences of period n in groups", Fibonacci Quarterly, 24