دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

وجود حداقل سه جواب ضعیف برای یک دستگاه شبه-خطی بیضوی

سعید شکوه*

استادیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبدکاووس، گنبدکاووس، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۲/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۰/۲۱

چکیده

در این مقاله با استفاده از قضیه‌هایی که توسط پروفسور ریچری در مقاله [۸] و پروفسور بونانno در مقاله [۶] اثبات شده است، وجود حداقل سه جواب ضعیف را برای یک دستگاه شبه‌خطی بیضوی ثابت خواهیم کرد. در واقع، ما به دستگاه معادله دیفرانسیل یک عملگر غیرخطی مشتق‌پذیر نسبت خواهیم داد به‌طوری‌که نقاط بحرانی این عملگر جواب‌های ضعیف از دستگاه موردنظر باشند.

واژه‌های کلیدی: مسائل مقدارمرزی، روش تغییراتی، سه جواب ضعیف.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:shokooh@gonbad.ac.ir

۱- مقدمه

در این مقاله وجود حداقل سه جواب ضعیف را برای دستگاه شبه‌خطی زیر ثابت می‌نماییم:

$$
\begin{cases}
-div\left(\left(1+\dfrac{|\nabla u|^{p_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_1}}}\right)|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\right) \\
+a_1(x)|u|^{p_1-2}u = \lambda F_{u_1}(x,u_1,\dots,u_n) \\
+\mu G_{u_1}(x,u_1,\dots,u_n), \qquad in\ \Omega, \\
-div\left(\left(1+\dfrac{|\nabla u|^{p_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_2}}}\right)|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u\right) \\
+a_2(x)|u|^{p_2-2}u = \lambda F_{u_2}(x,u_1,\dots,u_n) \\
+\mu G_{u_2}(x,u_1,\dots,u_n), \qquad in\ \Omega, \\
. \\
. \\
. \\
-div\left(\left(1+\dfrac{|\nabla u|^{p_n}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_n}}}\right)|\nabla u|^{p_n-2}\nabla u\right) \\
+a_n(x)|u|^{p_n-2}u = \lambda F_{u_n}(x,u_1,\dots,u_n) \\
+\mu G_{u_n}(x,u_1,\dots,u_n), \qquad in\ \Omega, \\
\dfrac{\partial u_i}{\partial \nu}=0, \quad for\ 1\le i\le n, \quad on\ \partial\Omega
\end{cases}
$$

که $\Omega\subset{}^{n}$ ، (به ازای $N\ge 1$) دامنه کران‌دار با مرزی از کلاس C^1 می‌باشد. ν بردار یکه عمود بر Ω، $\lambda,\mu>0$، به‌ازای $1\le i\le n$، $a_i\in L^{\infty}(\Omega)$ و $p_i>N$ است. تابع $F:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ به‌گونه‌ای است که به‌ازای $(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$، $F(.,t_1,t_2,\dots,t_n)$ در Ω پیوسته و به‌ازای $x\in\Omega$ ، $F(x,\cdot,\dots,\cdot)$، در $\mathbb{R}^n$، C^1 است. هم‌چنین تابع $G:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را طوری در نظر می‌گیریم که به‌ازای $(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$، $G(.,t_1,t_2,\dots,t_n)$ در Ω اندازه‌پذیر و به‌ازای $x\in\Omega$، $G(x,\cdot,\dots,\cdot)$، در $\mathbb{R}^n$، C^1 است. مساله فوق را در ادامه $(N_{\lambda,\mu})$ می‌نامیم. در سال‌های اخیر دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی مورد توجه بسیاری از ریاضیدان‌ها بوده است. به‌عنوان مثال مقاله‌های [۱-۴] و مراجع موجود در آن‌ها را مشاهده نمایید. در [۱]، وجود بی‌نهایت جواب برای مساله زیر ثابت شده است:

$$
\begin{cases}
-(p_i-1)|u_i'(x)|^{p_i-2}u_i''(x)= \\
\lambda F_{u_i}(x,u_1,\dots,u_n)h_i(x,u_i'),\ x\in(a,b) \\
u_i(a)=u_i(b)=0, \quad for\ 1\le i\le n,
\end{cases}
$$

