

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

حلقه تکوارهای اریب شبه آرمنداریز

محمد حبیبی^{۱*}، سید احمد موسوی^۲، رؤفہ معنویت^۳

(^۱) دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران

(^۲) استاد گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

(^۳) استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۹/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۱/۰۲

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه همراه با درون‌ریختی σ ، $F \cup \{0\}$ یک تکوار آزاد تولید شده توسط $U = \{u_1, \dots, u_t\}$ همراه با صفر و M یک تکوار خارج قسمتی از F باشد، به طوری که عددی طبیعی مانند n موجود باشد که داشته باشیم $M^n = 0$. در این مقاله شرایطی را برای حلقه R بیان می‌کنیم که تحت آن حلقه تکوار $R * M$ شبه آرمنداریز گردد و به کمک آن رده‌های بزرگی از حلقه‌های شبه آرمنداریز غیر نیم اول را ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: حلقه شبه آرمنداریز، حلقه تکوارهای اریب، حلقه ماتریس‌های مثلثی، حلقه APP.

۱- مقدمه

در سراسر این مقاله حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یک‌دار می‌باشند. عضو همانی تکوار M را با e نمایش می‌دهیم. برای ایده‌آل ناصفر I از R ، پوچ‌ساز چپ و راست I در R را به ترتیب با $l_R(I)$ و $r_R(I)$ نشان می‌دهیم. همچنین $M_n(R)$ و $T_n(R)$ به ترتیب نشان‌دهنده حلقه ماتریس‌های $n \times n$ و حلقه ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی روی R می‌باشند. ماتریس همانی و ماتریس‌های مقدماتی را نیز به ترتیب با I_n و E_{ij} نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $F \cup \{0\}$ یک تکوار آزاد تولید شده توسط $U = \{u_1, \dots, u_t\}$ همراه با صفر و M یک تکوار خارج قسمتی از F باشد به طوری‌که عددی طبیعی مانند n چنان موجود باشد که به ازای هر $\alpha \neq e$ داشته باشیم $a^n = 0$. حلقه R همراه با درون‌ریختی σ را در نظر می‌گیریم. در این صورت حلقه تکوار $R * M$ را بدین صورت تشکیل می‌دهیم که عناصر آن به صورت $\sum_{g \in M} r_g g$ با تعداد جمعوندهای متناهی می‌باشند و عمل ضرب در آن با توجه به رابطه،

$$u_i r = \sigma(r) u_i$$

برای هر $1 \leq i \leq t$ به دست می‌آید. (برای توضیحات بیشتر به [۳] مراجعه نمایید.) فرض کنیم R یک حلقه و σ درون‌ریختی از R باشد به طوری‌که $\sigma(1) = 1$. در [۱] نویسندگان حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی اریب را بدین صورت تعریف کردند که عناصر آن مجموعه همه ماتریس‌های بالا مثلثی با عمل جمع مؤلفه به مؤلفه باشد و عمل ضرب با شرط،

$$E_{ij} r = \sigma^{j-i} E_{ij}$$

انجام شود. بنابراین داریم $(c_{ij})(b_{ij}) = (a_{ij})$ که در آن برای هر $i \leq j$

$$c_{ij} = a_{ii} b_{ij} + a_{i,i+1} \sigma(b_{i+1,j}) + \dots + a_{ij} \sigma^{j-i}(b_{jj}).$$

حلقه ماتریس‌های مثلثی، زیر حلقه‌های شامل همه ماتریس‌های مثلثی با قطر اصلی ثابت و زیر حلقه‌های شامل همه ماتریس‌های مثلثی با قطرهای ثابت را به

ترتیب با نماد $T_n(R, \sigma)$ ، $S_n(R, n, \sigma)$ و $T_n(R, n, \sigma)$ نمایش می‌دهیم. به سادگی می‌توان دید که با انتخاب $U = \{E_{12}, E_{23}, \dots, E_{n-1,n}\}$ و $U = \{E_{12} + E_{23} + \dots + E_{n-1,n}\}$ حلقه‌های $S_n(R, n, \sigma)$ و $T_n(R, n, \sigma)$ در ساختاری که در بالا توضیح داده شد صدق می‌کنند.

