دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره چهلم، بهمن و اسفند ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

تعمیم و کاربردهایی مهم از نامساوی ینسن در نظریه اطلاعات

حسن برسم[۱]، یامین سیاری[۲*]، سید مهراب رمضانی[۳]

(۱) استادیار، گروه ریاضی، دانشکده‌ی علوم، دانشگاه جیرفت، جیرفت، ایران
(۲) استادیار، گروه ریاضی، دانشکده‌ی ریاضی وعلوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران
(۳) استادیار، دانشکده‌ی صنعت و معدن، دانشگاه یاسوج، چرام، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۸/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۱۱

چکیده

یکی از شناخته شده‌ترین نامساوی‌ها که در بسیاری از نامساوی‌های دیگر نیز استفاده می‌شود، نامساوی ینسن است. در واقع، نامساوی ینسن اساس برخی از نامساوی‌ها مانند نامساوی میانگین حسابی، نامساوی میانگین هارمونیک و همچنین نامساوی متناظر با آنتروپی‌ها از جمله نامساوی شانون و نظریه اطلاعات است. هدف از این مقاله ارائه تعمیم و کاربردهایی مهم از نامساوی ینسن برای m دنباله‌ی متناهی است. همچنین، در انتها کاربردهایی از این موارد را در نظریه اطلاعات ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: نامساوی ینسن، میانگین‌ها، واگرایی سیزار، کران‌های عمومی، آنتروپی شانون.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: y.sayyari@ gmail.com

۱- مقدمه

نامساوی ینسن برای توابع محدب یکی از مهمترین نامساوی‌ها در آنالیز ریاضی است. بسیاری از نامساوی‌های مشهور نظیر نامساوی هولدر، نامساوی مینکوفسکی و نامساوی بین میانگین‌ها را می‌توان به عنوان حالت خاصی از نامساوی ینسن درنظر گرفت. این نامساوی کاربردهای فراوانی در نظریه اطلاعات از جمله در نامساوی متناظر با آنتروپی‌ها نظیر نامساوی شانون، نامساوی کی فن و ... نیز دارد. اخیراً، تعمیم‌ها و تظریف‌هایی از نامساوی ینسن توسط بسیاری از نویسندگان مورد توجه قرار گرفته است و به کاربردهای متنوعی در نظریه اطلاعات و غیره تعمیم داده شده است. برای توسیع و تظریف‌های مربوط به نامساوی ینسن مراجع [۱]، [۲]، [۳]، [۶]، [۷]، [۸]، [۹] و [۱۰] را مشاهده کنید. در [۱] نویسندگان تظریف جالبی از نامساوی ینسن مرتبط با دو دنباله متناهی ایجاد کرده‌اند و با استفاده از این تظریف، نامساوی‌هایی را برای میانگین‌های متفاوت آورده‌اند. هدف ما در این مقاله یافتن تظریف جالبی از نامساوی ینسن در رابطه با m دنباله‌ی متناهی است. همچنین، برخی از کاربردهای آن را در نظریه اطلاعات بدست می‌آوریم. در آخر، بر روی پیدا کردن کران‌های واگرایی سیزار، آنتروپی شانون و ... تمرکز می‌کنیم.

تعریف ۱-۱: فرض کنید I یک بازه در و $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ و $p_1, p_2, \dots, p_n \in [0,1]$ ضرایبی باشند با این شرط که $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. مجموع $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ را ترکیب محدب نقاط x_i (با ضرایب p_i) می‌نامند.

نامساوی معروف ینسن ([۱]، [۵]، [۹]، [۱۰]) برای تابع محدب f به صورت زیر است:

قضیه ۱-۲: فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. در این صورت نامساوی

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

برای هر ترکیب محدب $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ از نقاط $x_i \in I$ صادق است.

۲- نتایج اصلی

این بخش را با بدست آوردن تظریف جدیدی از نامساوی ینسن که مربوط به m دنباله‌ی متناهی است، شروع می‌کنیم.

