دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

ابرکلاف‌های جهانی

محمدجواد افشاری[۱*]، سعاد ورسایی[۲]

(۱و۲) گروه ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۲۲

چکیده

در این مقاله ابتدا یک نمای کلی از ساختار منیفلد گراسمن (گراسمنین) معمولی و نحوه ساخت منیفلد گراسمن جهانی با استفاده از نگاشت‌ها ارائه می‌شود. همچنین توپولوژی فضای زمینه و ساختار بافه‌ای آن در یک قضیه معرفی می‌گردد. سپس وارد مبحث ابرهندسه شده و نوع جدیدی از ابرگراسمنین با به‌کار گرفتن اینولوشن فرد در ابرفضای حلقه‌ئی و چسباندن ابردامنه‌ها به هم ساخته می‌شود. در ادامه به طریقی مشابه حالت معمولی، ابرگراسمنین‌های بی‌نهایت‌بعدی و ابرکلاف برداری طبیعی روی آن در ابرهندسه معرفی شده‌اند. در اینجا ابزارهای ما به طور عمده شامل جبر چندخطی میان ابرماتریس‌ها و نگاشت‌های القا شده توسط آن‌ها، حد مستقیم در توپولوژی فضاهای زمینه و حد وارون در بافه ساختاری فضاهاست. در پایان نشان می‌دهیم ابرکلاف به‌دست آمده یک عضو جهانی رسته ابرکلاف‌های برداری است؛ ساختارهایی که در رده‌بندی ابرکلاف‌های برداری به کار رفته و در تناظر با رده‌بندی هموتوپی روی ابرمنیفلدها قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: ν-گراسمنین، ابرکلاف برداری، برگردان، رده‌بندی هموتوپی.

* عهده‌دار مکاتبات:
Email:afshari.mj@iasbs.ac.ir

۱- مقدمه

منظور از کلاف جهانی γ_k^∞، کلاف برداری طبیعی روی گراسمنین بی‌نهایت بعدی Gr_k^∞ است. نشان داده می‌شود هر کلاف برداری مانند E از رتبه k روی یک منیفلد فشرده مانند B، با برگردان کلاف طبیعی γ_k^∞ تحت یک نگاشت مناسب مانند $f: B \to Gr_k^\infty$ یکریخت است. یعنی

$$E \quad f\ (\gamma_k^\infty).$$

همچنین نشان داده می‌شود که این نگاشت با تقریب هموتوپی یگانه است. درنتیجه یک تناظر دوسویی به صورت زیر وجود دارد

$$Vect_k(B) \quad [B, Gr_k^\infty]$$

که در آن منظور از $Vect_k(B)$ مجموعه کلاس‌های یکریختی کلاف‌های برداری از رتبه k با پایه B و منظور از $[B, Gr_k^\infty]$ مجموعه کلاس‌های هموتوپی نگاشت‌های $B \to Gr_k$ است. به این ترتیب می‌توان رسته کلاف‌های برداری را رده‌بندی نمود [۱]. به این دلیل منیفلد گراسمن بی‌نهایت بعدی را فضای رده‌بندی کننده، و کلاف برداری طبیعی روی آن را کلاف جهانی می‌نامند. به کلاس این نگاشت‌ها، ناورداهایی ازکلاس‌های کوهمولوژی روی B معروف به کلاس‌های مشخصه منتسب می‌شوند. درحقیقت همه کلاس‌های مشخصه از کلاس‌های کوهمولوژی فضاهای Gr_k به دست می‌آیند [۲]. به طور کلی این مطلب برای کلاف‌های برداری با فضای پایه پیرافشرده[۲] و درنتیجه برای هر کلاف برداری که فضای پایه آن یک منیفلد است نیز صادق است (زیرا فضاهای فشرده موضعی و شمارای دوم، پیرافشرده‌اند).

در مورد ابرکلاف‌های برداری[۳] نیز می‌توان این مطلب را تعمیم داد. از آنجاکه تعمیم‌های ارائه شده از منیفلدهای گراسمن در ابرهندسه، اطلاعات چندانی راجع به ابرساختار به دست نداده و کارایی لازم را در رده‌بندی هموتوپی ابرکلاف‌های برداری ندارند، تعمیم‌های جدیدی تحت عنوان ν-گراسمنین‌ها ابداع شده‌اند [۳]. درمرجع اخیر نشان داده شده است که هر ابرکلاف برداری از بعد متناهی، با برگردان ابرکلاف برداری طبیعی روی ν-گراسمنین با بعد به اندازه کافی بزرگ تحت یک نگاشت مناسب یکریخت است. در این مقاله با کمک مفهوم ابرکلاف‌های جهانی، بیان معادلی برای این گزاره می‌یابیم.