که h_iها توابع کران‌دار از مجموعه $[a,b]\times\mathbb{R}$ به $[0,+\infty)$ هستند. در مقاله [۴]، وجود سه جواب ضعیف برای دستگاه زیر بررسی شده است:

$$
\begin{cases}
-div\left(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\right) \\
+a_1(x)|u|^{p_1-2}u = \lambda F_{u_1}(x,u_1,\dots,u_n) \\
+\mu G_{u_1}(x,u_1,\dots,u_n), \qquad in\ \Omega, \\
-div\left(|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u\right) \\
+a_2(x)|u|^{p_2-2}u = \lambda F_{u_2}(x,u_1,\dots,u_n) \\
+\mu G_{u_2}(x,u_1,\dots,u_n), \qquad in\ \Omega, \\
. \\
. \\
. \\
-div\left(|\nabla u|^{p_n-2}\nabla u\right) \\
+a_n(x)|u|^{p_n-2}u = \lambda F_{u_n}(x,u_1,\dots,u_n) \\
+\mu G_{u_n}(x,u_1,\dots,u_n), \qquad in\ \Omega, \\
\dfrac{\partial u_i}{\partial \nu}=0, \quad for\ 1\le i\le n, \quad on\ \partial\Omega.
\end{cases}
$$

در مقاله [۷]، با استفاده از قضیه‌ایی که توسط ریچری اثبات شده است، نویسنده‌ها نشان دادند بازه‌ی باز $\Lambda\subseteq[0,+\infty)$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای $\lambda\in\Lambda$، دستگاه شبه‌خطی بیضوی زیر دارای دو جواب نابدیهی و مجزا می‌باشد:

$$
\begin{cases}
-\Delta_p u=\lambda F_u(x,u,v), & x\in\Omega, \\
-\Delta_q u=\lambda F_v(x,u,v) & x\in\Omega, \\
u=v=0 & x\in\partial\Omega.
\end{cases}
$$

همچنین نتایجی مشابه در مقاله [۳]، برای مساله زیر اثبات شده است:

$$\begin{cases} -div\left(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\right) \\ =\lambda F_{u_1}(x,u_1,\dots,u_n) \;\; in\ \Omega, \\ -div\left(|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u\right) \\ =\lambda F_{u_2}(x,u_1,\dots,u_n), \quad in\ \Omega, \\ . \\ . \\ . \\ -div\left(|\nabla u|^{p_n-2}\nabla u\right) \\ =\lambda F_{u_n}(x,u_1,\dots,u_n), \;\; in\ \Omega, \\ u_i=0, \;\; for\ \ 1\le i\le n, \quad on\ \partial\Omega \end{cases}$$

۲- ابزار و مفاهیم پایه

ابزار اصلی ما برای اثبات نتایج، قضیه زیر از پروفسور ریچری [۸] است.

قضیه ۲-۱

فرض نماییم X یک فضای باناخ انعکاسی حقیقی، $I\subseteq$ ، یک بازه، $\Phi: X\to\mathbb{R}$ یک تابعک نیم‌پیوسته پایینی C^1 باشد که روی هر زیر مجموعه کراندار از X کراندار است. همچنین فرض کنیم مشتق آن دارای وارون پیوسته روی X^* باشد و $J: X\to$ ، یک تابعک C^1 با مشتق فشرده باشد و به‌ازای هر $\lambda\in I$ ،

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\left(\Phi(x)+J(x)\right)=+\infty$$

و $\rho\in$ ، موجود باشد که

$$\sup_{\lambda\in I}\inf_{x\in X}\left(\Phi(x)+\lambda\left(J(x)+\rho\right)\right)< \inf_{x\in X}\sup_{\lambda\in I}\left(\Phi(x)+\lambda\left(J(x)+\rho\right)\right).$$

در این‌صورت یک مجموعه باز ناتهی $A\subseteq I$ و یک عدد مثبت q با خاصیت زیر موجود است:

در این‌صورت یک مجموعه باز ناتهی $A\subseteq I$ و یک عدد مثبت q با خاصیت زیر موجود است:
به‌ازای $\lambda\in A$ و به‌ازای تابعک $\Psi: X\to\mathbb{R}$ با مشتق فشرده، $\tau>0$ موجود است که برای هر $\mu\in[0,\tau]$ ، معادله

$$\Phi'(u)+\lambda J'(u)+\mu\Psi'(u)=0$$

دارای سه جواب ضعیف است.
در اثبات نتیجه اصلی از گزاره ذیل استفاده خواهیم نمود که در مقاله [۶] اثبات شده است.

