دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

عملگر توسیع رافر-سافریج روی کلاس نگاشت‌های قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α

سمیرا رهروی[1*]، حسین پیری[2]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بناب، بناب، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۵/۱۱/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۱/۱۷

چکیده

در این مقاله مفهوم قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α را تعریف نموده و به کمک لم پیک- شوارتز نشان می‌دهیم که نگاشت‌های توسیعی رافر- سافریج، کلاس قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α را بر دامنه کامل رین‌هارد $\Omega_{n,p_1,\ldots,p_n}$ حفظ می‌کند. سپس نشان می‌دهیم نگاشت‌های توسیعی رافر- سافریج، کلاس‌های قویاً فنرگون از نوع β، قویاً و تقریباً ستارگون از مرتبه‌ی α و قویاً ستارگون را حفظ می‌کند. نتایج بدست آمده در این مقاله بسیاری از نتایج مشهور را توسیع می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: عملگر توسیع رافر- سافریج، دامنه رین‌هارد، تابعک مینکوفسکی، نگاشت‌های قویاً و تقریباً فنرگون.

*.عهده‌دار مکاتبات: Email:sarahrovi@gmail.com

۱- مقدمه

فرض کنیم n عدد صحیح مثبت و $\mathbb{C}^n$ فضای اقلیدسی n متغییره مختلط $z=(z_1,\ldots,z_n)$ با ضرب داخلی استاندارد $\langle z,w\rangle=\sum_{j=1}^{n}z_j\overline{w}_j$ و نرم اقلیدسی $\|z\|=<z,z>^{\frac{1}{2}}$ باشد که $z,w\in\mathbb{C}^n$. گوی باز $\{z\in\mathbb{C}^n|\|z\|<r\}$ را با نماد B_r^n و گوی واحد B_1^n را با نماد B^n نشان می‌دهیم. گوی بسته‌ی $\{z\in\mathbb{C}^n|\|z\|\le r\}$ را با نماد $\overline{B}_r^n$ و مرز گوی واحد $\{z\in\mathbb{C}^n|\|z\|=r\}$ را نماد ∂B^n نشان می‌دهیم. در حالت یک متغیره، B^1را با U نشان می‌دهیم. هم‌چنین برای $n\ge 2$، قرارمی‌دهیم $\hat{z}=(z_2,\ldots,z_n)$، لذا داریم $z=(z_1,\hat{z})\in\mathbb{C}^n$.

فرض کنیم $L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)$ نمایش فضای نگاشت‌های خطی از $\mathbb{C}^n$به $\mathbb{C}^m$ با نرم استاندارد $\|A\|=\sup\{\|A(z)\|\,|\,\|z\|=1\}$ باشد. فرض کنیم I_n عملگر همانی فضای $L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ باشد. فرض کنیم Ω حوزه‌ای در $\mathbb{C}^n$ و $H(\Omega)$ مجموعه‌ی توابع هلومورفیک از Ω به $\mathbb{C}^n$ باشد. نگاشت $f\in H(\Omega)$ را نرمالیزه گوییم هرگاه $f(0)=0$ و $J_f(0)=I_n$، که در آن $J_f(0)$ ماتریس ژاکوبین مختلط f در مبدأ است. نگاشت $f\in H(\Omega)$ را موضعاً دوتحلیلی گوییم اگر برای هر $z\in\Omega$، داشته باشیم $\det J_f(z)\neq 0$. فرض کنیم $LS(\Omega)$ مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های موضعاً دوتحلیلی نرمالیزه بر Ω و $S(\Omega)$ کلاس نگاشت‌های دوتحلیلی نرمالیزه بر Ω باشند. در حالت یک متغیره مختلط مجموعه $S(B^1)$ را با S و مجموعه‌ی $LS(B^1)$را با نماد LS نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $f\in S(\Omega)$، نگاشت $f\in S(\Omega)$ را ستاره‌گون (به‌ترتیب محدب) گوییم هرگاه تصویر Ω تحت f ناحیه‌ای ستاره‌گون (به‌ترتیب ناحیه محدب) نسبت به مبدأ باشد. کلاس توابع ستاره‌گون (به‌ترتیب محدب) را با $S^*(\Omega)$(به‌ترتیب $K(\Omega)$) نمایش می‌دهیم. در حالت یک متغیره مختلط $S^*(B^1)$ (به‌ترتیب $K(B^1)$) را با S^* (به‌ترتیب K) نشان می‌دهیم. تابع نرمالیزه $f\in H(\Omega)$ را $\varepsilon-$ستارگون گوییم، اگر عدد مثبت ε، $0\le\varepsilon\le 1$ وجود داشته باشد به طوری که $f(B^n)$ نسبت به هر نقطه‌ی $\varepsilon f(B^n)$ ستارگون باشد.