در بخش اول، منیفلدهای گراسمن با بعد بی‌نهایت را به عنوان فضاهای حلقه‌ئی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور فضای زمینه گراسمنین را به کمک حد مستقیم و ساختار بافه‌ای آن را به کمک حد وارون به دست می‌آوریم. در بخش دوم، ساختار بافه‌ای (فضای حلقه‌ئی) ν-گراسمنین بی‌نهایت بعدی ${}_\nu Gr_{k|l}^{\infty|\infty}$ به کمک حد وارون [۴] تعریف می‌شود. در بخش سوم، ابرکلاف برداری طبیعی روی ${}_\nu Gr_{k|l}^{\infty|\infty}$ ساخته می‌شود. در بخش آخر نشان می‌دهیم این ابرکلاف، جهانی است.

۲- منیفلد گراسمن Gr_k^∞

منیفلد گراسمن Gr_k^n، فضایی فشرده شامل تمام صفحات k-بعدی در n است. هرکدام از این صفحات k-بعدی را می‌توان توسط یک پایه k-تایی مستقل خطی مانند $\{v_1, \dots, v_k\}$ نمایش داد. هر بردار v_i به صورت n-تایی مرتب

$$v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$$

است. به کمک نگاشت شمول $\iota: \ ^n \quad ^{n+1}$ می‌توان این بردارها را به صورت $n+1$-تایی‌های مرتب

$$\iota(v_i) = (v_{i1}, \dots, v_{in}, 0)$$

---
[۲] Paracompact

[۳] Super Vector Bundles

در $^{n+1}$ نشاند. درنتیجه نگاشتی مانند

$\iota: Gr_k^n \qquad Gr_k^{n+1}$

القا می‌شود که برای سادگی آن را نیز با ι نشان داده‌ایم. تحت این نگاشت می‌توان Gr_k^n را به عنوان زیرفضایی از Gr_k^{n+1} درنظر گرفت. در اینجا منظور از نگاشت مختصاتی استاندارد گراسمنین، تعریف منین [[۵]، ص.۹] می‌باشد. در این‌صورت اگر $(V_I', x_1, \dots, x_{p+k})$ به‌ازای $p = k(n \quad k)$، نقشه مختصاتی استاندارد Gr_k^{n+1} نظیر اندیس چندگانه $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ باشد، آنگاه $(V_I, x_1, \dots, x_p)$ به ازای $\iota^{-1}(V_I') = V_I$، نقشه مختصاتی استاندارد Gr_k^n است.

اجتماع همه Gr_k^nها به ازای k ثابت، منیفلد گراسمن با بعد بی‌نهایت را تشکیل می‌دهد که به کمک حد مستقیم، یک توپولوژی استقرایی به آن نسبت داده می‌شود:

$$Gr_k^\infty = \bigcup_{k \leq n} Gr_k^n.$$

بدین ترتیب هر زیرمجموعه از Gr_k^∞ را باز گویند هرگاه اشتراک آن با هر Gr_k^n مجموعه‌ای باز باشد. به طورمعادل می‌توان برای تعیین توپولوژی این مجموعه، دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز مانند $U_i \subseteq Gr_k^{k+i}$ را به ازای یک عدد طبیعی L به صورت $(U_i)_{i>L}$ اختیار نمود که به ازای هر i داشته باشیم:

$$\iota(U_i) \subseteq U_{i+1}.$$

در این‌صورت روی اجتماع مجزای خانواده U_i ها، هم‌ارزی $\sim$ با ضابطه

$$a \sim b \leftrightarrow \iota(a) = b,$$

را درنظر بگیرید که در آن $a \in U_i$ و $b \in U_{i+1}$ است. $U_{(U_i)}^\infty := \frac{U_i}{\sim}$ را مجموعه‌ای باز در Gr_k^∞ تعریف نموده و به اختصار با U^∞ نشان می‌دهیم.

این مجموعه‌ها پایه ای برای توپولوژی Gr_k^∞ تشکیل می‌دهند.

برای سادگی، بافه ساختاری منیفلد گراسمن Gr_k^{k+i} را با $\mathcal{O}_i$ نشان می‌دهیم.

حال می‌توان به کمک حد وارون، یک ساختار بافه‌ای هموار بر Gr_k^∞ قرار داد که آن را با $\overleftarrow{\mathcal{O}}$ نشان می‌دهیم. درواقع برش f بر مجموعه باز U^∞ به کمک قاعده زیر تعریف می‌شود:

$$f \epsilon \overleftarrow{\mathcal{O}}\,(U^\infty) \qquad f = (f_i)_i,$$
$$f_i \epsilon \mathcal{O}_i(U_i),\ \iota_i\,(f_{i+1}) = f_i,$$

که در آن، همریختی‌های $\iota_i: \mathcal{O}_{i+1} \to \mathcal{O}_i$ توسط نگاشت‌های $\iota_i: Gr_k^{k+i} \to Gr_k^{k+i+1}$ بین بافه‌های دو منیفلد القا شده‌اند. تحت این نگاشت، بافه ساختاری $\mathcal{O}_i$ یک ساختار $\mathcal{O}_{i+1}$- مدولی نیز دارد.

