دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

تقریب ضرایب برای رده‌ای از توابع دو-تک ارز مرومورفیک

صفا صالحیان[۱*]، احمد معتمدنژاد[۲]

(۱) استادیار، گروه ریاضی، واحد گرگان، دانشگاه آزاد اسلامی، گرگان، ایران
(۲) دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۷/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۲/۱۶

چکیده

رده Σ را خانواده توابع مرومورفیک[1] f به فرم $\mathrm{f(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}}$ در نظر می‌گیریم که بر دامنه $\Delta = \{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < \infty\}$ تک ارز[۲] (تحلیلی و یک به یک) باشند. تابع تک ارز f را دو- تک ارز مرومورفیک گوییم هرگاه وارون آن نیز تک ارز باشد، یعنی $f^{-1} \in \Sigma$. رده همه توابع دو- تک ارز مرومورفیک را با نماد $\Sigma_{\mathcal{B}}$ نشان می‌دهیم. اخیراً زیر رده‌های مختلفی از توابع دو- تک ارز مرومورفیک توسط محققین معرفی شده است. در این مقاله، ابتدا مشتق q-ام[۳] را تعریف و سپس به کمک مشتق q-ام زیر رده جدید $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ از توابع دو- تک ارز مرومورفیک[۴] را بر روی دامنه $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ معرفی و بررسی می‌کنیم. این رده تعمیم رده‌های متعددی می‌باشد که توسط پژوهشگران مختلف معرفی شده است. در ادامه با استفاده از بسط چند جمله‌ای فابر[۵]، ضرایب اولیه b_0، b_1، b_2 و عمومی b_n مربوط به توابع متعلق به رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ را بدست می‌آوریم. در انتها، کران بالایی برای ضرایب اولیه $|b_0|$، $|b_1|$، $|b_2|$ و عمومی $|b_n|$ را نیز محاسبه می‌کنیم. نتایج بدست آمده در این مقاله، کارهای مربوط به چندین نویسنده پیشین را تعمیم و بهبود می‌بخشد.

واژه‌های کلیدی: تقریب ضرایب، چند جمله‌ای فابر، توابع مرومورفیک، توابع دو- تک ارز مرومورفیک، مشتق q-ام.

*. عهده دار مکاتبات: s.salehian84@gmail.com

1. Meromorphic function
2. Univalent (Analytic and one to one)
3. q-derivative
4. Meromorphic bi-univalent function
5. Faber polynomial

۱- مقدمه

فرض کنید Σ رده توابع مرومورفیک به شکل زیر باشد

$$f(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad (۱)$$

به طوری که تابع $f(z)$ بر دامنه

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$$

تک ارز (تحلیلی و یک به یک) است. از آنجاییکه تابع $f \in \Sigma$ تک ارز است لذا دارای وارونی به شکل زیر می‌باشد:

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad (z \in \Delta)$$

و

$$f(f^{-1}(w)) = w \ (M < |w| < \infty, M > 0).$$

با استفاده از چند جمله ای فابر ضرایب تابع وارون $g(w) = f^{-1}(w)$، بصورت زیر بدست می‌آید.
(برای جزئیات بیشتر منابع [۱و۲] را مشاهده نمایید).

$$g(w) = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{w^n}$$
$$= w - b_0$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{n+1}^n \frac{1}{w^n} \ (M < |w| < \infty) \qquad (۲)$$

بطوریکه

$$K_{n+1}^n = n\, b_0^{n-1} b_1 + n(n-1) b_0^{n-2} b_2$$
$$+ \frac{1}{2} n(n-1)(n-2) b_0^{n-3}(b_3 + b_1^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} b_0^{n-4}(b_4 + 3b_1 b_2) +$$
$$\sum_{j\geq 5}^{\infty} b_0^{n-j} V_j$$