با توجه به مقاله [۳] حلقه R را شبه آرمنداریز گوییم هرگاه برای هر دو عضو $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ در $R[x]$ رابطه $a_i r b_j = 0$ نتیجه دهد $f(x) R[x] g(x) = 0$ برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$. تومیناگا در [۹]، ایده‌آل I از R را S -یکال چپ نامید اگر برای هر $a \in I$ وجود داشته باشد $x \in I$ به طوری‌که $xa = a$ او نشان داد که ایده‌آل I ، S -یکال چپ است اگر و تنها اگر برای هر تعداد متناهی $a_1, \dots, a_n \in I$ وجود داشته باشد $x \in I$ به طوری‌که $xa_i = a_i$ برای هر $1 \leq i \leq n$. هیرانو در قضیه ۳.۹ از [۴] ثابت کرد که $r_R(aR)$ برای هر $a \in R$ S -یکال چپ است اگر و تنها اگر برای هر $f(x) \in S$ ، $f(x) \in S$ یک ایده‌آل S -یکال چپ باشد. همچنین او نشان داد که اگر R در شرایط فوق صدق کند، آنگاه R شبه آرمنداریز می‌باشد. لیو و ژو حلقه R را APP راست نامیدند اگر برای هر $a \in R$ ، ایده‌آل aR S -یکال چپ باشد. بنابراین با توجه به توضیحات فوق، حلقه‌های APP شبه آرمنداریز هستند. همچنین آنها نشان دادند که خاصیت APP به حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی و بسیاری از توسیع‌های دیگر منتقل می‌شود و یک خاصیت موریتا پایدار است.

در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر R یک APP -حلقه σ -صلب ضعیف باشد، آنگاه R یک حلقه شبه آرمنداریز غیر نیم اول می‌باشد. همچنین ثابت می‌شود که برای هر APP -حلقه σ -صلب ضعیف R ، حلقه‌های $T_n(R, n, \sigma)$ و $S_n(R, n, \sigma)$ شبه آرمنداریز می‌باشند. به کمک این مطلب رده وسیعی از حلقه‌های دارای ایده‌آل پوچ‌توان با شاخص پوچ‌توانی دلخواه را که شبه آرمنداریز نیز می‌باشند، معرفی می‌نماییم.

۲- نتایج

فرض کنیم R یک حلقه دلخواه باشد. برای چندجمله‌ای $f(x) \in R[x]$ ، مجموعه ضرایب $f(x)$ را با C_f نمایش می‌دهیم. همچنین اگر J زیر مجموعه‌ای از $R[x]$ باشد، مجموعه $\cup_{f \in J} C_f$ با نماد C_J نشان داده می‌شود. حال قرار می‌دهیم،

$$\Theta = \{I \mid I \text{ یک ایده‌آل از } R \text{ باشد} \mid l_R(I)\}$$

9

$$\Delta = \{J \mid J \text{ یک ایده‌آل از } S \text{ باشد} \mid l_S(J)\}$$

که در آن $S = R[x]$ یک توسیع چند جمله‌ای از R است. فرض کنیم $\mu: \Theta \rightarrow \Delta$ ، با ضابطه $\mu(U) = SU$ و $\omega: \Delta \rightarrow \Theta$ ، با ضابطه $\omega(V) = V \cap R$ باشد. واضح است که μ و ω نگاشت‌هایی خوش تعریف هستند، زیرا اگر $U = l_R(I)$ ، آنگاه داریم $\mu(U) = l_S(I[x])$ و همچنین اگر $V = l_S(J)$ ، در اینصورت داریم $\omega(V) = l_S(J) \cap R = l_R(J) = l_R(C_J)$ لذا $\mu\omega = id$ و بنابراین μ یک به یک و ω پوشاست. هیرانو حالتی را که μ پوشا باشد بررسی نمود و نشان داد که μ پوشاست اگر و تنها اگر R شبه آرمنداریز باشد.