قضیه: $\overleftarrow{\mathcal{O}}$ یک بافه است.

برهان: به‌ازای هر دو مجموعه باز مانند U^∞ و V^∞ داریم

$$U^\infty \subseteq V^\infty \qquad U_i \subseteq V_i,$$

به ازای یک عدد طبیعی L و هر i، $i > L$. در این صورت می‌توان همریختی تحدید را به شکل زیر تعریف نمود:

$$r_{(U_i)(V_i)}(f) := (r_{U_i V_i}(f_i))_i, \quad i > L$$

با این تعریف به سادگی می‌توان دید که به ازای هر سه مجموعه باز مانند $U^\infty \subseteq V^\infty \subseteq W^\infty$ روابط زیر برقرار است:

$$r_{U^\infty V^\infty} \circ r_{V^\infty W^\infty} = r_{U^\infty W^\infty},$$
$$r_{U^\infty U^\infty} = id_{\mathcal{O}_{U^\infty}^\infty}.$$

بنابراین $\overleftarrow{\mathcal{O}}$ یک پیش‌بافه است.

برای بررسی بافه بودن $\overleftarrow{\mathcal{O}}$ کافی است خواص موضعی و سرتاسری بافه‌ها را بررسی کنیم. دو برش f و g بر Gr_k^{∞} را درنظر بگیرید که به‌ازای هر نقطه دلخواه از فضای زمینه، در یک همسایگی مانند U^{∞} از آن نقطه با هم برابر باشند. می‌دانیم این برش‌ها به شکل دنباله‌ای از برش‌ها به صورت $f = (f_i)$ و $g = (g_i)$ می‌باشند، درنتیجه به ازای هر i و هر نقطه دلخواه از Gr_k^{k+i}، برش‌های f_i و g_i در یک همسایگی U_i از آن نقطه با هم برابرند. ازآنجاکه Gr_k^{k+i} یک بافه است، طبق خاصیت موضعی بافه، برش‌های f_i و g_i بر کل Gr_k^{k+i} با هم برابرند. در نتیجه f و g بر کل Gr_k^{∞} با هم برابرند.

حال پوشش باز $\{U_\alpha^{\infty}\}$ را برای Gr_k^{∞} و برش‌های $f_\alpha \in \overleftarrow{\mathcal{O}}_\alpha$ را در نظر بگیرید به طوری که به ازای هر α و β داشته باشیم:

$$r_{\alpha\beta,\beta}(f_\beta) = r_{\alpha\beta,\alpha}(f_\alpha),$$

که در آن، همریختی‌های تحدید $r_{(U_\alpha^{\infty} \cap U_\beta^{\infty})U_\beta^{\infty}}$ را به اختصار با $r_{\alpha\beta,\beta}$ نشان داده‌ایم. از آنجا که هر f_α به صورت دنباله‌ای از برش‌ها مانند $f_{\alpha i}$ می‌باشد و نیز به دلیل بافه بودن هر $\mathcal{O}_i$، به‌ازای هر i برشی مانند f_i بر کل Gr_k^{k+i} وجود دارد به طوری که تحدید آن به $U_{\alpha i}$ برابر با $f_{\alpha i}$ است، به عبارت دیگر $r_{\alpha i}(f_i) = f_{\alpha i}$. بنابراین $f = (f_i)_i$ برشی است که به ازای هر α برای آن داریم

$$r_\alpha(f) = f_\alpha,$$

که نشان می‌دهد خاصیت سرتاسری برای پیش‌بافه $\overleftarrow{\mathcal{O}}$ برقرار است.

با توجه به ساختاری که تعریف شد به طور طبیعی یک همریختی از گراسمنین با بعد متناهی به گراسمنین با بعد بی‌نهایت به این صورت القا می‌شود که هر دنباله ازبرش‌ها به صورت (f_j) را به مولفه i ام آن یعنی f_i می‌برد:

$$p_i : \overleftarrow{\mathcal{O}} \qquad \mathcal{O}_i, \quad p_i((f_j)) = f_i$$

تحت این نگاشت، بافه ساختاری $\mathcal{O}_i$ یک ساختار $\overleftarrow{\mathcal{O}}$-مدولی نیز دارد.