به طوری که $V_j (5 \leq j \leq n)$ چند جمله‌ای همگن از درجه j برحسب متغیرهای $b_1, b_2, \ldots, b_n$ می‌باشند.
تابع $f \in \Sigma$ را دو- تک ارز مرومورفیک گویند هرگاه وارون آن نیز تک ارز باشد، یعنی $f^{-1} \in \Sigma$. رده همه توابع دو-تک ارز مرومورفیک را با نماد $\Sigma_{\mathcal{B}}$ نمایش می‌دهند.
در زمینه یافتن کران برای ضرایب توابع تک ارز مرومورفیک مطالعات زیادی انجام گرفته است. برای مثال، اسچیفر [۱۱] نشان داد اگر f تابع تک ارز مرومورفیک و $b_0 = 0$ آنگاه $|b_2| \leq \frac{2}{3}$. سپس در سال ۱۹۷۱، دورن [۴] ثابت کرد اگر f یک تابع تک ارز مرومورفیک با شرط $b_k = 0$ برای $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ باشد آنگاه $|b_n| \leq \frac{2}{n+1}$.
اخیراً، بسیاری از پژوهشگران مانند بولت و همکارانش [۳]، حمیدی و همکارانش [۵] رده‌هایی از توابع دو- تک ارز مرومورفیک را معرفی کردند. (برای مطالعه بیشتر به منابع [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۳] و [۱۴] مراجعه نمایید).
هدف ما در این مقاله معرفی رده جدیدی از توابع دو- تک ارز مرومورفیک است که تعمیمی از رده‌های پیشین است. نتایجی که بدست می‌آوریم تعمیم و بهبودی از نتایج مراجع [۳] و [۵] است.
نتیجه ۱۵، که در انتهای مقاله آن‌را بدست می‌آوریم، بهبودی از قضیه ۲ بدست آمده در مرجع [۵] است. چون بدون شرط $(*)$ آن‌را بدست آورده‌ایم.

تعریف ۱ [۵]: تابع دو- تک ارز مرومورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) را متعلق به زیررده $\Sigma\mathscr{B}(\alpha, \lambda)$ گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$Re\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z)\right) > \alpha$$
$$(\lambda \geq 1, 0 \leq \alpha < 1, z \in \Delta)$$

و

$$Re\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w)\right) > \alpha$$
$$(\lambda \geq 1, 0 \leq \alpha < 1, w \in \Delta),$$

بطوریکه تابع g وارون تابع f است که در رابطه (۲) آمده است.

قضیه ۲ [۵]: فرض کنید تابع دو- تک ارز مرومورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ متعلق به زیررده $\Sigma\mathscr{B}(\alpha, \lambda)$ باشد. اگر شرط $b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0 \quad (*)$ برقرار باشد. آنگاه:

$$|b_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{(n+1)\lambda - 1} \quad (n \geq 1).$$

برای اثبات قضایای اصلی به لم زیر نیاز داریم.

لم ۳ [۴]: فرض کنید تابع

$p(z) = 1 + \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \cdots$

بر روی دامنه $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ تحلیلی و $Re(p(z)) > 0$ باشد. آنگاه برای هر عدد طبیعی i داریم: $|p_i| \leq 2\ ;\ (i \in \mathbb{N})$.

۲- کران بالایی برای ضرایب توابع متعلق به رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$

در این بخش رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ را با استفاده از مشتق q-ام معرفی و بررسی می‌کنیم.
همچنین، با استفاده از بسط چند جمله‌ای فابر کران بالایی برای ضرایب عمومی $|b_n|$ از توابع متعلق به این رده را بدست می‌آوریم.
مشتق q-ام که تعمیمی از مشتق معمولی است توسط سریواستاوا [۱۲] به صورت زیر تعریف شده است.

تعریف ۴ [۱۲]: عدد حقیقی $0 < q < 1$ را در نظر بگیرید. مشتق q-ام تابع $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_q f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z}.$$

با استفاده از تعریف فوق در حالتی که تابع f به فرم (۱) باشد، مشتق q-ام تابع f بر اساس بسط ضرایب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$D_q f(z) = 1 + \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{[n]_q b_n}{z^{n+1}},$$

بطوریکه

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{q^n (q-1)}.$$

تبصره ۵: هرگاه $q \to 1^-$، آنگاه $[n]_q \to -n$. بنابراین $\lim_{q\to 1^-} D_q f(z) = f'(z)$. همچنین برای توابع $f, g \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ روابط زیر برقرار است:

$$D_q\big(f(z) + g(z)\big) = D_q f(z) + D_q g(z)$$

و

$$D^2{}_q f(z) = D_q\Big(D_q f(z)\Big) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{[n]_q [n+1]_q b_n}{z^{n+2}}.$$

