دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

رنگ‌آمیزی گراف‌های فازی در مساله چراغ‌های راهنمایی

یحیی طالبی رستمی[۱]، سیامک فیروزیان بندپی[۲]، علیرضا منیری حمزه کلایی[۳*]، مصطفی نوری جویباری[۴]

(۱) دانشیار، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران
(۲) استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
(۳) استادیار، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران
(۴) مربی، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۱/۰۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۲۷

چکیده

مساله چراغ‌های راهنمایی شامل کنترل کردن سیستم یک چراغ راهنمایی است به‌طوری که سطح مطمئنی از ایمنی به دست آید. مدل‌سازی مساله چراغ‌های راهنمایی به‌عنوان یک مساله تخصیص در نظریه ترکیبیات مطرح گردیده است. همین طور این مساله به عنوان یک مساله رنگ‌آمیزی گراف نیز مدل‌سازی شده است. در این مقاله سعی شده است این مساله‌ها را در نمونه‌های عملی به عنوان مساله رنگ‌آمیزی گراف فازی مدلسازی نموده و مقایسه‌ای نیز از روش‌های مطرح شده داشته باشیم.

واژه‌های کلیدی: نظریه گراف – مساله برنامه جدول زمانی – بهینه‌سازی–رنگ آمیزی فازی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: a.monirih@umz.ac.ir

۱. مقدمه

رنگ‌آمیزی گراف یکی از مسائلی است که از میان مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی بیشتر از همه مورد توجه قرار گرفته است. بسیاری از مسائل مفید کاربردی می‌توانند به عنوان مسائل رنگ‌آمیزی گراف مدل‌سازی شوند. شکل کلی این کاربرد شامل تشکیل دادن یک گراف با گره‌های نشان دهنده قسمت‌های مورد علاقه مان می‌باشد. مساله اصلی رنگ‌آمیزی گراف مربوط به گروه‌بندی رئوس گراف در گروه‌های کوچک می‌باشد به‌طوری که هیچ دو راس ناهمسانی در گروه یکسان قرار نداشته باشند. بخش مهمی از کاربرد مساله رنگ‌آمیزی گراف در علم مدیریت می‌باشد. یک توسیع طبیعی از مساله رنگ‌آمیزی ،برای گراف‌های فازی می باشد که مساله چراغ‌های راهنمایی نمونه‌ای از این مساله است. در این مقاله ارائه راه حلی برای مساله چراغ‌های راهنمایی را در دستور کار داریم.
مشکل چراغ‌های راهنمایی و تقاطع‌ها در سیستم‌های راهنمایی و رانندگی و زمان‌بندی این چراغ‌ها، مساله‌ای است که راهنمایی و رانندگی در شهرها با آن دست به گریبان هستند. اگر بتوانیم سیستم زمان‌بندی چراغ‌های راهنمایی را طوری طراحی کنیم که بیشترین ایمنی و کمترین ترافیک را داشته باشیم، حجم زیادی از مصرف سوخت را کاهش خواهد داد. به علاوه با صرفه‌جویی در وقت می‌توان بهره‌وری را افزایش داد. در این مقاله فرض بر این است که کلیه داده‌های جمع‌آوری شده برای مدل‌سازی مساله به تقاطع‌هایی اختصاص دارند که چراغ راهنمایی دارند. راه‌ها به طور مطمئن ایجاد شده‌اند و حرکات خودروها طبق اصول راهنمایی می‌باشند. در این مقاله با استفاده از مطالعات قبلی مدل‌سازی مساله را انجام داده‌ایم و با استفاده از روش‌های ذکر شده برای بهینه‌سازی مساله داده شده راه حل مناسبی برای مشکل موجود ارائه داده‌ایم.
در سال ۱۹۶۵، پرفسور لطفی‌زاده مقاله سمینار خود را تحت عنوان (مجموعه‌های فازی) ارائه داد که در آن نظریه مجموعه‌های فازی و منطق فازی شرح داده شده بود [8]. هدف لطفی‌زاده توسعه نظریه مجموعه‌های کلاسیک و استفاده از آن در فناوری اطلاعات، ارتباطات و علوم کامپیوتر بود. این نظریه به این صورت بیان می‌شود که درجه عضویت یک عنصر در یک زیرمجموعه از یک مجموعه جهانی، در بازه بسته $[0,1]$ از اعداد حقیقی تعریف می‌شود. ایده نظریه مجموعه‌های فازی برای توپولوژی، جبر مجرد، هندسه، آنالیز و نظریه گراف معرفی شده است. اولین تعریف از گراف فازی توسط کافمن [3] در سال ۱۹۷۷ پیشنهاد شد که مبتنی بر روابط فازی تعریف شده توسط لطفی‌زاده در [9] بود. همچنین رزنفلد در سال ۱۹۷۶ در [6] تعریف‌هایی شامل رئوس فازی و یال‌های فازی را بیان کرد. از آن به بعد مفهوم گراف‌های فازی وارد بسیاری از مفاهیم کاربردی شد و بسیاری از مسائل بهینه‌سازی توسط گراف‌های فازی مورد بررسی قرار گرفت. برای مطالعه بیشتر در زمینه گراف‌های فازی و کاربردهای آن به [4] و [5] و [7] مراجعه نمایید.
در بخش اول این مقاله در مورد تعاریف مقدماتی گراف‌های فازی و روابط فازی مطالبی ارائه می‌شود و در بخش دوم در مورد رنگ‌آمیزی گراف‌های فازی قضایا و مثال‌هایی آورده شده است. در بخش آخر نیز در مورد مساله چراغ‌های راهنمایی چند مثال عملی را می‌بینیم.

۲. تعاریف و مفاهیم اولیه

مجموعه $[0,1]=\{t\epsilon\mathbb{R}|0\leq t\leq 1\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت یک زیرمجموعه فازی از S، نگاشتی است مانند $\mu: S\to[0,1]$ که به عنصر $x\epsilon S$ درجه عضویت $0\leq \mu(x)\leq 1$ را نسبت می‌دهد. به عنوان مثال اگر S یک مجموعه باشد، تابع مشخصه χ_S یک زیرمجموعه فازی S است.