۳- ν-گراسمنین ${}_{\nu}Gr_{k|l}^{\infty|\infty}$

در [۳] نشان داده شده است که ابرفضاهای تصویری تعمیم مناسبی برای فضاهای تصویری در ابرهندسه نیستند. در واقع در ساخت این ابرفضاها عناصر فرد نقش اساسی ندارند. جهت رفع این نقیصه تعمیمی به نام ν-گراسمنین در مرجع اخیر ساخته می‌شود که در این بخش به اختصار توضیح می‌دهیم.

منظور از یک ν-*دامنه* از بعد $p|q$، ابرفضای حلقه‌ئی

$$^{p|q} := (\quad ^{p}, \mathcal{O}), \quad \mathcal{O} = \mathbf{C}^{\infty}{}_{p} \qquad \wedge \quad ^{q},$$
$$p, q \in$$

به همراه یک اینولوشن فرد مانند ν است، یعنی

$$\nu : \mathcal{O} \qquad \mathcal{O}, \qquad \nu^2 = id,$$
$$\nu(\mathcal{O}^{ev}) \subseteq \mathcal{O}^{odd},\ \nu(\mathcal{O}^{odd}) \subseteq \mathcal{O}^{ev}.$$

این عملگر، یک همریختی بین $\mathbf{C}^{\infty}{}_{p}$-مدول‌ها نیز می‌باشد.

منظور از اندیس-$k|l$تایی I ، دنباله صعودی $k + l$ عضوی از $\{1, \dots, m+n\}$ است. به ازای هرکدام از این اندیس‌ها می‌توان ابرماتریس *شبه واحد* id_I از ابعاد $(k|l) \times (k|l)$ را به عنوان زیرماتریس یک ابرماتریس از ابعاد $(k|l) \times (m|n)$ ساخت که در درایه‌های روی قطر آن عدد ۱ و یا عبارت صوری 1ν به عنوان یکه فرد و در سایر درایه‌ها عدد صفر قرار گیرد. در اینجا به ازای هر زیرمجموعه باز مانند U از ^{p} و هر $z \in \mathcal{O}(U)$ قواعد زیر پذیرفته شده‌اند:

$$z.(1\nu) := \nu(z), \qquad (1\nu)(1\nu) = 1.$$

به این ترتیب ابرماتریس شبه همانی id_I در رابطه

$$id_I.id_I = id.$$
$$(M_J(A^I).id_J)^{-1}.A^I = A^J. \qquad (1)$$

صدق می‌کند.

به عنوان مثال $_\nu Gr_{2|2}(4|3)$ را به همراه ۲|۲ اندیس $I=\{1,3,4,6\}$ در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{matrix} 1 & x_1 & 0 & 0 & ; & \nu x_3 & 0 & e_5 \\ 0 & x_2 & 1 & 0 & ; & \nu x_4 & 0 & e_6 \\ & & & & & & & \\ 0 & e_1 & 0 & 1\nu & ; & \nu e_3 & 0 & x_5 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & ; & \nu e_4 & 1 & x_6 \end{matrix}.$$

ستون‌هایی از A^I که شماره آن‌ها در I قرار دارد، ابرماتریس شبه همانی زیر را تشکیل می‌دهند:

$$M_I(A^I) := id_I = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ; & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 1\nu & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ; & 1 \end{matrix}.$$

به ازای هر جفت اندیس چندگانه مانند I و J، مجموعه V_{IJ} را بزرگترین زیرمجموعه از V_I تعریف می‌کنیم که $M_J(A^I).id_J$ بر آن وارون‌پذیر باشد که در آن منظور از $M_J(A^I)$ زیرماتریس A^I متشکل از ستون‌هایی با شماره‌های واقع در اندیس J است.

هرگاه ν-*دامنه‌های* $p|q$ به‌ازای اعداد طبیعی

$$p = k(m \quad k) + l(n \quad l),$$
$$q = k(n \quad l) + l(m \quad k)$$

را توسط اندیس‌های چندگانه I به‌شکل $(V_I,\mathcal{G}_I)$ برچسب گذاری نموده و به شیوه‌ای معین به هم بچسبانیم، ابرفضای حاصل را ν-گراسمنین (ν-منیفلد گراسمن) حقیقی

$$_\nu Gr^{m|n}_{k|l} := (Gr^m_k \times Gr^n_l, \mathcal{G})$$

می‌نامیم. برای این کار، مولدهای زوج $x_1,\dots,x_p$ و فرد $e_1,\dots,e_q$ هر ν-*دامنه* به ترتیب در ستون‌های ابرماتریس A^I از سمت چپ و از بالا به پایین با قاعده مناسب چیده می‌شوند:

$$A^I \quad \begin{bmatrix} [A]_{k\times m} & ; & [B]_{k\times n} \\ & & \\ [C]_{l\times m} & ; & [D]_{l\times n} \end{bmatrix}.$$

برای اطلاعات بیشتر به [3] مراجعه کنید. دامنه‌های V_I و V_J اشتراک غیرتهی دارند هرگاه ابرماتریس $M_J(A^I).id_J$ وارون‌پذیر باشد. نگاشت گذر ϕ_{IJ} از دستگاه مختصات V_J به دستگاه مختصات V_I به کمک متناظر ساختن درایه‌های نظیر در دو طرف تساوی ماتریسی زیر به‌دست می‌آید:

درنتیجه یکریختی‌هایی به صورت

$$\varphi_{IJ}: \mathcal{G}_J|_{V_{JI}} \qquad \mathcal{G}_I|_{V_{IJ}}$$

القا می‌شود (مراجعه شود به مقاله [3]).