زیرمدول N از R -مدول راست M را زیرمدول محض گوئیم اگر $N \otimes_R L \rightarrow M \otimes_R L$ برای هر R -مدول چپ L ، یک تکریختی باشد. با توجه به تعریف تومیناگا [۹] ایده‌آل I از R را S -یکال چپ نامیم اگر برای هر $a \in I$ وجود داشته باشد $x \in I$ بطوریکه $xa = a$ او نشان داد که ایده‌آل I ، S -یکال چپ است اگر و تنها اگر برای هر تعداد متناهی $a_1, \dots, a_n \in I$ وجود داشته باشد $x \in I$ به طوریکه $xa_i = a_i$ برای هر $1 \leq i \leq n$. با توجه به گزاره ۱۱.۳.۱۳ از [۸]، ایده‌آل راست I از R محض است اگر و تنها اگر R/I به عنوان R -مدول راست یکدست باشد، اگر و تنها اگر I ، S -یکال چپ باشد. هیرانو در [۴] ثابت کرد که برای هر $a \in I$ ، $r_R(aR)$ به عنوان ایده‌آل راست R محض است اگر و تنها اگر برای هر $f(x) \in S$ ، $r_S(f(x)S)$ به عنوان ایده‌آل راست $S = R[x]$ محض باشد. همچنین او نشان داد که اگر R در شرط فوق صدق کند، دراینصورت

R شبه آرمنداریز است.

بسیار بدیهی است که حلقه‌های اول شبه آرمنداریز هستند. هیرانو در [۴] نشان داد که اگر R جمع زیرمستقیم از حلقه‌های شبه آرمنداریز باشد، آنگاه R شبه آرمنداریز می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که حلقه‌های نیم اول شبه آرمنداریز می‌باشد. علاوه بر این هیرانو نشان داد که اگر R شبه آرمنداریز باشد، آنگاه برای هر عدد طبیعی n ، $nT_n(R)$ نیز شبه آرمنداریز است. توجه کنیم که $T_n(R)$ برای $n \geq 2$ نیم اول نیست. ما نشان می‌دهیم که در حالت کلی خاصیت شبه آرمنداریز از R به $R * M$ منتقل نمی‌شود. بعلاوه، با استفاده از نوع خاصی از حلقه تکوارها، رده بزرگی از حلقه‌های شبه آرمنداریز غیر نیم اول را معرفی خواهیم کرد.

مثال ۲.۱. فرض کنیم R_1 یک حلقه APP ، $R = T(R_1, R_1)$ توسیع بدیهی R_1 و M تکوار آزاد تولید شده توسط $U = \{u\}$ همراه با صفر با رابطه $u^2 = 0$ باشد. بنابراین با توجه به [۲]، R حلقه شبه آرمنداریز می‌باشد. فرض کنیم σ درون‌ریختی از R_1 است که $\sigma(1) = 1$ به وضوح،

$$\bar{\sigma} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix}$$

یک درون‌ریختی از R است. دو چند جمله‌ای $f(x) = (E_{12}e) + (E_{12}e - I_2u)x$ و $g(x) = (E_{12}e) + (E_{12}e + I_2u)x$ در $[x](R * M)$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $f(x)(R * M)[x]g(x) = 0$ ، $[E_{12}e][(I_2 + E_{12})e][E_{12}e + I_2u] = 0$ بنابراین $R * M$ شبه آرمنداریز نیست.

در ادامه ثابت می‌کنیم که برای APP -حلقه R همراه با خودریختی σ ، اگر R ، σ -صلب ضعیف باشد، آنگاه $R * M$ شبه آرمنداریز است. برای اثبات این حکم به لم‌های ریز نیاز داریم.