قضیه ۲-۱: فرض کنید که $f : I \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. همچنین، $R = [r_{ij}]_{mn}$ یک ماتریس باشد به‌طوری که برای هر $1 \le j \le n$، $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$، $x_j \in I$ و مجموع اجزای هر ستون آن برابر یک ($\sum_{i=1}^{m} r_{ij} = 1$) باشد، در این صورت

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j}\right) \le \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j)$$

اثبات: با استفاده از محدب بودن تابع f و نامساوی ینسن داریم:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) = f\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j x_j\right)$$
$$= f\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j \times \frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j}\right)\right)$$
$$\le \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j\right) f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j}\right)$$
$$\le \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j\right)\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j).$$

می‌توانیم قضیه ۲-۱ را به صورت دیگری به شرح زیر بیان کنیم:

قضیه ۲-۲: اگر R یک ماتریس تصادفی ستونی باشد، در این صورت

$$f(P\cdot x) \le \sum_{i=1}^{n} (R_i \cdot P) f\left(\frac{R_i \cdot Px}{R_i \cdot P}\right) \le P\cdot f(x)$$

که در آن ضرب داخلی و برای $i = 1, 2, ..., n$، $Px = (p_1 x_1, p_2 x_2, ..., p_n x_n)$ و R_i سطرهای ماتریس R می‌باشند.

فرض کنید $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$، $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ و $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$، n-تایی‌های مثبت باشند، در این صورت میانگین توانی از مرتبه r به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_r(P,x) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\,r}\right)^{\frac{1}{r}}, & r \ne 0 \\ \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}, & r = 0 \end{cases}$$

$$M_r(P,\theta,x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{P\cdot\theta}\sum_{i=1}^{n} p_i \theta_i x_i^{\,r}\right)^{\frac{1}{r}}, & r \ne 0 \\ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i\theta_i}\right)^{\frac{1}{P\cdot\theta}}, & r = 0 \end{cases}$$

قضیه ۲-۳: با مفروضات قضیه ۲-۱ نامساوی‌های زیر برقرار هستند؛

$$M_t(P,x) \ge \left(\sum_{i=1}^{m} M_1(P,R_i) M_s^t(P,R_i,x)\right)^{\frac{1}{t}} \ge M_s(P,x), \qquad t \ne 0 \quad (1)$$
$$M_t(P,x) \ge \prod_{i=1}^{m} \exp\left(M_1(P,R_i) \log M_s(P,R_i,x)\right) \ge M_s(P,x), \quad t = 0 \quad (2)$$
$$M_t(P,x) \ge \left(\sum_{i=1}^{m} M_1(P,R_i) M_t^s(P,R_i,x)\right)^{\frac{1}{s}} \ge M_s(P,x), \qquad s \ne 0 \quad (3)$$
$$M_t(P,x) \ge \prod_{i=1}^{m} \exp\left(M_1(P,R_i) \log M_t(P,R_i,x)\right) \ge M_s(P,x), \quad s = 0 \quad (4)$$

اثبات: برای اثبات قسمت (۱) در قضیه ۱-۲ قرار می‌دهیم؛ $f(x) = x^{\frac{t}{s}}$ همچنین به جای x_i مقدار $x_i^{\,s}$ را قرار می‌دهیم و در آخر به توان $\frac{1}{t}$ می‌رسانیم و نامساوی (۱) بدست می‌آید.
برای اثبات قسمت (۲) کافی است از طرفین نامساوی (۱) نسبت به t حد بگیریم ($t \to 0$) و حاصل آن نامساوی (۲) است. اثبات قسمت (۳) به این ترتیب است که همانند قسمت (۱) عمل می‌کنیم و در قضیه ۱-۲، فرض می‌کنیم:

$$f(x) = x^{\frac{s}{t}}$$

همچنین به جای x_j مقدار $x_j{}^t$ را قرار می‌دهیم و در آخر به توان $\frac{1}{s}$ می‌رسانیم و منتج به نامساوی (۳) می‌شود. در پایان نامساوی (۴) با حدگیری از قسمت (۳) نسبت به s و $s \to 0$ که در نتیجه نامساوی (۴) حاصل می‌شود.