گزاره ۲-۱

فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و Φ, J دو تابع روی X باشد. همچنین فرض کنیم به‌ازای $x\in X$، $\Phi(x)\ge 0$ باشد به‌طوری‌که $u_0\in X$ و $\Phi(u_0)=J(u_0)=0$. به‌علاوه فرض کنیم $u_1\in X$ و $r>0$ موجود باشد که

الف) $\Phi(u_1)>r$،

ب) $\sup_{\Phi(x)<r}\left(-J(x)\right)<r\frac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)}$.

در این‌صورت برای هر $\upsilon>1$ و برای هر $\rho\in$ ، صادق در

$$\frac{\sup_{\Phi(x)<r}(-J(x))+ r\frac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)}-\sup_{\Phi(x)<r}(-J(x))}{\upsilon}<\rho<r\frac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)},$$

خواهیم داشت

$$\sup_{\lambda\in ،}\inf_{x\in X}(\Phi(x)+\lambda(J(x)+\rho))< \inf_{x\in X}\sup_{\lambda\in[0,\sigma]}(\Phi(x)+\lambda(J(x)+\rho))$$

که

$$\sigma = \frac{\upsilon r}{r\dfrac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)} - \sup_{\Phi(x)<r}(-J(x))}.$$

برای استفاده از قضیه‌های فوق، فرض کنیم X حاصل ضرب دکارتی n فضای سوبولف $W^{1,p_1}(\Omega)$، $W^{1,p_2}(\Omega)$، ... و $W^{1,p_n}(\Omega)$، یعنی

$$X = W^{1,p_1}(\Omega)\times W^{1,p_2}(\Omega)\times\ldots\times W^{1,p_n}(\Omega)$$

باشد با نرم

$$\|(u_1,u_2,\ldots,u_n)\| = \|u_1\| + \|u_2\| + \ldots + \|u_n\|,$$

که

$$\|u_i\| = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_i(x)| + a_i(x)|u_i(x)|^{p_i}\right)dx\right)^{1/p_i}$$

به‌ازای $1\le i\le n$ است. فرض نماییم:

$$c = \max\left\{\sup_{u_i\in W^{1,p_i}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\max_{x\in\Omega}|u_i(x)|^{p_i}}{u_i^{p_i}}; 1\le i\le n\right\}.$$

از آن‌جا که $p_i > N$ به ازای $1\le i\le n$، $c<\infty$ است. از گزاره ۱.۴ در مقاله [۵]، خواهیم داشت:

$$\sup_{u_i\in W^{1,p_i}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\max_{x\in\Omega}|u_i(x)|^{p_i}}{u_i^{p_i}} > \frac{1}{\|a_i\|_1}$$

به ازای $1\le i\le n$، که $\|a_i\|_1 = \int_\Omega |a_i(x)|dx$ و بنابراین $\frac{1}{\|a_i\|_1}\le c$ به ازای $1\le i\le n$.

$$\sup_{u_i\in W^{1,p_i}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\max_{x\in\Omega}|u_i(x)|}{u_i} \le 2^{\frac{p_i-1}{p_i}} \max\left\{\left(\frac{1}{\|a_i\|_1}\right)^{\frac{1}{p_i}}; \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{N^{\frac{1}{p_i}}}\left(\frac{p_i-1}{p_i-N}\operatorname{diam}(\Omega)\right)^{\frac{p_i-1}{p_i}}\frac{a_{i\infty}}{a_{i1}}\right\}$$

به ازای $1\le i\le n$، که $\operatorname{diam}(\Omega)$ اندازه لبگ مجموعه Ω می‌باشد.