فرض کنیم R یک حلقه و σ درون‌ریختی از آن باشد. دراینصورت $\bar{\sigma}: R[x] \rightarrow R[x]$ ، با رابطه

$$\bar{\sigma} \left(\sum_{i=0}^m a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^m \sigma(a_i) x^i$$

یک خودریختی از $R[x]$ است.

لم ۲.۳. اگر R حلقه σ -صلب ضعیف و شبه آرمنداریز باشد، آنگاه $R[x]$ نیز $\bar{\sigma}$ -صلب ضعیف و شبه آرمنداریز است.

اثبات: به قضیه ۲.۱۱ به [۷] مراجعه نمایید.

لم ۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه و σ درون‌ریختی از آن باشد. در اینصورت داریم،

$$(R * M)[x] \cong R[x] * M$$

اثبات. نگاشت $\varphi: (R * M)[x] \rightarrow R[x] * M$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i x^i \rightarrow f e + \sum_{1 \leq k \leq t} f_k u_k + \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} f_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} f_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}$$

که در آن برای هر $0 \leq i \leq m$

$$\alpha_i = a^{(i)} e + \sum_{1 \leq k \leq t} a_k^{(i)} u_k + \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} a_{k_1 k_2}^{(i)} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} a_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(i)} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}$$

۹

$$\begin{aligned} f &= a^{(0)} + a^{(1)}x + \dots + a^{(m)}x^m \\ f_k &= a_k^{(0)} + a_k^{(1)}x + \dots + a_k^{(m)}x^m \quad 1 \leq k \leq t \\ f_{k_1 k_2} &= a_{k_1 k_2}^{(0)} + a_{k_1 k_2}^{(1)}x + \dots + a_{k_1 k_2}^{(m)}x^m \quad 1 \leq k_1, k_2 \leq t \\ &\vdots \\ f_{k_1 \dots k_{n-1}} &= a_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(0)} + a_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(1)}x + \dots + a_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(m)}x^m \quad 1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t \end{aligned}$$

به راحتی دیده می‌شود که φ یک یکرختی است و اثبات کامل می‌شود.

فرض کنیم R یک حلقه و σ درون‌ریختی از آن باشد. بر اساس مقاله [۷] حلقه R را σ -صلب ضعیف نامیم اگر برای هر $a, b \in R$ ، $aRb = 0$ اگر و تنها اگر $a\sigma(Rb) = 0$ به وضوح، اگر R حلقه σ -صلب ضعیف باشد، آنگاه انزکتیو است. همچنین، هر حلقه اول با خودریختی σ یک حلقه σ -صلب ضعیف می‌باشد.

لم ۲.۴. فرض کنیم R حلقه APP راست و $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ متعلق به R باشد. اگر برای هر i و j داشته باشیم $a_i R b_j = 0$ ، آنگاه وجود دارد $c \in R$ بطوریکه داریم $b_j = c b_j$ و $a_i R c = 0$ برای هر $1 \leq j \leq n$ و $1 \leq i \leq m$.

اثبات: مشابه با اثبات لم ۲ از [۵] حکم به دست می‌آید.

قضیه ۲.۵. فرض کنیم R یک حلقه و σ خودریختی از آن باشد. اگر R حلقه σ -صلب ضعیف و APP راست باشد، در اینصورت $R * M$ حلقه شبه آرمنداریز غیر نیم اول است.