برای ساختن ν-گراسمنین

$$_\nu Gr^{\infty|\infty}_{k|l} := (Gr^\infty_k \times Gr^\infty_l, \overleftarrow{\mathcal{G}})$$

می‌توان مشابه قسمت قبل، ابتدا فضای زمینه آن یعنی $Gr^\infty_k \times Gr^\infty_l$ را به کمک حد مستقیم و سپس ساختار بافه‌ای آن را به کمک حد وارون مشخص نمود. بدین منظور لازم است همریختی طبیعی بین دو ν-گراسمنین مانند $_\nu Gr^{m|n}_{k|l}$ و $_\nu Gr^{m'|n'}_{k|l}$ به ازای $m \le m'$ و $n \le n'$ مورد بررسی قرار گیرد.

اولا ازآنجاکه ساختار فضاهای زمینه به صورت حاصلضربی است، نگاشت

$$\iota: Gr^m_k \times Gr^n_l \to Gr^{m'}_k \times Gr^{n'}_l$$

بین آن‌ها برقرار است.

ثانیا، توجه نمایید که ν-گراسمنین $_\nu Gr^{m'|n'}_{k|l}$ از به‌هم چسباندن ν-*دامنه‌های* استاندارد $(V'_I,\mathcal{G}'_I)$ از بعد $p'|q'$ به دست می‌آید که درآن

$$p' = p + k(m' \quad m) + l(n' \quad n),$$
$$q' = q + k(n' \quad n) + l(m' \quad m).$$

مشابه حالت معمولی، اگر به ازای اندیس چندگانه دلخواه I مجموعه $V'_I \cap \iota(Gr_k^m \times Gr_l^n)$ ناتهی باشد، آنگاه مجموعه $\iota^{-1}(V'_I)$ با V_I برابر خواهد بود. دراینصورت تناظر

$$\mathcal{G}'_I(V'_I) \qquad \mathcal{G}_I(V_I),$$
$$\text{for } I \subseteq \{1,\dots,m\} \cup \{m'+1,\dots,m'+n\},$$
$$\begin{cases} x_i \quad\; x_i, & i = 1, \quad ,p, \\ e_i \quad\; e_i, & i = 1, \quad ,q, \\ \text{سایرمولدها} \quad 0, & \end{cases}$$
$$\mathcal{G}'_I(V'_I) \qquad 0,$$
$$\text{for } I \quad \{1,\dots,m\} \cup \{m'+1,\dots,m'+n\},$$

یک همریختی طبیعی به صورت

$$\iota_I : \mathcal{G}'_I(V'_{IJ}) \qquad \mathcal{G}_I|(V_{IJ}) \tag{2}$$

القا می‌کند. تحت این نگاشت، بافه ساختاری $\mathcal{G}_I$ یک ساختار $\mathcal{G}'_I$-مدولی نیز دارد.

دیده می‌شود که نمودار زیر متشکل از این همریختی با نگاشت‌های چسب بین $\mathcal{V}$-دامنه‌ها به ازای اندیس‌های چندگانه دلخواه و مجاز مانند I و J جابجایی است؛

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}'_J|(V'_{JI}) & \overset{\iota_J}{} & \mathcal{G}_J|(V_{JI}) \\ \varphi'_{IJ}\downarrow & & \varphi_{IJ}\downarrow \\ \mathcal{G}'_I|(V'_{IJ}) & \overset{\iota_I}{} & \mathcal{G}_I|(V_{IJ}) \end{array}$$

زیرا نگاشت‌های چسب φ_{IJ} و φ'_{IJ} دقیقا به کمک ابرماتریس‌های مربعی وارون‌پذیر $M_J(A^I).id_J$ و $M'_J(A'^I).id_J$ از ابعاد $k|l \times k|l$ ساخته می‌شوند که با هم برابرند و از طرف دیگر ترتیب مولدهای زوج $x_1,\dots,x_p$ و فرد $e_1,\dots,e_q$ در ستون‌های نظیر در دو ابرماتریس نیز تغییری نمی‌کند.