تعریف ۲-۱

یک جواب ضعیف از مساله $(N_{\lambda,\mu})$، تابع $u\in X$ است به‌طوری‌که در رابطه زیر صدق کند:

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i + \frac{|\nabla u_i|^{2p_i-2}\nabla u_i}{\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i}}}\right)\nabla v_i dx$$
$$+\int_\Omega\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_i|^{p_i-2}u_iv_i dx$$
$$-\lambda\int_\Omega\sum_{i=1}^n F_{u_i}(x,u_1(x),\ldots,u_n(x))v_i(x)\,dx$$
$$-\mu\int_\Omega\sum_{i=1}^n G_{u_i}(x,u_1(x),\ldots,u_n(x))v_i(x)\,dx = 0$$

به‌ازای هر $(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in X$.

۳- نتایج اصلی

در این فصل نتایج اصلی و اثبات آن‌ها ذکر خواهد شد. ابتدا به‌ازای $u\in X$ تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(u) := \int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}\left(|\nabla u_i|^{p_i} + \sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i}}\right)dx,$$
$$+\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{p_i}a_i(x)|u_i|^{p_i}\right)dx.$$

مشابه روش ارائه شده در مقاله [۹]، می‌توان ثابت کرد تابع فوق دارای مشتق گاتو به‌صورت زیر است:

$$\Phi'(u)(v) =$$
$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i + \frac{|\nabla u_i|^{2p_i-2}\nabla u_i}{\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i}}}\right)\nabla v_i dx$$
$$+\int_\Omega\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_i|^{p_i-2}u_iv_i dx$$

به‌ازای $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in X$ و $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$.
اینک قضیه اصلی را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳-۱

فرض کنیم تابع $F:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ به‌گونه‌ای است که به‌ازای $(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathbb{R}^n$، $F(.,t_1,t_2,...,t_n)$ در Ω پیوسته و به‌ازای $x\in\Omega$، $F(x,\cdot,...,\cdot)$ در $\mathbb{R}^n$، C^1 است. همچنین فرض کنیم عدد مثبت r و تابع $u^*=(u_1^*,...,u_n^*)\in X$ موجود است به‌طوری‌که

الف) $\Phi(u^*)>r$،

ب) همچنین عدد مثبت $\eta>0$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\limsup_{(|t_1|,...,|t_n|)\to(+\infty,...,+\infty)}\frac{F(x,t_1,t_2,...,t_n)}{\frac{1}{p_1}|t_1|^{p_1}+...+\frac{1}{p_n}|t_n|^{p_n}} < \frac{1}{r\eta}\,\frac{1}{c\,\mathrm{diam}(\Omega)}$$

و

$$r\frac{\int_\Omega F(x,u_1^*(x),...,u_n^*(x))\,dx}{\Phi(u^*)}-\int_\Omega \max_{(x,t_1,t_2,...,t_n)\in K_1} F(x,t_1,t_2,...,t_n)\,dx>\frac{1}{\eta},$$

که

$$K_1=\left\{(t_1,t_2,...,t_n);\sum_{i=1}^{n}\frac{|t_i|^{p_i}}{p_i}\le cr\right\}.$$

پ) به‌ازای $x\in\Omega$، تقریباً همه‌جا، $F(x,0,...,0)=0$ آنگاه بازه باز ناتهی‌ایی $A\subseteq(0,r\eta]$ و عدد مثبت q موجود است با خاصیت زیر:

به‌ازای $\lambda\in A$ و تابع $G:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ که به‌ازای $(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathbb{R}^n$، $G(.,t_1,t_2,...,t_n)$ در Ω اندازه‌پذیر و به‌ازای $x\in\Omega$، $G(x,\cdot,...,\cdot)$ در $\mathbb{R}^n$، C^1 است، $\delta>0$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای $\mu\in[0,\delta]$ مساله $(N_{\lambda,\mu})$ دارای سه جواب ضعیف در X است که نرم آن‌ها از q کمتر است.