تعریف۲-۴: (تابعک f-واگرای سیزار): فرض کنید $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد، همچنین فرض کنید که $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ و $d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$، n-تایی‌های مثبت باشند، با این مفروضات تابعک f-واگرایی سیزار به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$M_f(c,d)=\sum_{j=1}^{n} d_j f\left(\frac{c_j}{d_j}\right).$$

در قضیه زیر، کران پایینی برای f-واگرایی ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲-۵: فرض کنید $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب و $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ و $d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$، n-تایی‌های مثبت باشند. همچنین به ازای $1 \le i \le m$، $\sum_{i=1}^{m} r_{ij}=1$. آنگاه

$$M_f(c,d) \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} d_j f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j r_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} d_j r_{ij}}\right)$$
$$\ge f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\right)\sum_{j=1}^{n} d_j.$$

اثبات: کافی است در قضیه ۲-۱، قرار دهیم؛

$$x_j=\frac{c_j}{d_j}, \qquad p_j=\frac{d_j}{\sum_{i=1}^{n} d_i}.$$

تعریف ۲-۶ (آنتروپی شانون) [۶]: آنتروپی شانون متغیر تصادفی X با تابع جرم احتمال P(X) را با نماد H(X) نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$

قضیه ۲-۷: فرض کنید که $P=\{p_i\}_{i=1}^{n}$ توزیع احتمال مثبت برای آنتروپی شانون $H(P)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ باشد، آنگاه

$$H(P) \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j \log\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j}\right) \le \log n.$$

اثبات: اگر در قضیه ۲-۵، فرض کنیم $f(x)=-\log x$ و به ازای $1 \le j \le n$ قرار دهیم؛ $d_j=p_j \qquad c_j=1$ در این صورت خواهیم داشت؛

$$M\ (c,d)=-\sum_{j=1}^{n} p_j \log\frac{1}{p_j}=-H(P).$$

تعریف ۲-۸ (واگرایی کولبک-لیبلر) [۱]: فرض کنید که $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ و $d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ توزیع‌های احتمالی مثبت باشند، با این مفروضات واگرایی کولبک-لیبلر به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$K_D(c,d)=\sum_{i=1}^{n} c_i \log\left(\frac{c_i}{d_i}\right).$$

نتیجه۲-۹: اگر $c=(c_1,c_2,...,c_n)$ و $d=(d_1,d_2,...,d_n)$، n-تاییهای مثبت باشند و همچنین $R=[r_{ij}]_{mn}$ ماتریسی باشد بهطوری که برای هر $1\le j\le n$، مجموع اجزای هر ستون آن برابر یک ($\sum_{i=1}^{m} r_{ij}=1$) باشد، در این صورت

$$K_D(c,d)\ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}c_j \log\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}c_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}d_j}\right) \ge \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)\log\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\right).$$

اثبات: با استفاده از قضیه ۱-۲، برای $p_j=\frac{d_j}{\sum_{i=1}^{n} d_i}$، $x_j=\frac{c_j}{d_j}$ و $f(x)=x\log x$ داریم:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right)=f\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{\sum_{i=1}^{n} d_i}\times\frac{c_j}{d_j}\right) = f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\log\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\right),$$

همچنین

$$\sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j)=\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{\sum_{i=1}^{n} d_i}\times\frac{c_j}{d_j}\times\log\left(\frac{c_j}{d_j}\right) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\sum_{j=1}^{n} c_j\log\left(\frac{c_j}{d_j}\right) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j}K_D(c,d),$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}p_j f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}p_j}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\times\frac{d_j}{\sum_{k=1}^{n} d_k} f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}c_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}d_j}\right) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}c_j\log\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}c_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}d_j}\right)$$

که این اثبات را تکمیل میکند.