درواقع در ابرماتریس نمایش $\mathcal{V}$-*دامنه* $\mathcal{G}'_J|_{V'_{JI}}$، ستون‌هایی مانند $\begin{bmatrix}b'\\d'\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}a'\\c'\end{bmatrix}$ هست که در ابرماتریس نمایش $\mathcal{G}_J|_{V_{JI}}$ نیست و در بقیه ستون‌ها با هم مشترک‌اند:

$$A^J : \begin{bmatrix} [A]_{k\times m} & ; & [B]_{k\times n} \\ [C]_{l\times m} & ; & [D]_{l\times n} \end{bmatrix},$$
$$A'^J : \begin{bmatrix} [A]_{k\times m}[a']_{k\times(m'-m)} & ; & [B]_{k\times n}[b']_{k\times(n'-n)} \\ [C]_{l\times m}[c']_{l\times(m'-m)} & ; & [D]_{l\times n}[d']_{l\times(n'-n)} \end{bmatrix}.$$

این ستون‌ها هیچ تاثیری در نگاشت‌های چسب در نمودار بالا ندارند زیرا این نگاشت‌ها برحسب مینورهایی به دست می‌آید که ستون‌های آنها در هر دو ابرماتریس A^J و A'^J به طور یکسان قرار دارند. درنتیجه نمودار بالا جابجایی می‌شود.

همریختی‌های ι_I به کمک هم‌ارزی القا شده φ_{IJ} و φ'_{IJ} در نمودارهای بالا، همریختی طبیعی

$$\iota_{ii'|jj'} : \mathcal{G}'\left(Gr_k^{m'} \times Gr_l^{n'}\right) \to \mathcal{G}(Gr_k^m \times Gr_l^n),$$
$$m \le m', \quad n \le n'$$

را القا می‌کنند که درآن

$$i := m \quad k, \quad i' := m' \quad k,$$
$$j := n \quad l, \quad j' := n' \quad l.$$

گردایه تمام این بافه‌های ساختاری به همراه همریختی‌های طبیعی به صورت

$$\left(\mathcal{G}'(Gr_k^{m'} \times Gr_l^{n'}), \iota_{ii'|jj'}\right)$$

در شرایط حد وارون صدق نموده و بافه‌ای روی $Gr_k^\infty \times Gr_l^\infty$ معین می‌کنند که آن را با $\overleftarrow{\mathcal{G}}$ نشان می‌دهیم. در واقع هر برش مانند f روی مجموعه باز دلخواه $U^\infty := (U_{ij})_{i,j}$ از فضای زمینه، به صورت دنباله‌ای از برش‌های $(f_{ij})_{i,j}$ نمایش داده می‌شود که در روابط زیر صدق می‌کند:

$$f \in \overleftarrow{\mathcal{G}}(U^\infty) \qquad f = (f_{ij})_{i,j},$$
$$f_{ij} \in \mathcal{G}_{U_{ij}}(U_{ij}), \quad \iota_{ii'|jj'}(f_{i'j'}) = f_{ij}$$

با توجه به ساختاری که تعریف شد، می‌توان مشابه

حالت معمولی، یک همریختی از ν-گراسمنین با بعد متناهی به ν-گراسمنین با بعد بی‌نهایت تعریف نمود:

$$p_{ij}:{}_\nu Gr_{k|l}^{m|n} \to {}_\nu Gr_{k|l}^{\infty|\infty},$$
$$p_{ij}\big((f_{rs})\big) = f_{ij}.$$

تحت این نگاشت، باقه ساختاری $\mathcal{G}_{ij}$ یک ساختار $\overleftarrow{\mathcal{G}}$- مدولی نیز دارد.

۴- ابرکلاف برداری $\gamma_{k|l}^{\infty|\infty}$

یادآوری می‌کنیم که ν-گراسمنین‌ها از به هم چسباندن ν-*دامنه*‌های برچسب‌گذاری شده

$$(V_I, \mathcal{G}_I) := (\quad {}^p, \mathbf{C}^\infty{}_p \qquad \wedge \quad {}^q)$$

دراستای همریختی‌های φ_{IJ} به دست می‌آیند. همچنین ابرکلاف طبیعی

$$\gamma_{k|l}^{m|n} := (Gr_k^m \times Gr_l^n, \Gamma)$$

روی ${}_\nu Gr_{k|l}^{m|n}$ نیز از به‌هم چسباندن بافه‌های آزاد $\mathcal{G}_I$-مدولی

$$\mathcal{G}_I \quad < A^I > := \mathcal{G}_I \quad < A_1^I, \ldots, A_{k+l}^I >$$

روی V_I در راستای همریختی‌های $\mathcal{G}$- مدولی ψ_{IJ} با ضابطه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\psi_{IJ}: \mathcal{G}_J\big|(V_{JI}) \quad < A^J > |_{JI}$$
$$\mathcal{G}_J\big|(V_{IJ}) \quad < A^I > |_{JI}.$$
$$s \quad < A^J > \quad \varphi_{IJ}(s) \quad <$$
$$(M_J(A^I).id_J)^{-1}.A^I >$$

در اینجا منظور از A_t^I، سطر t ام ابرماتریس A^I است و منظور از $< A_1^I, \ldots, A_{k+l}^I >$ فضای برداری حقیقی تولید شده توسط A_t^Iها می‌باشد. دیده می‌شود هرکدام از این بافه‌های آزاد با $(V_I, \mathcal{G}_I \qquad {}^{k|l})$ معادل‌اند.