تعریف ۲-۱ [7]. اگر μ یک زیرمجموعه فازی از S باشد، آنگاه $\mu^t=\{x\in S|\mu(x)\geq t\}$ را t - برش μ گویند.

تعریف ۲-۲ [7]. فرض کنید μ یک زیرمجموعه فازی از S باشد. در این صورت $Supp(\mu)=\{x\in S|\mu(x)>0\}$ را تکیه گاه μ گویند. یک مجموعه فازی μ نابدیهی است هرگاه $Supp(\mu)\neq 0$.

تعریف ۲-۳ [7]. مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی S را با $F_\rho(S)$ نشان می‌دهند و آن را مجموعه توانی فازی S گویند. نماد $\vee$ و $\wedge$ را به ترتیب برای سوپریمم و اینفیمم مجموعه به کار می‌بریم. اگر h تابعی از $F_\rho(S)$ به $[0,1]$ باشد که به ازای هر $\mu \in F_\rho(S)$، به صورت $h(\mu) = \vee\{\mu(x)|x \in S\}$ تعریف شود، آنگاه $h(\mu)$ را ارتفاع μ گویند.

تعریف ۲-٤ [7]. مجموعه فازی A روی مجموعه غیرتهی X به صورت خانواده $A = \{(x, \mu_A(x)|x \in X\}$ تعریف می‌شود که در آن $\mu_A: X \to I$ تابع عضویت است و $\mu_A(x)$ نشان دهنده ابهام ادعای x متعلق به A است. عدد فازی مجموعه فازی است که $X \subseteq \mathbb{R}$.

یک گراف، زوجی مانند (V, R) است که V یک مجموعه و R یک رابطه روی V است. عناصر V را رئوس گراف و عناصر R را یال‌های گراف گویند. به‌طور مشابه، رابطه فازی ρ روی زیرمجموعه فازی μ از مجموعه V را یک گراف وزن‌دار یا گراف فازی گویند، هرگاه یال $(x,y) \in V \times V$ وزن یا سختی $\rho(x,y) \in [0,1]$ داشته باشد. همه یال‌ها به صورت زوج نامرتب از رئوس می‌باشد.

تعریف ۲-۵ [5]. یک گراف فازی $G = (V, \mu, \rho)$ متشکل از مجموعه‌ای غیرتهی V است که به همراه یک جفت از توابع $\mu: V \to [0,1]$ و $\rho: V \times V \to [0,1]$ تعریف می‌شود و در آن برای هر $x, y \in V$ داریم:

$$\rho(x,y) \leq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

به μ مجموعه رئوس فازی G و به ρ مجموعه یال‌های فازی گفته می‌شود.

می‌دانیم که ρ یک رابطه فازی روی مجموعه فازی μ است. برای اختصار گراف‌های فازی را با $G = (V, \mu)$ نیز نشان می‌دهیم. در حالت کلی، راس‌ها و یال‌ها مقدار عضویت خواهند داشت. در حالت خاص اگر برای هر $x \in V$ داشته باشیم $\mu(x) = 1$، آنگاه یال‌ها فقط عضویت فازی خواهند داشت و در این حالت از نماد $G = (V, \rho)$ استفاده می‌شود.

فرض کنید $\tilde{G} = (V, \mu)$ یک گراف فازی باشد، همچنین فرض کنید A یک مجموعه فازی روی X باشد. در این صورت α –برش به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

این خانواده از مجموعه‌ها یکنوا می‌باشند. به این دلیل که به ازای خانواده اندیس گذار I و هر $\alpha, \beta \in I$ که $\alpha \leq \beta$، داریم $A_\alpha \supseteq A_\beta$. البته می‌توان مجموعه فازی A را با استفاده از تابع عضویت به شکل $\mu_A(x) = sup\{\alpha^p | x \in A_{\alpha^p}\}$ به ازای هر $x \in X$ نیز تعریف کرد.

تعریف ۲-٦ [5]. اگر $F(R)$ مجموعه تمام زیر مجموعه‌های فازی R باشد، آنگاه $A \in F(R)$ را یک عدد فازی گویند هرگاه در سه شرط صدق کند:

۱. $supp(A)$ کراندار باشد
۲. نرمال و تک نمایی باشد. یعنی فقط وفقط یک $x \in R$ وجود داشته باشد که $\mu(x) = 1$.
۳. A_α برای هر $\alpha \in (0,1]$ یک بازه بسته باشد.

توجه به این نکته دارای اهمیت است که می توان مجموعه فازی دلخواه را به عدد فازی نرمال شده تبدیل کرد.

تعریف ۲-۷ [5]. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف معمولی باشد. یک تابع رنگ‌آمیزی، نگاشتی است مانند $\pi: V \to \mathbb{N}$، که برای هر دو راس دلخواه a و b از V، داریم $\pi(a) \neq \pi(b)$ اگر فقط از k رنگ استفاده کنیم، تابع $\pi^k: V \to \{1,2, \dots, k\}$ را k–رنگ آمیزی تعریف می‌کنیم. گراف G را k– رنگ‌پذیر می‌گوییم اگر G یک k – رنگ‌آمیزی را بپذیرد. کمترین مقدار k که گراف G، k– رنگ‌پذیر باشد را عدد رنگی گراف G گوییم و با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم.

یک مساله مهم که در رنگ‌آمیزی گراف‌ها وجود دارد، این است که در گراف کلاسیک یا معمولی، دو راس i و j را سازگار یا ناسازگار گویند اگر به ترتیب $\{i,j\} \notin E$

یا $\{i,j\} \in E$ باشد. می‌دانیم که در بسیاری از حالات واقعی، چنین ناسازگاری کلاسیک یا معمولی نیست یعنی این که دو راس می‌توانند ناسازگاری کمتر یا بیشتر داشته باشند یا می‌توان ناسازگاری را با درجه‌های متفاوت نشان داد.