فرض کنید $P:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ چندجمله‌ای همگن از درجه‌ی n باشد. لذا به ازای هر $z\in C^n$ و $\lambda\in\mathbb{C}$ داریم $P(\lambda z)=\lambda^n P(z)$. به‌سادگی می‌توان دید $\nabla P(z)z=nP(z)$، که در آن $\nabla P(z)=\left(\frac{\partial P}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial P}{\partial z_n}\right)$ گرادیان $P(z)$ است.

نرم P را به‌صورت $\|P\|=\sup\{|P(z)|\,|z\in\partial B^n\}$ تعریف می‌کنیم.

حوزه $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ را رین‌هارد کامل گوییم هرگاه برای هر $(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in\Omega$ داشته باشیم $(e^{i\theta_1}z_1,e^{i\theta_2}z_2,\ldots,e^{i\theta_n}z_n)\in\Omega$ که در آن $\theta_j\in\mathbb{R}$، $j=1,2,\ldots,n$. حوزه‌ی Ω مدور گوییم هرگاه برای هر $z\in\Omega$ و $\theta\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $e^{i\theta}z\in\Omega$. تابعک مینکوفسکی $\rho(z)$ بر حوزه‌ی

$$\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}=\left\{z\in C^n:|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}|z_j|^{p_j}<1\right\},$$
$$p_j\ge 1,\ j=2,\ldots,n,$$

را به‌صورت

$$\rho(z)=\inf\left\{t>0,\frac{z}{t}\in\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}\right\},$$
$$z\in C^n.$$

تعریف می‌کنیم. لذا، تابعک مینکوفسکی $\rho(z)$ یک نرم بر $\mathbb{C}^n$ است و $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ گوی واحد در فضای باناخ $\mathbb{C}^n$ نسبت به این نرم است. همان طور که می‌دانیم تابعک مینکوفسکی $\rho(z)$ در $\overline{\Omega}_{n,p_2,\ldots,p_n}\setminus\{0\}$، C^1است. علاوه براین، خواص زیر برای تابعک مینکوفسکی $\rho(z)$ برقرار است (به مرجع [۱۲] نگاه کنید):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial z}(\lambda z)=\frac{\partial\rho}{\partial z}(z),\\&\lambda\in[0,+\infty), z\in\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}\setminus\{0\},\\&\frac{\partial\rho}{\partial z}(e^{i\theta}z)=e^{-i\theta}\frac{\partial\rho}{\partial z}(z),\\&\theta\in R, z\in\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}\setminus\{0\}.\end{aligned}\tag{۱}$$

تعریف ۱. [۲۳] فرض کنید Ω حوزه‌ی مدور محدب کراندارشامل مبدأ در C^n باشد. تابع مینکوفسکی $\rho(z)$ در $\overline{\Omega}\setminus\{0\}$، C^1 باشد. فرض کنید f نگاشت موضعاً دوتحلیلی نرمالیزه بر Ω باشد. اگر $\alpha\in(0,1)$، $\beta\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ و

$$\left|e^{-i\beta}\frac{2}{\rho(z)}\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(z)-\left(\frac{\cos\beta}{2\alpha}-i\sin\beta\right)\right|<\frac{\cos\beta}{2\alpha}, z\in\Omega\setminus\{0\},$$

آن‌گاه نگاشت f را فنرگون از نوع β و مرتبه α بر Ω گوییم.

تعریف ۲. [۲] فرض کنید $f(z)$ نگاشت دوتحلیلی نرمالیزه بر B^n باشد. فرض کنید $\alpha\in[0,1)$، $\beta\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، $c\in(0,1)$ و

$$\left|\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{\bar{z}J_f^{-1}(z)f(z)}{\|z\|^2}-\frac{1+c^2}{1-c^2}\right|\le\frac{2c}{1-c^2}.\tag{۲}$$

در این‌صورت $f(z)$ را نگاشت قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر B^n گوییم.

در حالت $B^n=U$، نابرابری (۲) به نابرابری

$$\left|\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{f(z)}{zf'(z)}-\frac{1+c^2}{1-c^2}\right|\le\frac{2c}{1-c^2}, z\in U\setminus\{0\}.$$

تبدیل می‌شود.

اگر **تعریف ۲** را به حوزه‌ی رین‌هارد کراندار Ω در C^n تعمیم دهیم، تعریف زیر که منسوب به سو[1] و وانگ[2][۱] است، را به‌دست می‌آوریم.