از طرفی همریختی طبیعی ι در (۲) یک همریختی طبیعی به صورت

$$\bar{\iota} : \mathcal{G}_I'\big|(V_I') \quad < A'^I > |_I \qquad \mathcal{G}_I\big|(V_I) \quad <$$
$$A^I > |_I$$
$$A'^I_t \quad A^I_t$$

میان بافه‌های $\mathcal{G}_I'$-مدولی القا می‌کند. می‌توان نشان داد که نمودار زیر متشکل از این همریختی‌ها با همریختی‌های چسب نیز جابجایی است:

$$\mathcal{G}_J'|(V_{JI}') \quad < A'^J > |_{JI} \quad \bar{\iota} \quad \mathcal{G}_J|(V_{JI}) \quad <$$
$$A^J > |_{JI}$$
$$\psi'_{IJ} \downarrow \qquad\qquad \psi_{IJ} \downarrow$$
$$\mathcal{G}_I'|(V_{IJ}') \quad < A'^I > |_{IJ} \quad \bar{\iota} \quad \mathcal{G}_I|(V_{IJ}) \quad <$$
$$A^I > |_{IJ}$$

در این صورت اگر U^∞ مجموعه بازی در $Gr_k^\infty \times Gr_l^\infty$ باشد، می‌توان به کمک هم‌ارزی القا شده توسط نمودارهای بالا، همریختی طبیعی

$$\bar{\iota}_{ii'|jj'}|: \Gamma'(V_I' \cap U_{i'j'}) \to \Gamma(V_I \cap U_{ij}),$$
$$m \le m', \quad n \le n',$$

و در نتیجه

$$\bar{\iota}_{ii'|jj'}: \Gamma'(U_{i'j'}) \to \Gamma(U_{ij})$$

را تعریف نمود. دنباله تمام این مدول‌ها و همریختی‌های طبیعی بین آن‌ها به صورت $(\Gamma'(U_{i'j'}), \bar{\iota}_{ii'|jj'})$ در شرایط حد وارون صدق نموده و مدول $\overleftarrow{\Gamma}\,(U^\infty)$ را القا می‌کند. پیش‌بافه $\overleftarrow{\Gamma}\,(U^\infty) \quad U^\infty$ را با $\overleftarrow{\Gamma}$ و بافه نظیر را با $\gamma_{k|l}^{\infty|\infty}$ نمایش می‌دهیم. این بافه، یک بافه از $\overleftarrow{\mathcal{G}}$- مدول‌هاست که به طور موضعی آزاد از رتبه $k|l$ است.

همریختی‌های $\overleftarrow{\mathcal{G}}$-مدولی از $\overleftarrow{\Gamma}\,(U^\infty)$ به $\Gamma(U_{ij})$ موجود است:

$$(s_{ts}) \quad s_{ij}.$$

این همریختی‌ها، همریختی $\bar{p}_{ij}$ را از $\gamma_{k|l}^{m|n}$ به $\gamma_{k|l}^{\infty|\infty}$ القا می‌کنند.

۵- برگردان ابرکلاف برداری

در این بخش نشان می‌دهیم ابرکلاف $\gamma_{k|l}^{\infty|\infty}$ یک عضو جهانی رسته ابرکلاف‌های برداری است.

تعریف: فرض کنید $\sigma = (\tilde{\sigma}, \sigma\ )$ یک ریختی از ابرمنیفلد $(M, \mathcal{O})$ به $Gr_{k|l}^{m|n}$ باشد. می‌توان یک ساختار $\mathcal{G}$-مدولی بر $\mathcal{O}(M)$ به صورت زیر تعریف نمود:

$$a \quad b \qquad \sigma\ (a). b,$$
$$a \in \mathcal{G}(Gr_k^m \times Gr_l^n), \qquad b \in \Gamma(M).$$

دراینصورت بافه $\Gamma \quad {}^{\sigma}_{\mathcal{G}} \quad \mathcal{O}$ را بافه ساختاری برگردان $\gamma_{k|l}^{m|n}$ در راستای σ گوییم.