تذکر. قرار دهید $\{G_\alpha = (V, E_\alpha) | \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های $\alpha-$ برش از گراف فازی $\widetilde{G}$ باشد که G_α گرافی قطعی یا معمولی با مجموعه یال‌های $E_\alpha = \left\{\{i,j\} | i,j \in V,\ \mu_{ij} \geq \alpha\right\}$ است. بنابراین، $k-$ رنگ‌آمیزی (قطعی) C_α^k می‌تواند روی G_α تعریف شود.

برای هر $\alpha \in I$ قرار دهید χ_α عدد رنگی گراف G_α باشد، در این صورت عدد رنگی $\widetilde{G}$ در بین خانواده یکنوا از مجموعه‌ها تعریف می‌شود.

تعریف ۲-۸ [5]. فرض کنید $\widetilde{G} = (V, \mu)$ یک گراف فازی است. در این صورت عدد رنگی این گراف عدد فازی زیر است:

$\chi(\widetilde{G}) = \{(x, v(x)) | x \in X\}$ که در آن $X = \{1,2,\dots,|V|\}$ و به ازای هر $x \in X$ $v(x) = sup\{\alpha \in I \mid x \in A_\alpha\}$ و به ازای هر $\alpha \in I$، $A_\alpha = \{1,\dots,\chi_\alpha\}$.

عدد رنگی گراف فازی یک عدد فازی نرمال شده است که ارزش کیفیتی آن به مجموعه- یالی تهی گراف وابسته است. این مفهوم بستگی به مفهوم اندیس α دارد و می‌تواند به صورت زیر تفسیر گردد:

برای مقادیر کمتر α، پیوندهای ناسازگار بیشتری بین رئوس وجود خواهد داشت و در نتیجه رنگ‌های بیشتری برای در نظر گرفتن این ناسازگاری‌ها نیاز خواهد بود، از طرفی دیگر برای مقادیر بالاتر α، پیوندهای ناسازگار کمتری بین رئوس وجود دارد و در نتیجه رنگ‌های کمتری نیاز خواهد بود. عدد رنگی همه این اطلاعات را برای حل مساله فازی به نتیجه خواهد رساند.

بنابراین مساله رنگ آمیزی گراف فازی شامل تعیین عدد رنگی گراف فازی و یک تابع رنگ‌آمیزی وابسته می‌باشد. در راه حل حاضر، برای هر سطح α، کمترین تعداد رنگ مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی گراف کلاسیک یا معمولی G_α محاسبه می‌شود. در این روش، عدد رنگی فازی به عنوان عدد فازی در بین $\alpha-$ برش‌ها تعریف می‌شود.

مثال ۲-۹. گراف فازی $\widetilde{G} = (V, \mu)$ را که در آن $V = \{1,2,3,4\}$ و

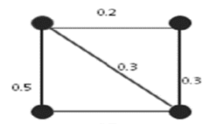
$$\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید. شکل گراف به صورت شکل ۱ است.

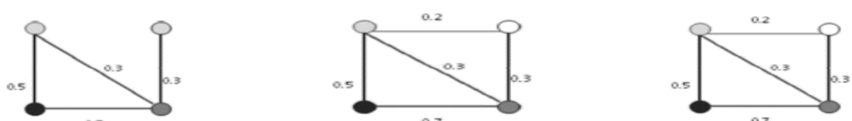
برای این گراف به ازای $\alpha \in I$ شش گراف کلاسیک یا معمولی $G_\alpha = (V, E_\alpha)$ به دست خواهد آمد. در شکل ۲، مجموعه یال‌های E_α، عدد رنگی χ_α و یک $\chi_\alpha -$ رنگ‌آمیزی $\pi_\alpha^{\chi_\alpha}$ آمده است.

عدد رنگی فازی گراف $\widetilde{G}$ برابر است با:

$\chi(\widetilde{G}) = \{(1,1), (2,0.7), (3,0.3), (4,0.2)\}$

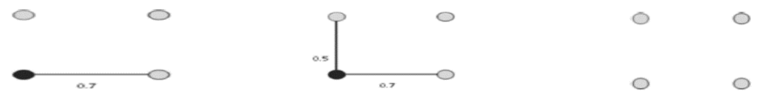


شکل ۱. گراف فازی $\widetilde{G} = (V, \mu)$



$\alpha = 0 \quad \chi_\alpha = 4$, $\alpha = 0.2 \quad \chi_\alpha = 4$, $\alpha = 0.3 \quad \chi_\alpha = 3$

شکل ۲. گراف کلاسیک $G_\alpha = (V, E_\alpha)$



$\alpha = 0.5 \;\; \chi_\alpha = 2, \qquad \alpha = 0.7 \;\; \chi_\alpha = 2, \qquad \alpha = 1 \;\; \chi_\alpha = 1$

ادامه شکل ۲. گراف کلاسیک $G_\alpha = (V, E_\alpha)$

۳. مساله (d,f)– رنگ آمیزی

برای گراف فازی داده شده $\tilde{G}$، نوع دیگری از رنگ آمیزی را معرفی می‌کنیم که روی مفاهیم جدید تابع رنگ آمیزی بنا شده است. ناسازگاری فازی می‌تواند به عنوان اندازه عدم تجانس تعریف شده روی مجموعه رنگ‌ها و تابع وزن شمرده شود. مثال زیر که از مساله آزمون می‌باشد می‌تواند کاربرد این مفهوم را نشان دهد.

مثال ۳–۱ [5]. مساله برنامه‌ریزی امتحانات شامل تخصیص دادن تعدادی امتحان به تعدادی دوره زمانی است، به این صورت که دانشجویان در یک زمان نمی‌توانند چند امتحان داشته باشند، همچنین همراه با چندین محدودیت دیگر. نمونه ساده شده این مساله می‌تواند به صورت یک مساله رنگ آمیزی کلاسیک مدل‌سازی شود. هر امتحان به عنوان راسی از گراف و یال‌های مرتبط، امتحان‌های ناسازگاری هستند که حداقل یک دانشجو در آن دو مشترک هستند. هر رنگ به یک دوره زمانی شناسانده می‌شود و همه رئوس با رنگ یکسان به دوره‌های زمانی مشترک تخصیص داده می‌شوند. رنگ آمیزی بهینه این خاصیت را دارد که تعداد دوره زمانی امتحانات را کمینه کند.