تعریف ۳. [۲۰] فرض کنید $\Omega\subset\mathrm{C}^n$ حوزه‌ی رین‌هارد کراندار شامل مبدأ باشدو تابع مینکوفسکی $\rho(z)$ در $\overline{\Omega}\setminus\{0\}$، C^1 باشد. فرض کنید f نگاشت دوتحلیلی نرمالیزه بر Ω باشد و $\alpha\in[0,1)$، $\beta\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، $c\in(0,1)$ و

$$\left|\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2}{\rho(z)}\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(z)-\frac{1+c^2}{1-c^2}\right|\le\frac{2c}{1-c^2}.\tag{۳}$$

دراین‌صورت $f(z)$ را نگاشت قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر Ω گوییم.

تعریف ۴. در تعاریف فوق به‌ترتیب فرض کنیم $\alpha=0$، $\beta=0$ و $\alpha=\beta=0$، در این‌صورت تعاریف نگاشت‌های تقریباً فنرگون از نوع β، قویاً و تقریباً فنرگون از مرتبه‌ی α و قویاً ستارگون را به‌دست می‌آوریم.

در سال ۱۹۹۵، رافر[3] و سافریج[4] عملگر توسیعی که روشی برای توسیع تابع تقریباً دوتحلیلی بر قرص واحد

1. Cui
2. Wang
3. Roper
4. Suffridge

U در $\mathbb{C}$ به نگاشت تقریباً دوتحلیلی بر گوی واحد B^n در $\mathbb{C}^n$ را ارائه می‌کند را معرفی نمودند. $n \geq 2$ را ثابت بگیرید، عملگر رافر- سافریج ([۷،۱۹]) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[\Phi_n(f)](z) = (f(z_1), \sqrt{f'(z_1)}\hat{z}), z \in B^n$$

که در آن f نگاشت دوتحلیلی نرمالیزه بر قرص واحد U در $\mathbb{C}$ بوده و $z = (z_1, \hat{z})$ در گوی واحد B^n در $\mathbb{C}^n$ قرار دارد و شاخه‌ی $\sqrt{f'(z_1)}|_{z_1=0} = 1$ از تابع توانی انتخاب می‌شود. نتایج

$$\Phi_n(K) \subseteq K(B^n),$$
$$\Phi_n(S^*) \subseteq S^*(B^n).$$

اهمیت نگاشت توسیع رافر- سافریج را نشان می‌دهند. اولین مشمولیت را رافر و سافریج زمانی که عملگر خود را معرفی می‌کردند در مرجع [۱۹] اثبات کرده‌اند. در حالی که دومین رابطه‌ی مشمولیت توسط گراهام[5] و کوهر[6] در مرجع [۶] اثبات شده است. تا آن زمان ارائه مثال‌هایی از نگاشت‌های محدب و ستارگون در B^n بسیار دشوار بود. به کمک عملگر توسیع رافر- سافریج، به‌سادگی می‌توانیم مثال‌هایی از این نگاشت‌ها را ارائه دهیم و این امرعلت علاقه‌مندی پژوهشگران را به این عملگر نشان می‌دهد. بسیاری از کاربردهای عملگر توسیع رافر- سافریج را گراهام و کوهر در کتاب اخیر خود [۷] بیان نموده‌اند.
از طرف دیگر پژوهشگران خواص عملگر توسیع رافر- سافریج را بر حوزه‌های رین‌هارد بررسی نموده‌اند. برای مثال گونگ[7] و لیو[8] [۴،۱۰] مفهوم نگاشت ε- ستاره‌گون را معرفی نموده و نشان داده‌اند که عملگر

$$[\Phi_{n,\frac{1}{p}}(f)](z) = \left(f(z_1), (f'(z_1))^{\frac{1}{p}}\hat{z}\right)$$

تابع ε- ستاره‌گون در U را به نگاشت ε- ستارگون بر حوزه‌ی رین‌هارد

$$\Omega_{n,p} = \left\{z \in \mathbb{C}^n \middle| |z_1|^2 + \sum_{j=2}^{2} |z_j|^p < 1\right\}$$

می‌نگارد، که در آن $p \geq 1$ و f، z_1 و $\hat{z}$ مشابهاً به‌صورت فوق تعریف شده‌اند. در حالت $\varepsilon = 0$ و $\varepsilon = 1$ نگاشت $\Phi_{n,\frac{1}{p}}$، توابع ستارگون و محدب در U را به‌ترتیب به نگاشت ستارگون و محدب در $\Omega_{n,p}$ می‌نگارد. علاوه بر آن، گونگ و لیو [۵] نشان دادند که عملگر

$$[\Phi_{n,\frac{1}{p_2},\ldots,\frac{1}{p_n}}(f)](z) = \left(f(z_1), (f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}} z_2, \ldots, (f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}} z_n\right),$$