اثبات: فرض کنیم $F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_r x^r$ و $G(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_s x^s$ دو چند جمله‌ای در $(R * M)[x]$ با رابطه $F(x)(R * M)[x]G(x) = 0$ باشند که در آن برای هر $1 \leq j \leq s$ و $1 \leq i \leq r$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= a^{(i)} e + \sum_{1 \leq k \leq t} a_k^{(i)} u_k + \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} a_{k_1 k_2}^{(i)} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} a_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(i)} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}} \\ \beta_j &= b^{(j)} e + \sum_{1 \leq k \leq t} b_k^{(j)} u_k + \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} b_{k_1 k_2}^{(j)} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} b_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(j)} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}} \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به لم ۲.۲ برای هر $h, h_k, h_{k_1 k_2}, \dots, h_{k_1 \dots k_{t-1}} \in R[x]$

$$\begin{aligned} &(f e + \sum_{1 \leq k \leq t} f_k u_k + \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} f_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} f_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}) \times \\ &(h e + \sum_{1 \leq k \leq t} h_k u_k + \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} h_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \end{aligned}$$

با توجه به اینکه h در معادله (۱) عضوی دلخواه از $R[x]$ است، لذا رابطه $fR[x]g = 0$ بدست می‌آید.

بنابراین از آنجا که R شبه آرمنداریز است با توجه به قضیه ۳.۹ از مرجع [۴] برای هر $0 \leq i \leq r$ و $0 \leq j \leq s$ داریم $a^{(i)}Rb^{(j)} = 0$ لذا با استفاده از لم ۲.۴ وجود دارد $c \in R$ بطوریکه برای هر i و j داشته باشیم $a^{(i)}Rc = 0$ و $cb^{(j)} = b^{(j)}$ در نتیجه داریم،

$$fR[x]c = 0 \quad (\text{ii}) \quad \text{و} \quad cg = g \quad (\text{i})$$

علاوه براین، از آنجا که با توجه لم ۲.۳ $R[x]$ حلقه $\bar{\sigma}$ -صلب ضعیف است، از تساوی $fR[x]g = 0$ نتیجه می‌شود

$$fR[x]\bar{\sigma}(g) = 0 \quad (\text{iii})$$

از طرف دیگر با به کارگیری معادله $F(x)(R * M)[x]G(x) = 0$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & (fe + \sum_{1 \leq k \leq t} f_k u_k + \\ & \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} f_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} f_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}) \times \\ & (he + \sum_{1 \leq k \leq t} h_k u_k + \\ & \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} h_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} h_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}})(ce) \times \\ & (ge + \sum_{1 \leq k \leq t} g_k u_k + \\ & \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} g_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} g_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}) = \\ & 0 \end{aligned}$$

بنابراین معادله زیر را داریم:

$$fh(cg_k) + fh_k \bar{\sigma}(cg) + f_k \bar{\sigma}(h) \bar{\sigma}(cg) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, t\}$$

با توجه به (i)، (ii) و (iii)، برای هر $1 \leq k \leq t$ داریم $f_k \bar{\sigma}(h) \bar{\sigma}(g) = 0$ بنابراین از آنجا که h عضوی دلخواه از $R[x]$ است و σ یک بروربختی است، داریم $f_k R[x] \bar{\sigma}(g) = 0$ و از σ -صلب ضعیف بودن $R[x]$ نتیجه می‌گیریم $f_k R[x]g = 0$ لذا با توجه به معادله (۲) داریم، $fR[x]g_k = 0$ تا اینجا برای هر $1 \leq k \leq t$ تساوی $fR[x]g_k =$

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} h_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}} \times \\ & (ge + \sum_{1 \leq k \leq t} g_k u_k + \\ & \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} g_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} g_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}) = \\ & 0 \end{aligned}$$

که در آن،

$$\begin{aligned} f &= a^{(0)} + a^{(1)}x + \dots + a^{(r)}x^r, \\ g &= b^{(0)} + b^{(1)}x + \dots + b^{(s)}x^s \\ f_k &= a_k^{(0)} + a_k^{(1)}x + \dots + a_k^{(r)}x^r, \\ g_k &= b_k^{(0)} + b_k^{(1)}x + \dots + b_k^{(s)}x^s \\ f_{k_1 k_2} &= a_{k_1 k_2}^{(0)} + a_{k_1 k_2}^{(1)}x + \dots + a_{k_1 k_2}^{(r)}x^r, \\ g_{k_1 k_2} &= b_{k_1 k_2}^{(0)} + b_{k_1 k_2}^{(1)}x + \dots + b_{k_1 k_2}^{(s)}x^s \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ f_{k_1 \dots k_{n-1}} &= a_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(0)} + a_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(1)}x + \\ & \dots + a_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(r)}x^r, \\ g_{k_1 \dots k_{n-1}} &= b_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(0)} + b_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(1)}x + \\ & \dots + b_{k_1 \dots k_{n-1}}^{(s)}x^s. \end{aligned}$$