برهان: می‌خواهیم با استفاده از قضیه ۲-۱ موضوع را ثابت نماییم. تابع $\Phi:X\to\mathbb{R}$ و فضای X را مانند قبل درنظر می‌گیریم. تابع $J:X\to\mathbb{R}$ را به‌ازای $u\in X$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(u):=-\int_\Omega F(x,u_1(x),...,u_n(x))dx\,.$$

تابع Φ روی هر مجموعه کراندار از X کراندار، به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر و نیم‌پیوسته ضعیف پایینی است که مشتق آن روی X^* وارون پیوسته دارد. چون به‌ازای $1\le i\le n$، $p_i>N$ است، پس تابعک $J:X\to\mathbb{R}$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر با مشتق فشرده است. به‌ازای $v=(v_1,v_2,...,v_n)\in X$ و $u=(u_1,u_2,...,u_n)\in X$ داریم:

$$\Phi'(u)(v)=\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i\right)\nabla v_i dx$$
$$+\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|\nabla u_i|^{2p_i-2}\nabla u_i}{\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i}}}\right)\nabla v_i dx$$
$$+\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_i|^{p_i-2}u_iv_i\,dx$$

و

$$J'(u)(v)=-\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}F_{u_i}(x,u_1,...,u_n)v_i dx.$$

با توجه به فرض (ب) دو ثابت $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ با شرط $0<\alpha<\frac{1}{\beta}$ موجود است به‌طوری‌که

$$c\,\mathrm{diam}(\Omega)\,F(x,t_1,t_2,...,t_n)\le$$
$$\alpha\left(\frac{1}{p_1}|t_1|^{p_1}+...+\frac{1}{p_n}|t_n|^{p_n}\right)+\beta$$

به ازای $x\in\Omega$ و $t\in\mathbb{R}$. درنظر بگیریم $u=(u_1,...,u_n)\in X$، آن‌گاه

$$F(x,u_1(x),...,u_n(x))\le\frac{\beta}{c\,\mathrm{diam}(\Omega)}$$
$$+\frac{\alpha}{c\,\mathrm{diam}(\Omega)}\left(\frac{1}{p_1}|u_1|^{p_1}+...+\frac{1}{p_n}|u_n|^{p_n}\right)$$

برای هر $x\in\Omega$. به ازای $\lambda\in(0,r\eta]$، از آن‌جا که

$$\sup_{x\in\Omega}|u_i(x)|^{p_i}\le c\|u_i\|^{p_i}$$

به ازای $1\le i\le n$، با توجه به روابط بالا خواهیم داشت:

$$\Phi(u)+\lambda J(u)\ge\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}|\nabla u_i|^{p_i}dx$$
$$+\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}(\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i}}+a_i|u_i|^{p_i})dx$$
$$-\lambda\int_\Omega F(x,u_1(x),...,u_n(x))dx.$$
$$\ge\sum_{i=1}^n\frac{\|u_i\|^{p_i}}{p_i}-\frac{\lambda\beta}{c}$$
$$-\frac{\alpha\lambda}{c\,\mathrm{diam}(\Omega)}\int_\Omega\left(\frac{1}{p_1}|u_1|^{p_1}+...+\frac{1}{p_n}|u_n|^{p_n}\right)dx$$
$$=(1-\alpha r\eta)\sum_{i=1}^n\frac{\|u_i\|^{p_i}}{p_i}-\frac{\lambda\eta\beta}{c},$$

به ازای $u\in X$، و بنابراین

$$\lim_{\|u\|\to+\infty}(\Phi(u)+\lambda J(u))=+\infty.$$

برای بررسی سایر فرض‌های قضیه ۲-۱ از گزاره ۲-۱ استفاده می‌کنیم. با توجه به فرض (الف) از این قضیه و با توجه به تعریف Φ، فرض (الف) از گزاره ۲-۱ را خواهیم داشت. به‌علاوه

$$\sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^n\frac{|u_i(x)|^{p_i}}{p_i}\le c\sum_{i=1}^n\frac{\|u_i\|^{p_i}}{p_i}$$

از طرفی روابط زیر را داریم:

$$\Phi^{-1}((-\infty,r))=\{u=(u_1,...,u_n)\in X:\Phi(u)<r\}$$
$$\subseteq\left\{(u_1,...,u_n)\in X:\sum_{i=1}^n\frac{\|u_i\|^{p_i}}{p_i}<r\right\}$$
$$\subseteq\left\{(u_1,...,u_n)\in X:\sum_{i=1}^n\frac{|u_i|^{p_i}}{p_i}<cr,\ \forall x\in\Omega\right\},$$