بعلاوه، $\lim_{q\to 1^-} D^2{}_q f(z) = f''(z)$.
حال با استفاده از مشتق q-ام رده زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶: تابع دو- تک ارز مرومورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) را متعلق به رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$Re((1 - \lambda + 2\delta)\frac{f(z)}{z} + (\lambda - 2\delta)D_q f(z) + \delta z D^2{}_q f(z)) > \alpha$$
$$(\lambda \geq 1, 0 \leq \alpha < 1, \delta \geq 0, 0 < q < 1)$$

و

$$Re((1 - \lambda + 2\delta)\frac{g(w)}{w} + (\lambda - 2\delta)D_q g(w) + \delta z D^2{}_q g(w)) > \alpha$$
$$(\lambda \geq 1, 0 \leq \alpha < 1, \delta \geq 0, 0<q<1)$$

بطوریکه تابع g وارون تابع f می‌باشد که در رابطه (۲) آمده است.

تبصره ۷: رده توابع $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$، تعمیم رده‌های متعددی می‌باشد که توسط محققین مختلف معرفی شده است. به عنوان نمونه:

مثال ۱: هرگاه $q \to 1^-$ آنگاه رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ به رده $R_{\Sigma'}(\alpha, \lambda, \delta)$ تبدیل می‌شود که این رده توسط بولت و همکارانش [۳] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

مثال ۲: هم چنین هرگاه $q \to 1^-$ و $\delta = 0$ آنگاه رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ به رده توابع $\Sigma\mathscr{B}(\alpha, \lambda)$ تبدیل می‌شود که این رده توسط حمیدی و همکارانش [۵] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.
قضیه زیر را برای رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۸: فرض کنید تابع دو-تک ارز مرومورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ متعلق به رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ باشد. اگر شرط

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$$

برقرار باشد. آنگاه:

$$|b_n| \le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q|}$$

برهان. برای تابع دو– تک ارز مرومورفیک $f(z)$ به فرم (۱)، داریم:

$$(1-\lambda+2\delta)\frac{f(z)}{z}+(\lambda-2\delta)D_q f(z)+\delta z {D^2}_q f(z) = 1+(1-\lambda+2\delta)\frac{b_0}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q)b_n}{z^{n+1}} \quad (۳)$$

و بطور مشابه برای تابع $g(w)\in\Sigma_{\mathcal{B}}$، خواهیم داشت:

$$(1-\lambda+2\delta)\frac{g(w)}{w}+(\lambda-2\delta)D_q g(w) +\delta z {D^2}_q g(w) = 1+(1-\lambda+2\delta)\frac{B_0}{w}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q)B_n}{w^{n+1}}. \quad (۴)$$

چون تابع $f\in D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha,\lambda,\delta,q)$، لذا طبق تعریف، دو تابع تحلیلی $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$ و $h(w)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{w^n}$ با قسمت حقیقی مثبت روی دامنه Δ وجود دارند بطوریکه:

$$(1-\lambda+2\delta)\frac{f(z)}{z}+(\lambda-2\delta)D_q f(z) +\delta z {D^2}_q f(z) = 1+(1-\alpha)\times \sum_{n=0}^{\infty}K_{n+1}^{1}(c_1,c_2,\dots,c_{n+1})\frac{1}{z^{n+1}} \quad (۵)$$

و

$$(1-\lambda+2\delta)\frac{g(w)}{w}+(\lambda-2\delta)D_q g(w) +\delta z {D^2}_q g(w) = 1+(1-\alpha)\times \sum_{n=0}^{\infty}K_{n+1}^{1}(d_1,d_2,\dots,d_{n+1})\frac{1}{w^{n+1}}. \quad (۶)$$

با مقایسه ضرایب متناظر معادلات (۳) و (۵) خواهیم داشت:

$$\big(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q\big)b_n = (1-\alpha)\times K_{n+1}^{1}(c_1,c_2,\dots,c_{n+1}) \quad (۷)$$

و بطور مشابه با مقایسه ضرایب متناظر معادلات (۴) و (۶) خواهیم داشت:

$$\big(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q\big)B_n = (1-\alpha)\times K_{n+1}^{1}(d_1,d_2,\dots,d_{n+1}) \quad (۸)$$

با توجه به فرض

$$b_0=b_1=\cdots=b_{n-1}=0$$

نتیجه می‌گیریم که $B_n=-b_n$.