بنابراین روابط زیر را داریم،

$$\begin{aligned} (1) fhg &= 0 \\ (2) fhg_k + fh_k \bar{\sigma}(g) + \\ f_k \bar{\sigma}(h) \bar{\sigma}(g) &= 0 \quad 1 \leq k \leq t \\ (3) fhg_{k_1 k_2} + fh_{k_1} \bar{\sigma}(g_{k_2}) + \\ f_{k_1} \bar{\sigma}(h) \bar{\sigma}(g_{k_2}) + \\ fh_{k_1 k_2} \bar{\sigma}^2(g) + fh_{k_1} \bar{\sigma}(h_{k_2}) \bar{\sigma}^2(g) + \\ f_{k_1 k_2} \bar{\sigma}(h) \bar{\sigma}^2(g) &= 0 \quad 1 \leq k_1, k_2 \leq t \\ (4) fhg_{k_1 k_2 k_3} + fh_{k_1} \bar{\sigma}(g_{k_2 k_3}) + \\ f_{k_1} h \bar{\sigma}(g_{k_2 k_3}) + fh_{k_1 k_2} \bar{\sigma}^2(g_{k_3}) + \\ f_{k_1} \bar{\sigma}(h_{k_2}) \bar{\sigma}^2(g_{k_3}) + \\ fh_{k_1 k_2} \bar{\sigma}^2(h) \bar{\sigma}^2(g_{k_3}) + \\ fh_{k_1 k_2 k_3} \bar{\sigma}^3(g) + \\ fh_{k_1} \bar{\sigma}(h_{k_2 k_3}) \bar{\sigma}^3(g) + \\ fh_{k_1 k_2} \bar{\sigma}^2(h_{k_3}) \bar{\sigma}^3(g) + \\ fh_{k_1 k_2 k_3} \bar{\sigma}^3(hg) &= 0 \quad 1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \end{aligned}$$

با توجه به (iv)، (v)، (vi)، (vii) و (viii)، برای هر $f_{k_1 k_2} \bar{\sigma}^2(h) \bar{\sigma}^2(g) = 0$ داریم $1 \leq k_1, k_2 \leq t$ بنابراین از آنجا که h عضوی دلخواه از $R[x]$ است و σ یک بروریختی است، داریم $f_{k_1 k_2} R[x] \bar{\sigma}^2(g) = 0$ و از σ -صلب ضعیف بودن $R[x]$ نتیجه می‌گیریم $f_{k_1 k_2} R[x] g = 0$ لذا با توجه به معادله (۲) داریم، $fR[x]g_k = 0$

از طرف دیگر از آنجا که $a^{(i)} Rb_k^{(j)} = 0$ لذا با توجه به لم ۲.۴، وجود دارد $c'' \in R$ بطوریکه برای هر i, j و k ، $b_k^{(j)} = c'' b_k^{(j)}$ و $a^{(i)} R c'' = 0$ بنابراین $c'' g_k = g_k$ و $fR[x]c'' = 0$ از آنجا که $f(x)(R * M)[x]g(x) = 0$

$$\begin{aligned} & (fe + \sum_{1 \leq k \leq t} f_k u_k + \\ & \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} f_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} f_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}) \times \\ & (he + \sum_{1 \leq k \leq t} h_k u_k + \\ & \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} h_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} h_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}})(c'' e) \times \\ & (ge + \sum_{1 \leq k \leq t} g_k u_k + \\ & \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} g_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} g_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}) = \\ & 0. \end{aligned}$$