حال چون

$$r\frac{\int_\Omega F(x,u_1^*(x),...,u_n^*(x))\,dx}{\Phi(u^*)}-\int_\Omega\max_{(x,t_1,...,t_n)\in K_1}F(x,t_1,...,t_n)\,dx>\frac{1}{\eta}>0,$$

خواهیم داشت:

$$r\frac{\int_\Omega F(x,u_1^*(x),...,u_n^*(x))\,dx}{\Phi(u^*)}>\int_\Omega\max_{(x,t_1,...,t_n)\in K_1}F(x,t_1,...,t_n)\,dx,$$

بنابراین

$$\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))<r\frac{\int_\Omega F(x,u_1^*,...,u_n^*)\,dx}{\Phi(u^*)}$$

و در نتیجه

$$\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))<r\frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)}.$$

فرض (ب) را به یاد داریم که

$$\eta>\frac{1}{r\frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)}-\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))}.$$

قرار می‌دهیم

$$v=\eta\left(r\frac{-J(w)}{\Phi(w)}-\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}-J(u)\right),$$

که $v>1$ است. چون

$$\eta>\frac{1}{r\frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)}-\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))}$$

خواهیم داشت:

$$\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))+\frac{1}{\eta}<r\frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)},$$

و در نتیجه با انتخاب v داریم:

$$\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))+\frac{r\dfrac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)}-\sup_{\Phi(u)<r}(-J(u))}{v}<r\frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)}.$$

حال با توجه به گزاره ۲-۱ (با $u_0=0$ و $u_1=u^*$) به ازای هر $\rho\in$ ، صادق در

$$\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))+\frac{r\dfrac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)}-\sup_{\Phi(u)<r}(-J(u))}{v}<\rho<r\frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)},$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\sup_{\lambda\in،}\inf_{u\in X}(\Phi(u)+\lambda J(u)+\rho\lambda)<\inf_{u\in X}\sup_{[0,r\eta]}(\Phi(u)+\lambda J(u)+\rho\lambda).$$

به‌ازای هر تابع کاراتئودری ثابت $g:\Omega\times$ ، $\to$ ، قرار می‌دهیم:

$$\Psi(u)=-\int_\Omega G(x,u_1(x),\dots,u_n(x))\,dx.$$

تابع Ψ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است که مشتق آن در نقطه $u\in X$ تابعک $\Psi'(u)\in X^*$ است و برابر با

$$\Psi'(u)(v)=-\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}G_{u_i}(x,u_1,\dots,u_n)\,v_i\,dx$$

به‌ازای $v=(v_1,\dots,v_n)\in X$ می‌باشد. هم‌چنین تابعک $\Psi':X\to X^*$ عملگر فشرده است. پس همه شرط‌های قضیه ۲-۱ برقرار است و باتوجه به اینکه نقاط بحرانی تابعک $\Phi(u)+\lambda J+\mu\Psi$ دقیقا جواب‌های ضعیف مساله $(N_{\lambda,\mu})$ است (با توجه به تعریف ۲-۱)، بنابراین مساله $(N_{\lambda,\mu})$ حداقل سه جواب ضعیف در X است که نرم آن‌ها کمتر از q است. بنابراین حکم برقرار است. وقتی $\mu=0$ است، قضیه ۳-۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

قضیه ۳-۲

فرض کنیم تابع $F:\Omega\times$ ، $^n\to$ ، به‌گونه‌ای است که به‌ازای $(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ ، $F(.,t_1,t_2,\dots,t_n)$ در Ω پیوسته و به‌ازای $x\in\Omega$ ، $F(x,\cdot,\dots,\cdot)$ در ، ^{n} ، C^1 است. هم‌چنین فرض کنیم عدد مثبت r و تابع $u^*=(u_1^*,\dots,u_n^*)\in X$ موجود باشد به‌طوری‌که:

الف) $\Phi(u^*)>r$ ،

ب) هم‌چنین عدد مثبت $\eta>0$ موجود است به‌طوری‌که

$$\limsup_{(|t_1|,\dots,|t_n|)\to(+\infty,\dots,+\infty)}\frac{F(x,t_1,\dots,t_n)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}|t_i|^{p_i}}<\frac{1}{r\eta c\,\operatorname{diam}(\Omega)}$$