لذا معادلات (۷) و (۸) به معادلات زیر تبدیل خواهند شد:

$$(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q)b_n = (1-\alpha)c_{n+1}$$

و

$$-(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q)b_n = (1-\alpha)d_{n+1}$$

حال با گرفتن قدر مطلق از طرفین هر یک از معادلات بالا و بکار بردن لم ۳ خواهیم داشت:

$$|b_n| = \frac{(1-\alpha)|c_{n+1}|}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q|} = \frac{(1-\alpha)|d_{n+1}|}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q|} \le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q|}.$$

در قضیه بعد شرط اعمال شده در قضیه ۸ را حذف کرده و کران بالایی برای ضرایب اولیه توابع متعلق به رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha,\lambda,\delta,q)$ را بدست می‌آوریم.

قضیه ۹: فرض کنید تابع دو– تک ارز مرومورفیک $f\in\Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) متعلق به رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha,\lambda,\delta,q)$ باشد. آنگاه:

$$|b_0| \le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta|},$$

$$|b_1| \le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[1]_q+\delta[1]_q[2]_q|},$$

$$|b_2| \le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|}$$

و

$$|b_0 b_1+b_2| \le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|}.$$

برهان: با مقایسه ضرایب معادله (۷)، برای $n = 0,1,2$ خواهیم داشت:

$$(1-\lambda+2\delta)b_0 = (1-\alpha)c_1 ,$$
$$(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[1]_q$$
$$+\delta[1]_q[2]_q)b_1 = (1-\alpha)c_2.$$
$$(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q$$
$$+\delta[2]_q[3]_q)b_2 = (1-\alpha)c_3.$$

و بطور مشابه با مقایسه ضرایب معادله (۸)، در حالت $n = 2$ خواهیم داشت:

$$-(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q$$
$$+\delta[2]_q[3]_q)(b_0b_1+b_2)$$
$$= (1-\alpha)\, d_3 .$$

با حل معادلات فوق برای b_0،b_1، b_2،$b_0b_1+b_2$ و سپس با استفاده از لم ۳، روابط زیر بدست می‌آید

$$|b_0| = \frac{(1-\alpha)|c_1|}{|1-\lambda+2\delta|} \le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta|},$$
$$|b_1| = \frac{(1-\alpha)|c_2|}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[1]_q+\delta[1]_q[2]_q|}$$
$$\le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[1]_q+\delta[1]_q[2]_q|},$$
$$|b_2| = \frac{2(1-\alpha)|c_3|}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|}$$
$$\le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|}$$
$$|b_0b_1+b_2| =$$
$$\frac{(1-\alpha)|d_3|}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|}$$
$$\le \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|}.$$

نتیجه‌گیری

با میل دادن $q \to 1^-$ در قضیه ۸، نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱۰: فرض کنید تابع دو- تک ارز مرومورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) متعلق به رده $R_{\Sigma'}(\alpha,\lambda,\delta)$ باشد. اگر شرط

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$$

برقرار باشد. آنگاه:

$$|b_n| \le \frac{2(1-\alpha)}{|1+(n+1)(\delta-\lambda)+(n+1)^2\delta|}.$$

تبصره ۱۱: کران بالا $|b_n|$ در نتیجه ۱۰، تعمیمی از نتیجه بدست آمده توسط بولت و همکارانش [۳] است.

با میل دادن $q \to 1^-$ در قضیه۹، نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱۲: فرض کنید تابع دو- تک ارز مرومورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) متعلق به رده $R_{\Sigma'}(\alpha,\lambda,\delta)$ باشد.. آنگاه:

$$|b_0| \le \begin{cases} \frac{2(1-\alpha)}{1-\lambda+2\delta} ; & \lambda < 1+2\delta \\ \frac{2(1-\alpha)}{-1+\lambda-2\delta}; & \lambda > 1+2\delta, \end{cases}$$
$$|b_1| \le \begin{cases} \frac{2(1-\alpha)}{1-2\lambda+6\delta} ; & \lambda < \frac{1}{2}+3\delta \\ \frac{2(1-\alpha)}{-1+2\lambda-6\delta}; & \lambda > \frac{1}{2}+3\delta, \end{cases}$$
$$|b_2| \le \begin{cases} \frac{2(1-\alpha)}{1-3\lambda+12\delta} ; & \lambda < \frac{1}{3}+4\delta \\ \frac{2(1-\alpha)}{-1+3\lambda-12\delta}; & \lambda > \frac{1}{3}+4\delta, \end{cases}$$