بنابراین معادله زیر را داریم:

$$\begin{aligned} & fh(c'' g_{k_1 k_2}) + fh_{k_1} \bar{\sigma}(c'' g_{k_2}) + \\ & f_{k_1} \bar{\sigma}(h(c'' g_{k_2})) + fh_{k_1 k_2} \bar{\sigma}^2(c'' g) + \\ & f_{k_1} \bar{\sigma}(h_{k_2}) \bar{\sigma}^2(c'' g) + \\ & f_{k_1 k_2} \bar{\sigma}^2(h(c'' g)) = 0 \quad \forall k_1, k_2 \in \\ & \{1, \dots, t\} \end{aligned}$$

با استدلالی مشابه بالا می‌توان نتیجه گرفت $f_{k_1} R[x] g_{k_2} = 0$ حال با توجه به معادله (۳)، داریم $fR[x]g_{k_1 k_2} = 0$ بنابراین برای هر $k_1, k_2 \in$ و $j \in \{0, \dots, s\}$ $i \in \{0, \dots, r\}$ $\{0, \dots, t\}$ داریم،

$$a^{(i)} Rb_{k_1 k_2}^{(j)} = a_{k_1}^{(i)} Rb_{k_2}^{(j)} = a_{k_1 k_2}^{(i)} Rb^{(j)}.$$

$f_k R[x] \bar{\sigma}(g) = 0$ را ثابت کردیم و از شبه آرمنداریز بودن R تساوی،

$$a^{(i)} Rb_k^{(j)} = 0 = a_k^{(i)} Rb^{(j)}$$

را برای هر $k \in j \in \{0, \dots, s\}$ ، $i \in \{0, \dots, r\}$ بدست می‌آوریم.

با به کارگیری مجدد لم ۲.۴، از $a^{(i)} Rb^{(j)} = 0 = a_k^{(i)} R c'$ نتیجه می‌گیریم $a_k^{(i)} R c' = 0$ و $b^{(j)} = c' b^{(j)}$ برای یک $c \in R$ و هر i, j و k بنابراین

$$\begin{aligned} & c' g = g \text{ (iv)}, \quad fR[x]c' = 0 \text{ (v)}, \\ & \forall k \quad f_k R[x]c' = 0 \text{ (vi)}. \end{aligned}$$

علاوه براین، $f_k R[x]c' = 0$ و $fR[x]c' = 0$ نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} & fR[x]\sigma(c') = fR[x]\sigma^2(c') = 0 \text{ (vii)}, \\ & \forall k \quad f_k R[x]\sigma(c') = f_k R[x]\sigma^2(c') \\ & = 0, \text{ (viii)} \end{aligned}$$

زیرا $R[x]$ حلقه $\bar{\sigma}$ -صلب ضعیف است. از طرف دیگر با استفاده از معادله $F(x)(R * M)[x]G(x) = 0$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & (fe + \sum_{1 \leq k \leq t} f_k u_k + \\ & \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} f_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} f_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}) \times \\ & (he + \sum_{1 \leq k \leq t} h_k u_k + \\ & \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} h_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} h_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}})(c' e) \times \\ & (ge + \sum_{1 \leq k \leq t} g_k u_k + \\ & \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq t} g_{k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ & \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq t} g_{k_1 \dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}) = \\ & 0. \end{aligned}$$

بنابراین معادله زیر را داریم:

$$\begin{aligned} & fh(c' g_{k_1 k_2}) + fh_{k_1} \bar{\sigma}(c' g_{k_2}) + \\ & f_{k_1} \bar{\sigma}(h(c' g_{k_2})) + fh_{k_1 k_2} \bar{\sigma}^2(c' g) + \\ & f_{k_1} \bar{\sigma}(h_{k_2}) \bar{\sigma}^2(c' g) + f_{k_1 k_2} \bar{\sigma}^2(h(c' g)) = 0 \\ & \forall k_1, k_2 \in \{1, \dots, t\} \end{aligned}$$

با ادامه این روند و با توجه به لم ۲.۲، برای هر $1 \leq i \leq r$ و $1 \leq j \leq s$ بدست می‌آوریم $\alpha_i(R * M)\beta_j = 0$ بنابراین $R * M$ شبه آرمنداریز است. همچنین به وضوح $R * M$ نیم اول نیست و اثبات کامل می‌شود.