مشاهده می‌کنیم که هر رنگ آمیزی معتبر یک برنامه امتحانی شدنی را مشخص می‌کند و هر جایگشت از رنگ‌ها– دوره زمانی، شدنی بودن برنامه جدید را حفظ می‌کند. هریک از این تغییرات رنگ‌ها با یک تغییر زمانی امتحانات مشترک معادل است.

در حالت واقعی، بعضی از حالاتی وجود دارند که باید از آنها اجتناب کنیم که توابع رنگ آمیزی اجازه این حالات را می‌دهند. برای نمونه، از سه امتحان پشت سر هم برای زیر مجموعه‌ای از دانشجویان، تابع رنگ آمیزی فقط آنهایی را در نظر می‌گیرد که با هم جور نباشند هر چند که رنگ‌های متوالی باشند. یک تابع رنگ آمیزی جدید که روی مفهوم فاصله بین رنگ‌ها بنا شده است در این بخش معرفی خواهد شد. یک مثال عینی از این مساله را در زیر می‌بینیم:

مثال ۳–۲ [5]. شش امتحان $\{A,B,C,D,E,F\}$ به صورت شش راس وجود دارند. اگر x و y دو راس دلخواه از این گراف باشند، آنگاه با ملاحظه کردن مشخصات متفاوت آنها (سختی، کیفیت و مقطع و...)، ناسازگاری بین x و y را به صورت $L(x,y)$ ارزش گذاری می‌کنیم:

$$L(x,y) = \begin{cases} n & \text{سازگارند} \\ l & \text{ناسازگاری کم دارند} \\ m & \text{ناسازگاری متوسط دارند} \\ h & \text{ناسازگاری زیاد دارند} \end{cases}$$

این مساله می‌تواند به صورت یک گراف فازی $\tilde{G} = (V,\mu)$ مدلسازی شود، که:

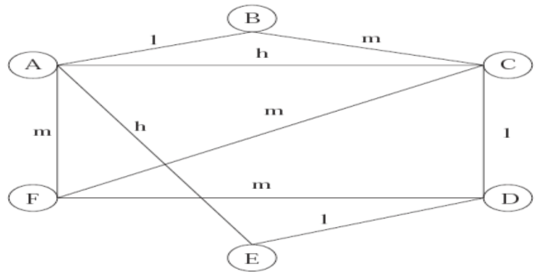
$$V = \{A,B,C,D,E,F\}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} - & l & h & n & h & m \\ l & - & m & n & n & n \\ h & m & - & l & n & m \\ n & n & l & - & l & m \\ h & n & n & l & - & n \\ m & n & m & m & n & - \end{bmatrix}$$

این گراف فازی در شکل ۳ آمده است.

درجه ناسازگاری می‌تواند به روش زیر تفسیر شود:

هر امتحان سازگار می‌تواند با دوره زمانی مشابه وصل شود اگر درجه ناسازگاری بین امتحان‌های i و j برابر l، m یا h باشد، آنگاه دو امتحان باید طوری برنامه‌ریزی شود که حداقل ۱، ۲ یا ۳ دوره زمانی به ترتیب بین آنها قرار داشته باشد. مساله این است که شش امتحان را با این شرایط برنامه‌ریزی کنیم و کل زمان امتحانات را کمینه کنیم. برای مثال بالا، کمترین تعداد دوره زمانی پنج تاست و یک برنامه بهینه به صورت جدول ۱ آمده است.



شکل ۳. گراف فازی $\tilde{G}$

دوره زمانی	1	2	3	4	5
امتحانات برنامه‌ریزی شده	A,D	B	F	E	C

جدول ۱. جدول رنگ آمیزی گراف فازی $\tilde{G}$

یک راه دیگر برای در نظر گرفتن شرایط بالا این است که یک تابع رنگ آمیزی قابل تعمیم تعریف کنیم که آن را به سمت محاسبه مقادیر متفاوت رنگ‌ها در بین یک اندازه عدم تجانس ببرد، که این عدم تجانس روی مجموعه رنگ‌ها و یک تابع وزن تعریف می‌شود و اجازه می‌دهد که وزن دو راس ناسازگار با استفاده از فاصله بین آنها اندازه‌گیری شود. این مفهوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳-۳[5]. فرض کنید S مجموعه رنگ‌های موجود باشد. قرار دهید d اندازه عدم تجانس باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d: S \times S \to [0, \infty)$$

با این خاصیت که

$$\forall r,s \in S \qquad d(r,s) \geq 0$$
$$\forall r,s \in S \;\; d(r,s) = 0 \;\Leftrightarrow\; r = s$$
$$\forall r,s \in S \qquad d(r,s) = d(s,r)$$

این اندازه عدم تجانس یعنی d می‌تواند برای محاسبه درجه ناسازگاری به کاربرده شود به این صورت که دو راس بیشتر ناسازگار، فاصله رنگ‌های مشترکشان بیشتر است. به همین ترتیب، تابع رنگ آمیزی تعمیم یافته را معرفی می‌کنیم:

نمادگذاری ۳-۴. برای I داده شده، تصویر تابع عضویت گراف فازی $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ را قرار دهید:

$$f: I \to [0, \infty)$$

که تابعی است نامنفی و غیر نزولی (با توجه با ترتیب $\prec$) ویک تابع حقیقی مقدار است، یعنی:

$$\forall \mu, \acute{\mu} \in I \qquad \mu \prec \acute{\mu} \quad \to \quad f(\mu) \leq f(\acute{\mu})$$

دو مفهوم اندازه عدم تجانس و تابع وزن تعریف زیر را نتیجه می‌دهد:

تعریف ۳-۵ [5]. فرض کنید $\tilde{G} = (V, \mu)$ یک گراف فازی باشد که همراه با مجموعه رنگ‌های S و تابع عدم تجانس d که روی S تعریف شده و تابع وزن f مفروض است. یک تابع $(d,f)-$رنگ آمیزی تعمیم یافته از گراف فازی $\tilde{G}$ که با $C_{\mathrm{d,f}}$، به اختصار C نمایش داده می‌شود، نگاشتی است به صورت:

$$C: V \to S$$

با این خاصیت که:

$$\forall i,j \in V \;\; i \neq j: \; d\big(C(i), C(j)\big) \geq f\big(\mu_{ij}\big)$$

یک $(d,f)-$ رنگ آمیزی k- تعمیم یافته که آن را با $C^{\mathrm{k}}_{\mathrm{d,f}}$ (به اختصار C^{k}) نشان می‌دهیم، یک تابع

(d,f)- رنگ آمیزی تعمیم یافته با حداکثر k رنگ است و داریم:

$C^{\mathrm{k}}: V \to S$

که در آن S به صورت $\{1, \dots, k\}$ است.

یک (d,f)- رنگ آمیزی k - تعمیم یافته از یک گراف فازی$\tilde{G} = (V,\mu)$ می‌تواند به عنوان تعمیمی از k - رنگ آمیزی ای از یک گراف کلاسیک یا معمولی $G = (V,E)$ در نظر گرفته شود. چون با قرار دادن $I = \{0,1\}$، $f(0) = 0$، $f(1) = 1$ و $d = d^0$ که به ازای هر $r,s \in S$

$$d^0(\mathrm{r,s}) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } r \neq s \\ 0 & \text{اگر } r = s \end{cases}$$

اگر ماتریس μ به صورت زیر تعریف شود، گراف $\tilde{G} = (V,\mu)$ به یک گراف کلاسیک یا معمولی تبدیل می‌شود:

$$\forall i,j \in V$$
$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 & \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{در بقیه حالات} \end{cases}$$

این مفهوم فازی جدید بعضی از تفاوت‌ها را با حالت کلاسیک نشان می‌دهد.

فرض کنید $G = (V,E)$ یک گراف کلاسیک باشد. در این صورت چون $\chi(G) \leq |V|$، لذا یک تابع رنگی برای G همیشه موجود است. بنابراین یک تابع رنگی بدیهی به ازای هر $i \in V$ مانند $C^{|V|} = i$ داریم. این در حالی است که برای یک گراف فازی داده شده $\tilde{G} = (V,\mu)$ یک تابع (d,f)- رنگ آمیزی تعمیم یافته برای $\tilde{G}$ همیشه وجود ندارد. مثال زیر را ببینید:

مثال ۳-۶ [5]. فرض کنید $\tilde{G} = (V,\mu)$ گرافی فازی با شرایط زیر باشد:

$$V = \{A,B,C\} \qquad I = \{n,h,l\}$$
$$\mu = \begin{bmatrix} - & l & h \\ l & - & n \\ h & n & - \end{bmatrix}$$

قرار دهید $S = \{1, \dots, k\}$ مجموعه رنگ‌ها باشد، $d = d^0$ و در نهایت تابع وزن f را به صورت زیر در نظر بگیرید:

I	n	l	h
$f(I)$	0	1	2

آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ هیچ تابع $(\mathrm{d,f})$- رنگ آمیزی k -تعمیم یافته وجود ندارد و به درستی برای هر k - رنگ آمیزی C^{k}، خواهیم داشت $d(C^{\mathrm{k}}(\mathrm{A}), C^{\mathrm{k}}(\mathrm{C})) \leq 1$ و $f(\mu_{AC}) = f(h) = 2$.

در نتیجه، بعضی از شرایط نظم دهی باید اعمال شود تا مطمئن شویم که هر زوج دلخواه از رئوس می‌تواند با رنگ‌های با فاصله مناسب با مفهوم تابع وزن رنگ آمیزی شود. به عبارت دیگر، دو راس i و j وجود خواهند داشت که به ازای هر $r,s \in S$، $d(r,s) < f(\mu_{ij})$ خواهد بود.

چنین شرط نظم دهی، شرط لازم برای وجود یک (d,f)- رنگ آمیزی k -تعمیم یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$\forall i,j \in V \;,\quad i \neq j, \qquad \exists r,s \in S, \quad d(r,s) \geq f(\mu_{ij}) \tag{1}$$

توجه کنید که این شرط در مثال بالا برقرار نیست چون به ازای هر $r,s \in S$ داریم:

$$d(r,s) < 2 = f(\mu_{AC})$$

شرط (1) به طور بدیهی برقرار است. در نتیجه، با قرار دادن $I = \{0,1\}$ و $d = d^0$ و $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$، اگر ماتریس μ به صورت زیر تعریف شود، گراف $\tilde{G} = (V,\mu)$ به یک گراف کلاسیک تبدیل می‌شود:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 & \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{در بقیه حالات} \end{cases}$$
$$\forall i,j \in V$$

و خاصیت $d(C^{\mathrm{k}}(i), C^{\mathrm{k}}(\mathrm{j})) \geq f(\mu_{ij})$ معادل است با این که:

$$\{i,j\} \in E \Rightarrow C^{\mathrm{k}}(i) \neq C^{\mathrm{k}}(\mathrm{j})$$

تفاوت دیگر با توجه به k– رنگ آمیزی کلاسیک است که در یک (d,f)– رنگ آمیزی k –تعمیم یافته ممکن است تعدادی رنگ به راس‌ها اختصاص داده نشود.