و

$$|b_0b_1+b_2|$$
$$\le \begin{cases} \frac{2(1-\alpha)}{1-3\lambda+12\delta} ; & \lambda < \frac{1}{3}+4\delta \\ \frac{2(1-\alpha)}{-1+3\lambda-12\delta}; & \lambda > \frac{1}{3}+4\delta. \end{cases}$$

تبصره ۱۳: کران‌های بالا $|b_0|$ و$|b_1|$ در نتیجه ۱۲، تعمیمی از تقریب بدست آمده توسط بولت و همکارانش [۳] می‌باشد. علاوه بر آن کران‌های $|b_2|$ و $|b_0b_1+b_2|$ که در [۳] محاسبه نشده بود را نیز بدست آوردیم.

با قراردادن $\delta = 0$ در نتیجه ۱۰، نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱۴: فرض کنید تابع دو–تک ارزمرومورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) متعلق به رده $\Sigma\mathscr{B}(\alpha,\lambda)$ باشد. اگر شرط

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$$

برقرار باشد. آنگاه:

$$|b_n| \le \frac{2(1-\alpha)}{(n+1)\lambda-1}.$$

با قراردادن $\delta = 0$ در نتیجه ۱۲، نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه زیر بهبودی از قضیه ۲ بدست آمده در مرجع [۵] است. چون بدون شرط (*) آنرا بدست آورده‌ایم.

نتیجه ۱۵: فرض کنید تابع دو- تک ارز مرومورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) متعلق به رده $\Sigma\mathscr{B}(\alpha,\lambda)$ باشد. آنگاه:

$$|b_0| \le \frac{2(1-\alpha)}{\lambda-1},$$
$$|b_1| \le \frac{2(1-\alpha)}{2\lambda-1},$$
$$|b_2| \le \frac{2(1-\alpha)}{3\lambda-1}$$

و

$$|b_0 b_1 + b_2| \le \frac{2(1-\alpha)}{3\lambda-1}.$$

فهرست منابع

[1] H. Airault ,A. Bouali . Differential Calculus on the faber polynomials. Bull. Sci. Math. 130 (3): 179-222 (2006).

[2] H. Airault ,J. Ren. An algebra of differential operators and generating functions on the set of univalent functions. Bull. Sci. Math. 126(5): 343-367(2002).

[3] S. Bulut, N. Magesh, V. K. Balaji. Faber polynomial coefficient estimates for certain subclasses of meromorphic bi-univalent functions. Comptes Rendus Mathematique. 353(2): 113-116(2015).

[4] P. L. Duren. Univalent functions, Grundlehren der Mathematischen, Band 259, Springer, Tokyo, 1983.

[5] S. G. Hamidi, S. A. Halim, J. M. Jahangiri . Coefficient estimates for a class of meromorphic bi-univalent functions. Comptes Rendus Mathematique 351: 349-352 (2013).

[6] T. Janani, G. MurugusundaraMoor-thy. Coefficient estimates of meromorphic bi-starlike functions of complex order. Internat. J. Anal. Appl. 4 (1): 68-77(2014).

[7] G. P. Kapoor, A. K. Mishr. Coefficient estimates for inverses of starlike functions of positive order. J. Math. nal. Appl., 329(2): 922-934 (2007).

[8] J. G. Krzyz, R. J. Libera, E. J. Zlotkiewicz .Coefficients of inverse of regular starlike functions. Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska Sect. A 33: 103-109(1979).

[9] Y. Kubota. Coefficients of meromorphic univalent functions. Kōdai Math. Sem.Rep. 28: 253-261 (1976).

[10] G. Schober. Coefficients of inverses of meromorphic univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc. 67(1): 111-116 (1977).

[11] M. Schiffer, Sur Un problème d’xtrémum de la representation conforme. Bull. Soc. Math. France., 66: 48-55 (1938).

[12] H. M. Srivastava, .Ş Altınkaya, S. Yalçın . Hankel determinant for a subclass of bi-nivalent functions defined by using a symmetric q-derivative operator, Filomat, 32(2): 503–516. (2018).

[13] Q.-H. Xu, H. M. Srivastava . Coefficient estimates for the inverses of a certain general class of spirallike functions, Appl. Math. Comput., 219: 7000-7011(2013).

[14] H.-G. Xiao, Q.-. Xu, Coefficient estimates for three generalized classes of meromorphic and bi-univalent functions, Filomat, 29 (7): 1601-1612 (2015) .