تعریف ۲-۱۰ [1]: برای دو توزیع احتمال مثبت $c=(c_1,c_2,...,c_n)$ و $d=(d_1,d_2,...,d_n)$ فاصله تغییرات به صورت زیر تعریف میشود؛

$$V_D(c,d)=\sum_{j=1}^{n}|c_j-d_j|.$$

نتیجه ۲-۱۱: بنابر مفروضات نتیجه ۲-۹ نامساوی زیر برقرار است:

$$\left|\sum_{j=1}^{n}(c_j-d_j)\right|\le\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(c_j-d_j)\right| \le\sum_{j=1}^{n}|(c_j-d_j)| =V_D(c,d).$$

اثبات: در قضیه ۲-۱، قرار می‌دهیم؛

$$p_j = \frac{d_j}{\sum_{i=1}^{n} d_i}, \quad x_j = \frac{c_j}{d_j}, \quad f(x) = x\log x,$$

لذا داریم:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\left|\sum_{j=1}^{n}(c_j - d_j)\right|$$

و

$$\sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\sum_{j=1}^{n}|(c_j - d_j)|$$

و

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(c_j - d_j)\right|.$$

تعریف ۲-۱۲ (فاصله جفری) [۱]: برای دو توزیع احتمال مثبت $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ و $d=(d_1,d_2,\dots,d_n)$ فاصله جفری به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$J_D(c,d) = \sum_{j=1}^{n}(c_j - d_j)\log\left(\frac{c_j}{d_j}\right).$$

نتیجه ۲-۱۳: بنابر مفروضات نتیجه ۲-۹ نامساوی زیر برقرار است:

$$J_D(c,d) \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(c_j - d_j)\log\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j r_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} d_j r_{ij}}\right) \ge \sum_{j=1}^{n}(c_j - d_j)\log\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\right).$$

اثبات: در قضیه ۲-۱، قرار می‌دهیم؛

$$p_j = \frac{d_j}{\sum_{i=1}^{n} d_i}, \quad x_j = \frac{c_j}{d_j}, \quad f(x) = (x-1)\log x,$$

لذا داریم:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(c_j - d_j)}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\log\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}$$

و

$$\sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\sum_{j=1}^{n}(c_j - d_j)\log\frac{c_j}{d_j}$$

و

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j}\right) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} d_j\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} c_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} d_j} - 1\right)\log\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} c_j}{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} d_j}\right).$$

تعریف ۲-۱۴ (ضریب باتِکِرییا) [۱]: برای دو توزیع احتمال مثبت $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ و $d=(d_1,d_2,\dots,d_n)$ ضریب باتِکِرییا به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$B_D(c,d) = \sum_{j=1}^{n}\sqrt{c_j d_j}.$$

نتیجه ۲-۱۵: بنابر مفروضات نتیجه ۲-۹ نامساوی زیر برقرار است:

$$B_D(c,d) \le \sum_{i=1}^{m}\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j r_{ij}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} d_j r_{ij}\right)} \le \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} d_j\right)}.$$

اثبات: در قضیه ۲-۱، با قرار دادن؛

$$p_j=\frac{d_j}{\sum_{i=1}^{n}d_i},\qquad x_j=\frac{c_j}{d_j},\qquad f(x)=-\sqrt{x},$$

تساوی زیر را بدست می‌آوریم:

$$\sum_{j=1}^{n}r_{ij}p_jf\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}r_{ij}p_jx_j}{\sum_{j=1}^{n}r_{ij}p_j}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}r_{ij}p_jf\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}r_{ij}c_j}{\sum_{j=1}^{n}r_{ij}d_j}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}d_j}\left(\sum_{j=1}^{n}r_{ij}d_j\right)\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}r_{ij}c_j}{\sum_{j=1}^{n}r_{ij}d_j}}$$

$$=-\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}d_j}\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}r_{ij}c_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}r_{ij}d_j\right)}.$$