مثال ۳–۷ [5]. قرار دهید $\tilde{G}=(V,\mu)$ یک گراف فازی با شرایط زیر باشد:

$$V=\{A,B,C,D\}$$
$$I=\{n,l,m,h,t\}$$
$$\mu=\begin{pmatrix} - & h & l & t \\ h & - & m & n \\ l & m & - & m \\ t & n & m & - \end{pmatrix}$$

این گراف فازی در شکل ۴ نشان داده شده است.
قرار دهید $S=\{1,2,3,4\}$ مجموعه رنگ‌ها باشد و d اندازه عدم تجانس به صورت جدول ۲ تعریف شود.
تابع وزن به صورت زیر تعریف می‌شود:

I	n	m	l	h	t
$f(I)$	0	1	2	3	4

یک (d,f)– رنگ آمیزی 4 –تعمیم یافته به صورت زیر است:

$$C^4(A)=3,\quad C^4(B)=4,$$
$$C^4(C)=1,\quad C^4(D)=4$$

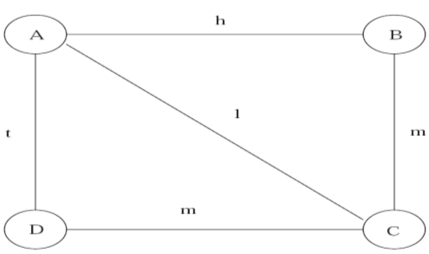
توجه کنید که به ازای هر $i\in V$ داریم:

$$C^4(i)\neq 2$$

عدد (d,f)– رنگی گراف فازی، مشابه حالت کلاسیک تعریف می‌شود. □

تعریف ۳–۸ [5]. فرض کنید گراف فازی $\tilde{G}$ به همراه یک اندازه عدم تجانس d و یک تابع وزن f داده شده باشد. در این صورت کمترین مقدار k را که یک (d,f)– رنگ آمیزی k –تعمیم یافته برای $\tilde{G}$ وجود داشته باشد، عدد (d,f)– رنگی گراف فازی $\tilde{G}$ می‌نامیم و آن را با $\chi_{\mathrm{d,f}}(\tilde{G})$ نشان می‌دهیم.
مساله (d,f)– رنگ آمیزی شامل تعیین عدد (d,f)– رنگی گراف فازی و تابع (d,f)– رنگ آمیزی تعمیم یافته وابسته آن می‌باشد.
در مثال۳–۲ مربوط به برگزاری آزمون برای آن رنگ‌هایی که به دوره‌های زمانی اختصاص می‌یابند اندازه عدم تجانس d را به صورت زیر برای هر $r,s\in S$ تعریف می‌کنیم:

$$d(r,s)=|r-s|$$



شکل ٤. گراف فازی مثال ۳–۷

v	3	2	1	$d(r,s)$
2	2	1	0	1
1	1	0	1	2
4	0	1	2	3
0	4	1	2	4

جدول ۲. اندازه عدم تجانس مثال ۳–۷

به نحوی که دو دوره زمانی به وسیله تعداد دوره‌های زمانی بین آنها متمایز می‌شوند. در این مثال، تابع وزن f به وسیله جدول ۳ تعریف می‌شود. توجه کنید که با این اندازه عدم تجانس و تابع وزن، یک مقدار k به طوری که در شرط (1) صدق کند همیشه وجود خواهد داشت.
عدد (d,f)- رنگی گراف فازی $\tilde{G}$ برابر $\chi_{\mathrm{d,f}}(\tilde{G}) =$ 5 و تابع (d,f)- رنگ آمیزی 5- تعمیم یافته وابسته آن به صورت زیر است:

$C^5(A) = 1, \quad C^5(B) = 2,$
$C^5(C) = 5, \quad C^5(D) = 1,$

توجه کنید که با این اندازه عدم تجانس و تابع وزن، یک مقدار k به طوری که در شرط (1) صدق کند همیشه وجود خواهد داشت.
عدد (d,f)- رنگی گراف فازی $\tilde{G}$ برابر $\chi_{\mathrm{d,f}}(\tilde{G}) = 5$ و تابع (d,f)- رنگ آمیزی 5- تعمیم یافته وابسته آن به صورت زیر است:

$C^5(A) = 1, \quad C^5(B) = 2,$
$C^5(C) = 5, \quad C^5(D) = 1,$
$C^5(E) = 4, \quad C^5(F) = 3$

همانند حالت کلاسیک، عدد (d,f)- رنگی، مساله‌ی بهینه‌سازی یافتن کمترین تعداد رنگ مورد نیاز برای رنگ آمیزی گرافی که در برخی شرایط صدق می‌کند، را حل می کند.
در مثال ۳-۲ مربوط به برگزاری آزمون، برنامه بهینه، با استفاده از تابع (d,f)- رنگ‌آمیزی تعمیم یافته مرتبط با عدد (d,f)- رنگی، به دست می‌آید.

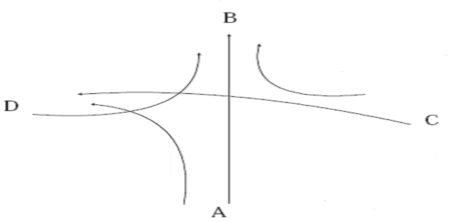
۴. مساله چراغ‌های راهنمایی

در این بخش می‌خواهیم مساله ای را تعریف و مدل‌سازی نماییم که مشکل بسیاری از شهرهای پرجمعیت یعنی ترافیک است. یکی از مشکلاتی که با آن روبرو هستیم مساله آمد و شد در گره‌های ترافیکی همانند چهارراه‌ها، میدان‌ها و پل‌هاست. کنترل ترافیک این گره‌ها با استفاده از ابزارهای بازدارنده همانند چراغ‌های راهنمایی انجام می‌گیرد. هدف این مساله این است که رفت و آمد در چهارراه‌ها و گره‌های ترافیکی به گونه‌ای انجام پذیرد که بیشترین سطح ایمنی ترافیک و رفت و آمد در آن برقرار باشد. مدل‌سازی ریاضی مساله در این بخش با استفاده از نظریه گراف فازی و رنگ آمیزی آن انجام می‌گیرد.
در ابتدای این بخش با یک مثال خواننده را با مساله آشنا می‌سازیم.

مثال ٤-١. جریان ترافیکی در تقاطع دو خیابان همسطح به صورت شکل ۵ نمایش داده شده است.
بعضی از مسیرها همانند AD و BC سازگارند چون تصادمی با هم ندارند، در حالی که بقیه مسیر ها مانند AB و CD ناسازگارند. برای جلوگیری از تصادم، می‌خواهیم یک سامانه چراغ راهنمایی راه اندازی کنیم که رفت و آمدها را کنترل کند.