تعریف: ابرکلاف برداری روی ابرمنیفلد $(M, \mathcal{O})$ از نوع متناهی است هرگاه، به ازای یک پوشش باز متناهی مانند $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{t}$ برای M، تحدید به هر U_α بدیهی باشد؛ یعنی یکریختی‌هایی مانند

$$\psi_\alpha: \ |_{U_\alpha} \qquad \mathcal{O}|_{U_\alpha} \qquad {}^{k|l}$$

موجود باشند.

با فرض بالا طبق آنچه در قضیه ۱.۴ مقاله [۳] آمده داریم:

به طور طبیعی یک ریختی بین فضای پایه ابرکلاف برداری و فضای پایه ابرکلاف برداری $\gamma_{k|l}^{tk|tl}$، به‌ازای یک t به قدر کافی بزرگ، به صورت

$$\sigma = (\tilde{\sigma}, \sigma\ ): (M, \mathcal{O}) \to (Gr_k^{tk} \times Gr_l^{tl}, \mathcal{G})$$

وجود دارد به قسمی که برگردان $\gamma_{k|l}^{tk|tl}$ در راستای σ با ابرکلاف برداری یکریخت است. و برگردان Γ (ابرکلاف برداری طبیعی روی $_{\nu}Gr$) تحت σ با هم یکریخت‌اند (اثبات در مقاله [3])

بر اساس آنچه تاکنون گفته شده است قضیه زیر را داریم:

قضیه: ابرکلاف $\gamma_{k|l}^{tk|tl}$ و برگردان $\gamma_{k|l}^{\infty|\infty}$ تحت p_{ij} با هم یکریخت‌اند.

برهان: مطابق تعریف، برگردان $\gamma_{k|l}^{\infty|\infty}$ تحت p_{ij} ها به شکل $\Gamma \ {}^{p_{ij}}_{\mathcal{G}}\!\overleftarrow{\ }\ \mathcal{G}$ است و کافیست نشان دهیم نگاشت زیر یکریختی است:

$$T: \mathcal{G} \quad {}^{p_{ij}}_{\mathcal{G}} \Gamma \to \gamma_{k|l}^{tk|tl}.$$
$$u \quad (s_{i'j'}) \quad u. s_{ij}$$

اگر برش دلخواه

$$s = \textstyle\sum_{c=1}^{k+l} 1 \quad (a_{i'j'}^c)(s_{i'j'}^c)$$

را برحسب یک پایه مانند $\{(s_{i'j'}^c)\}_{c=1,\dots,k+l}$ بر مجموعه باز به اندازه کافی کوچکی مانند U^∞ در $Gr_k^\infty \times Gr_l^\infty$ درنظر بگیریم، تصویر آن تحت T در $\Gamma(U)$ به صورت $\sum_{c=1}^{k+l} a_{ij}^c . s_{ij}^c$ برحسب پایه $\{s_{ij}^c\}_{c=1,\dots,k+l}$ به‌ازای $k \quad i = tk$ و $l \quad j = tl$ خواهد بود.

در نتیجه اگر $T(s)$ صفر باشد، همه ضرایب a_{ij}^c برابر صفراند و بنا به رابطه

$$\textstyle\sum_{c=1}^{k+l} a_{ij}^c \quad \left(s_{i'j'}^c\right) = \sum_{c=1}^{k+l} 1. \left(a_{i'j'}^c\right)$$
$$\left(s_{i'j'}^c\right) = \textstyle\sum_{c=1}^{k+l} 1 \quad \left(a_{i'j'}^c\right)\left(s_{i'j'}^c\right),$$

برش s نیز صفر است. یعنی هسته T صفر بوده و T به طور موضعی یکریختی است. ازآنجاکه رتبه دو ابرکلاف برداری روی یک فضای زمینه مشترک با هم برابراست، درنتیجه T به‌طور کلی یکریختی است. نتیجه زیر به طور مستقیم از دو قضیه اخیر به دست می‌آید و نشان می‌دهد که ابرکلاف کانونیک روی $_{\nu}Gr_{k|l}^{\infty|\infty}$ یک ابرکلاف جهانی است:

نتیجه: ابرکلاف برداری با برگردان $\gamma_{k|l}^{\infty|\infty}$ در راستای $p_{ij} \circ \sigma$ یکریخت است.

فهرست منابع

[1] D. Husemuller, Fibre bundles, Third edition, Springer (1994).

[2] C. Bartocci, U. Bruzzo, D. Hernandez Ruiperez, The Geometry of Supermanifolds, Kluwer Academic Publisher (1991).

[3] M. J. Afshari, S. Varsaie, Homotopy Classification of Super Vector Bundles, arxiv:1802.05506.

[4] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston (1966).

[5] Yu. I. Manin, Gauge Field Theory and Complex Geometry, Springer, New York, 1988.