تعریف ۲-۱۶ (فاصله هلنگر)[۱]: برای دو توزیع احتمال مثبت $c=(c_1,c_2,...,c_n)$ و $d=(d_1,d_2,...,d_n)$ فاصله هلنگر به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$H_D(c,d)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{c_j}-\sqrt{d_j}\right)^2.$$

نتیجه ۲-۱۷: بنابر مفروضات نتیجه ۲-۹ نامساوی زیر برقرار است:

$$H_D(c,d)\ge\sum_{i=1}^{m}\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}c_jr_{ij}}-\sqrt{\sum_{j=1}^{n}d_jr_{ij}}\right)^2$$

$$\ge\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}c_j}-\sqrt{\sum_{j=1}^{n}d_j}\right)^2$$

اثبات: در قضیه ۲-۱، با قرار دادن؛

$$p_j=\frac{d_j}{\sum_{i=1}^{n}d_i},\quad x_j=\frac{c_j}{d_j},\quad f(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)^2,$$

نتیجه بدست می‌آید.

تعریف ۲-۱۸ (مبین مثلثی)[۱]: برای دو توزیع احتمال مثبت $c=(c_1,c_2,...,c_n)$ و $d=(d_1,d_2,...,d_n)$ مبین مثلثی صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$T_D(c,d)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(c_j-d_j\right)^2}{c_j+d_j}.$$

نتیجه ۲-۱۹: بنابر مفروضات نتیجه ۲-۹ نامساوی زیر برقرار است:

$$T_D(c,d)\ge\sum_{i=1}^{m}\frac{\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\left(c_j-d_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\left(c_j+d_j\right)}$$

$$\ge\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}c_j-\sum_{j=1}^{n}d_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\left(c_j+d_j\right)}.$$

اثبات: در قضیه ۲-۱، با قرار دادن؛

$$p_j=\frac{d_j}{\sum_{i=1}^{n}d_i},\quad x_j=\frac{c_j}{d_j},\quad f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1},$$

نتیجه بدست می‌آید.

فهرست منابع

1. Adil Khan .M,. Pecaric. D. and Pecaric . J .(2021), A new refinement of the Jensen inequality with applications in information theory, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 44(1) 267-278.

2. Adil Khan. M, Hanif. M, Khan Z.A., et al. (2019), Association of Jensen's inequality for s-convex function with Csiszar divergence, J. Inequal. Appl., 1-14.

3. Barsam. H, Sattarzadeh. A.R. , (2020), Hermite-Hadamard inequalities for uniformly convex functions and Its Applications in Means, Miskolc Math. Notes.,21(2) 621-630.

4. Dragomir .S.S. (1999-2000), A converse result for Jensen's discrete inequality via Grüss inequality and applications in information theory, An. Univ. Oradea. Fasc. Mat.}, (7) 178-189.

5. Dragomir .S. S.(2006), Bounds for the normalized Jenson functional, Bull. Austral. Math. Soc. (74) 471-478.

6. Dragomir. S.S, Goh .C.J .(1997), Some bounds on entropy measures in Information Theory, Appl. Math. Lett., 10 (3) 23-28.

7. Sayyari. Y., Barsam. H., Jensen's inequality and tgs-convex functions with applications, (submitted).

8. Simic .S .(2009), Jensen's inequality and new entropy bounds, Appl. Math. Lett., 22(8), 1262-1265.

9. Simic. S. (2009), On an upper bound for Jensen's inequality, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 10(2), 1-5.

10. Simic. S. (2008), On a global upper bound for Jensen's inequality, J. Math. Anal. Appl., 343(1), 414-419.