توجه کنیم که اگر R شبه آرمنداریز باشد، آنگاه $M_n(R)$ و $T_n(R)$ نیز شبه آرمنداریز است (قضیه ۳.۱۲ و نتیجه ۳.۱۵ از [۴] را نگاه کنید). لذا نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۲.۶. فرض کنیم R حلقه APP و σ خودریختی صلب ضعیف باشد. در اینصورت $S(R, n, \sigma)$ و $T(R, n, \sigma)$ شبه آرمنداریز است.

نمایش می‌دهیم. در اینصورت $T(R, n, \sigma)$ با $A = (a_{ij}) \in T(R, n, \sigma)$ یا (a_{11}, \dots, a_{1n}) نمایش می‌دهیم. در اینصورت $T(R, n, \sigma)$ با جمع نقطه به نقطه و ضرب به صورت:

$$(a_0, \dots, a_{n-1})(b_0, \dots, b_{n-1}) = (a_0 b_0, a_0 * b_1 + a_1 * b_0, \dots, a_0 * b_{n-1} + \dots + a_{n-1} * b_0)$$

که در آن برای هر i و j ، $a_i * b_j = a_i \sigma^i(b_j)$. از طرف دیگر نگاشت

$$\varphi: R[x; \sigma]/x^n \rightarrow T(R, n, \sigma),$$

با ضابطه $\varphi(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ برای هر $0 \leq i \leq n-1$ ، $a_i \in R$ یکریختی حلقه ای است. بنابراین $T(R, n, \sigma) \cong R[x; \sigma]/(x^n)$ که در آن $R[x; \sigma]$ حلقه چندجمله‌ای اریب است که برای هر $r \in R$ قانون ضرب به صورت $xr = \sigma(r)x$ می‌باشد. همچنین (x^n) ایده‌آل تولید شده توسط x^n از $R[x; \sigma]$ است. حال با بیان نتیجه زیر این مقاله را پایان می‌دهیم.

نتیجه ۲.۷. فرض کنیم R حلقه APP و σ خودریختی صلب ضعیف از R باشد. در اینصورت $R[x; \sigma]/(x^n)$ شبه آرمنداریز است.

فهرست منابع

- [1] J. Chen, X. Yang b, Y. Zhou, On strongly clean matrix and triangular matrix rings, *Comm. Algebra* 34 (2006) 3659-3674.
- [2] M. Habibi, A new class of non-semiprime quasi-Armendariz rings, *StudiaScientiarumMathematicarumHungarica* 51(2) (2014) 165-171.
- [3] M. Habibi, A. Moussavi, Annihilator properties of skew monoid rings, *Comm. Algebra* 42(2) (2014) 842-852.
- [4] Y. Hirano, On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring, *J. Pure Appl. Algebra* 168 (2002) 45-52.
- [5] Z. K. Liu, W. Zhang, A note on quasi-Armendariz rings, *Math. J. Okayama Univ.* 52 (2010) 89-95.
- [6] Z. K. Liu, R. Y. Zhao, A generalization of PP-rings and p.q.-Baer rings, *Glasg. Math. J.* 48(2) (2006) 217-229.
- [7] A. R. Nasr-Isfahani, A. Moussavi, On weakly rigid rings, *Glasg. Math. J.* 51(3) (2009) 425-440.
- [8] B. Stenström, *Rings of Quotients*, Springer, Berlin, 1975.
- [9] H. Tominaga, On s-unital rings, *Math. J. Okay. Univ.* 18 (1976) 117-134.