I	n	l	m	h
$f(I)$	0	1	2	3

جدول ۳. تابع وزن مثال ۳-۲



شکل ۵. جریان ترافیکی

این مساله را به وسیله گرافی همانند $G=(V,E)$ مدلسازی می‌کنیم به این صورت که مسیرها را رئوس گراف و زوج‌هایی از مسیرها را یال می‌گیریم هرگاه ناسازگار باشند که ممکن است باعث تصادف شوند. در این مثال داریم:

$$V=\{AB,AD,CB,CD,DB\}$$
$$E=\{\{AB,CD\},\{AD,DB\},\{CD,DB\}\}$$

این گراف در شکل ۶ نشان داده شده است.

هر k– رنگ آمیزی C^k از گراف G یک خط مشی کنترل سامانه چراغ‌ها می‌باشد. هر دور کامل سامانه چراغ‌ها می‌تواند به k دوره زمانی تقسیم شود. برای هر دوره زمانی $c\in\{1,\dots,k\}$، حرکت چرخشی i به طوری که $C^{\mathrm{k}}(\mathrm{i})=\mathrm{c}$ باشد، فقط یکبار مجاز است. بنابراین عدد رنگی $\chi(\mathrm{G})$، کمترین تعداد دوره زمانی لازم برای کنترل سامانه چراغ‌ها را می‌دهد. در این مثال عدد رنگی G برابر ۲ است و ۲– رنگ‌آمیزی آن به صورت زیر است:

$$C^2(AB)=1,\ C^2(AD)=2,\ C^2(CB)=1$$
$$C^2(CD)=2\ ,\ C^2(DB)=1$$

به سادگی مشاهده می‌شود که، خط مشی کنترل چراغ‌ها بستگی به ناسازگاری مسیرها دارد. مفهوم ناسازگاری می‌تواند فازی و درجه‌بندی شود. این درجه‌بندی که نیاز نیست به صورت عددی باشد، به سطح امنیت قابل قبول برای جریان ترافیکی در گوشه‌ها بستگی دارد. بیشترین امنیت وقتی به دست می‌آید که همه مسیرهای مفروض ناسازگار و گراف کامل باشد. در این حالت، عدد رنگی برابر تعداد مسیرهاست و خط مشی کنترل چراغ‌ها مجاب می‌کند که فقط یک حرکت در هر دوره زمانی از دور مجاز است. به عبارت دیگر، کمترین سطح امنیت زمانی به دست می‌آید که مجموعه یال‌های ناسازگار تهی باشد. در این حالت، عدد رنگی برابر یک است و همه حرکت‌ها در هر جهتی مجاز است. در مثال بالا، مسیرهای CD و DB بیشتر از مسیرهای AB و DB ناسازگار هستند. قرار دهید $I=\{n,l,m,h,t\}$ که n و l و m و h و t به ترتیب درجه ناسازگاری پوچ (null)، کم (low)، متوسط (medium)، زیاد (high) و کامل (total) می‌باشند. مساله ذکر شده در این مثال را با مفهوم گراف‌های فازی مدل‌سازی می‌کنیم.

گراف فازی $\tilde{G}=(V,\mu)$ را در نظر می‌گیریم که در آن:

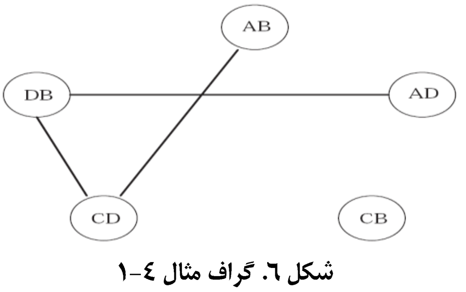
$$V=\{AB,AD,CB,CD,DB\}$$
$$\mu=\begin{pmatrix} - & n & l & h & l\\ n & - & n & m & h\\ l & n & - & n & n\\ h & m & n & - & h\\ l & h & n & h & - \end{pmatrix}$$

این گراف فازی در شکل ۷ نشان داده شده است:

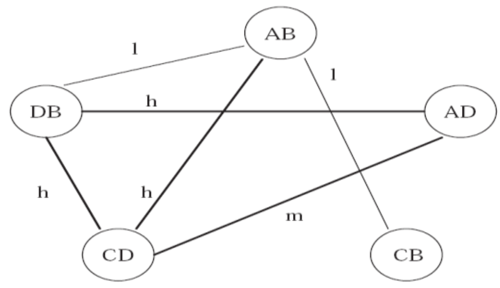
در مثال ۴–۱، پنج گراف کلاسیک $G_\alpha=(V,E_\alpha)$ با مقادیر $\alpha\in I$ به دست خواهد آمد که در جدول ۴ آورده شده است. برای هر $\alpha\in I$ جدول ۴ شامل مجموعه یال‌های E_α، عدد رنگی χ_α و یک χ_α – رنگ آمیزی $C_\alpha^{\chi_\alpha}$ می‌باشد.

می‌توان نشان داد که عدد رنگی $\tilde{G}$ برابر است با:

$$\chi(\tilde{G})=\{(1,t),(2,h),(3,m),(4,n),(5,n)\}$$



شکل ٦. گراف مثال ٤–١



شکل ۷. گراف فازی $\widetilde{G}$ مثال ٤-۱

α	E_α	χ_α	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(\mathrm{AB})$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(AD)$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(\mathrm{CB})$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(\mathrm{CD})$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(\mathrm{DB})$
n	$\{AB,AD\};\{AB,CB\};\{AB,CD\};\{AB,DB\};$ $\{AD,CB\};\{AD,CD\};\{AD,DB\};\{CB,CD\};$ $\{CB,DB\};\{CD,DB\}$	5	1	2	3	4	5
l	$\{AB,CB\};\{AB,CD\};\{AB,DB\};\{AD,CD\};$ $\{AD,DB\};\{CD,DB\}$	3	1	1	2	2	3
m	$\{AB,CD\};\{AD,CD\};\{AD,DB\};\{CD,DB\}$	3	1	3	1	2	1
h	$\{AB,CD\};\{AD,DB\};\{CD,DB\}$	2	1	2	1	2	1
t	$\emptyset$	1	1	1	1	1	1