و

$$r\frac{\int_\Omega F(x,u_1^*,\dots,u_n^*)\,dx}{\Phi(u^*)}-\int_\Omega\max_{(x,t_1,\dots,t_n)\in K_1}F(x,t_1,\dots,t_n)\,dx>\frac{1}{\eta},$$

که

$$K_1=\left\{(t_1,\dots,t_n);\sum_{i=1}^{n}\frac{|t_i|^{p_i}}{p_i}\le cr\right\}.$$

پ) به‌ازای $x\in\Omega$ ، تقریبا همه‌جا، $F(x,0,\dots,0)=0$.

آن‌گاه بازه باز ناتهی‌ایی $A\subseteq(0,r\eta]$ و عدد مثبت q موجود است که به‌ازای $\lambda\in A$ مساله

$$\begin{cases} -div\left(\left(1+\dfrac{|\nabla u|^{p_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_1}}}\right)|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\right) \\ +a_1|u|^{p_1-2}u = \lambda F_{u_1}(x,u_1,...,u_n),\ in\ \Omega, \\ -div\left(\left(1+\dfrac{|\nabla u|^{p_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_2}}}\right)|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u\right) \\ +a_2|u|^{p_2-2}u = \lambda F_{u_2}(x,u_1,...,u_n),\ in\ \Omega, \\ . \\ . \\ . \\ -div\left(\left(1+\dfrac{|\nabla u|^{p_n}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_n}}}\right)|\nabla u|^{p_n-2}\nabla u\right) \\ +a_n|u|^{p_n-2}u = \lambda F_{u_n}(x,u_1,...,u_n),\ in\ \Omega, \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu}=0,\quad for\ \ 1\le i\le n,\quad on\ \partial\Omega \end{cases}$$

دارای سه جواب ضعیف در X است که نرم آن‌ها از q کمتر است.

سپاس‌گذاری:

این مقاله مستخرج از طرح به شماره ۶/۵۱۷ می‌باشد. نویسنده از دانشگاه گنبدکاووس جهت حمایت کمال قدردانی و تشکر را دارد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله وجود سه‌جواب برای یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل ثابت شد. خواننده‌های محترم می‌توانند از ابزار مطرح در این پژوهش استفاده کرده و در خصوص وجود جواب برای مسائل مختلف مطالعه نمایند.

فهرست منابع

[1] G. A. Afrouzi, A. Hadjian, Infinitely many solutions for a class of Dirichlet quasilinear elliptic systems, J. Math. Anal. Appl. 393, 265–272 (2012).

[2] G. A. Afrouzi, A. Hadjian, N. B. Zographopoulos, Multiple nonsemitrivial solutions for a class of degenerate quasilinear elliptic systems, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 45, 385–397 (2015) .

[3] G. A. Afrouzi, S. Heidarkhani, Existence of three solutions for a class of Dirichlet quasilinear elliptic systems involving the $(p_1, \ldots, p_n)$- Laplacian, Nonlinear Anal. 70, No. 1, 135-143 (2009).

[4] G. A. Afrouzi, S. Heidarkhani, D. O'Regan, Three solutions to class of Neumann doubly eigenvalue elliptic systems driven by a $(p_1, \ldots, p_n)$-Laplacian, Bull. Korean Math. Soc. 47, No. 6, 1235-1250 (2010).

[5] G. Anello, G.Cordaro, An existence theorem for the Neumann problem involving the $p-$Laplacian, J. Convex Anal. 10, 185-198 (2003).

[6] G. Bonanno, Some remarks on a three critical points theorem, Nonlinear Anal., 54, 651-665 (2003).

[7] A. Kristaly, Existence of two non-trivial solutions a class of quasilinear elliptic variational systems on strip-like domains, Proc. Edinb. Math. Soc. 48, 465-477 (2005).

[8] B. Ricceri, A three critical points theorem revisited, Nonlinear Anal., 70, 3084-3089 (2009).

[9] M. Manuela Rodrigues, Multiplicity of solutions on a nonlinear eigenvalue problem for $p(x)$- Laplacian- like operators, Mediterr. J. Math., 9, 211-223 (2012).