جدول ٤. مجموعه یال‌های E_α ، عدد رنگی χ_α و یک χ_α – رنگ آمیزی $C_\alpha^{\chi_\alpha}$

تفسیر عدد رنگی گراف $\widetilde{G}$ یعنی $\chi(\widetilde{G})$ این است که مقدار کمتر α به راننده با سطح صلاحیت پایین‌تر تخصیص داده می‌شود و در نتیجه چراغ‌های راهنمایی باید محافظه کارانه کنترل شوند و عدد رنگی بالاست، از طرفی دیگر برای مقادیر بالاتر α، سطح صلاحیت راننده افزایش می‌یابد و عدد رنگی پایین است و اجازه می‌دهد که کنترل با محافظه کاری کمتری بر چراغ‌های راهنمایی اعمال شود و یک جریان ترافیک روان‌تری داشته باشیم.

در سال ۲۰۰۶ اصلاحچی و اونق در [1] نوع دیگری از رنگ آمیزی گراف فازی را معرفی کردند. آنها عدد رنگی فازی را کمترین مقدار k تعریف کردند که گراف فازی G یک k – رنگ آمیزی فازی داشته باشد که k – رنگ آمیزی فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۴-۲ [1]. یک خانواده $\Gamma = \{\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_k\}$ از زیر مجموعه های فازی روی V را یک k – رنگ آمیزی از گراف فازی $G = (V, E, \sigma, \mu)$ گوییم هرگاه:

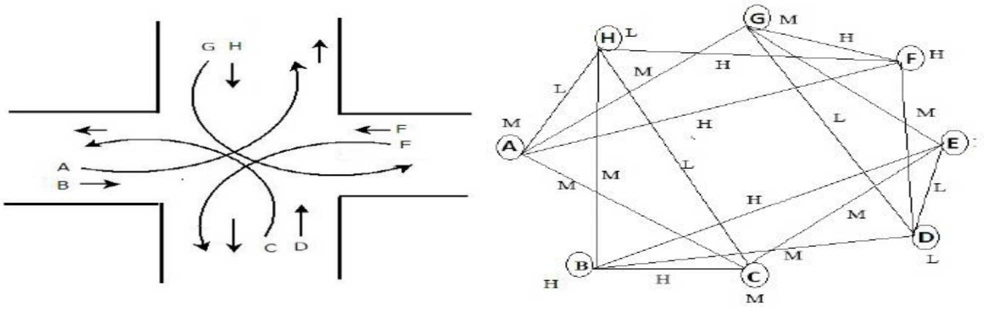
۱. $\vee\Gamma = \sigma$
۲. $\Upsilon_1 \wedge \Upsilon_2 = 0$
۳. برای هر یال قوی xy از G داشته باشیم:
$$\min\{\Upsilon_i(x), \Upsilon_i(y)\} = 0 \ (1 \le i \le k)$$

تذکر: یک یال xy در G را قوی می‌گوییم هرگاه x و y مجاور باشند و در غیر این صورت آن را ضعیف گوییم.

مثال ۴-۳: چهارراه شکل ۸ به همراه گراف فازی آن را در شکل زیر ملاحظه می‌نمایید. H، M، L به ترتیب نشان دهنده ترافیک زیاد، متوسط و کم می‌باشد.
می‌بینیم که خانواده $\Gamma = \{\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_4\}$ در شرایط تعریف بالا صدق می‌کند. در این صورت گراف بالا یک 4- رنگ آمیزی فازی را دارد. چون هیچ خانواده‌ای کوچکتری از مجموعه‌های فازی شرایط تعریف بالا را ندارد، پس این یک رنگ آمیزی فازی کمینه است.از این رو عدد رنگی فازی این گراف $\chi(G) = 4$ است. پس نیاز به چهار دوره زمانی برای چراغ‌های راهنمایی است.

نتیجه‌گیری و بحث

همان طور در تعاریف ذکر شده در مقاله دیدیم روش‌های گوناگونی برای رنگ آمیزی گراف‌های فازی معرفی شد مثلا با استفاده از $\alpha -$ برش‌ها یا با استفاده از $(d,f) -$ رنگ آمیزی، در نهایت با استفاده از تعریف مقاله [1] به تعریف مناسبی از رنگ آمیزی گراف دست یافتیم که از دو روش قبلی بهتر است.



شکل ۸. جریان ترافیکی

فهرست منابع

[1] Ch. Eslahchi, B. N. Onagh, Vertex-strength of fuzzy graphs, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, (2006), pages 1-9, ArticleID: 043614, DOI: 10.1155/ IJMMS/ 2006/ 43614

[2] A. Kishore, M. S. Sunitha, Chromatic number of fuzzy graphs, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7(4), (2014) 543-551.

[3] A. Kaufmann, Introduction à la théorie des sous-ensembles Nous, 1 Eléments théoriques de base. Paris: Masson et Cie; 1976.

[4] J. N. Mordeson, M. J. Wierman, T. D. Clark, A. Pham, M. A. Redmond, Linear Models in the Mathematics of Uncertainty. *Studies in Computational Intelligence*, vol. 463, Springer, Berlin, 2013.

[5] S. Munoz, M. T. Ortuno, J. Ramirez, J. Yanez, Coloring fuzzy graphs, Omega, Elsevier 33(3), (2005) 211 – 221.

[6] A. Rosenfeld, Fuzzy graphs. In: Zadeh LA, Fu KS, Shimura M, editors. *Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes*. New York: Academic Press; (1975), 77–95.

[7] S. Sovan, T. Pramanik, M. Pal, Fuzzy coloring of fuzzy graphs, *Afrika Matematica*, Volume 27(2), (2016) 37-50.

[8] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8 (1965) 338-353.

[9] L. A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, *Information Sciences*, 8(3) (1975) 199–249.