تابع ε- ستارگون در U را به نگاشت ε- ستارگون بر حوزه‌ی رین‌هارد

$$\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n} = \left\{z \in C^n : |z_1|^2 + \sum_{j=2}^{n} |z_j|^{p_j} < 1\right\}.$$

می‌نگارد، که در آن $p_j \geq 1$ و f، z_1 و $\hat{z}$ مشابهاً به‌صورت فوق تعریف شده‌اند. هم‌چنین لیو و لیو [۱۱] نشان دادند که این عملگر ستارگونی از مرتبه‌ی α را بر حوزه‌ی $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ حفظ می‌کند. از طرف دیگر، فنگ[9] و لیو [۳] ثابت کردند که این عملگر تقریباً ستارگونی از مرتبه‌ی α را بر حوزه‌ی $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ حفظ می‌کند. بعداً، کوهر [۸]، میور[10] [۱۳] و رهروی[11] و همکاران [۱۵،۱۷] به کمک زنجیر لاونر عملگر تغییر یافته توسیع رافر- سافریجرا مطالعه کردند. اخیراً، خواص عملگر تغییر یافته توسیع رافر- سافریج بر گوی واحد

5. Graham
6. Kohr
7. Gong
8. Liu
9. Feng
10. Muir
11. Rahrovi

توسط وانگ و لیو [۲۲]، فنگ و لو[12] [۳] و رهروی و همکاران [۱۶،۱۸] بررسی شده‌اند.
در مقابل مطالعه‌ی عملگر تغییر یافته توسیع رافر–سافریج بر گوی واحد، طبیعی است اگر بتوانیم خواص عملگر تغییر یافته توسیع رافر– سافریج بر حوزه‌ی رین‌هارد $\Omega_{n,p_1,\ldots,p_n}$ را بررسی کنیم.

در سال ۲۰۱۱، وانگ و گائو[13] [۲۱] عملگر توسیع

$$F(z)=[\Phi_{n,p_2,\ldots,p_n}(f)](z)=$$
$$\left(f(z_1)+f'(z_1)\sum_{j=2}^{n}a_j z_j^{p_j},\right. \tag{۴}$$
$$\left.(f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}}z_2,\ldots,(f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}}z_n\right),$$

را بر حوزه‌ی رین‌هارد $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ معرفی نمودند، که در آن شاخه‌ی $(f'(z_1))^{\frac{1}{p_j}}|_{z_1=0}=1$ برای هر $p_j\geq 1$ انتخاب می‌شود. آن‌ها نشان دادند که تحت شرایط مختلفی برای a_j، $j=2,\ldots,n,$ این عملگر خواصی مانند تقریباً ستارگونی از مرتبه‌ی α و ستاره‌گونی از مرتبه‌ی α را بر حوزه‌ی $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ حفظ می‌کند، که در آن $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ به‌صورت

$$\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$$
$$=\left\{z\in C^n:|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}|z_j|^{p_j}<1\right\}. \tag{۵}$$

تعریف می‌شود.
در سال ۲۰۱۴، لی[14] و فنگ [۹] عملگر توسیع زیر را بر حوزه‌ی رین‌هارد $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ تعریف نمودند.

$$F(z)=[\Phi_{n,P_j}(f)](z)=$$
$$\left(f(z_1)+f'(z_1)\sum_{j=2}^{n}P_j(z_j),\right. \tag{۶}$$
$$\left.(f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}}z_2,\ldots,(f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}}z_n\right),$$

که در آن $P_j(z_j)$ چندجمله‌ای همگن از درجه‌ی n نسبت به z_j است و f، z_1 و $\hat{z}$ مشابهاً به‌صورت فوق تعریف شده‌اند. آن‌ها نشان دادند که تحت شرایط مختلفی برای P_j، $j=2,\ldots,n,$ این عملگر خواصی مانند تقریباً ستارگونی از مرتبه‌ی α و ستارگونی از مرتبه‌ی α را بر حوزه‌ی $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ حفظ می‌کند، که در آن $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ به‌صورت رابطه‌ی (۵) تعریف می‌شود.

در این مقاله، شرایط خاصی به‌ترتیب برای a_j و P_j به‌دست می‌آوریم که تحت آن‌ها عملگرهای توسیع $\Phi_{n,P_j}(f)$ و $\Phi_{n,p_2,\ldots,p_n}(f)$ قویاً و تقریباً فنرگونی از نوع β و مرتبه‌ی α را بر $\Omega_{n,p_1,\ldots,p_n}$ حفظ نمایند.

۲- لم‌های کمکی

برای اثبات نتایج اصلی مقاله، به لم‌های زیر نیاز داریم.

لم ۱. [۷] (لم پیک– شوارتز) فرض کنید $g\in H(U)$، $g(U)\subset U$ و $\xi\in U$. در این صورت داریم

$$|g'(\xi)|\leq\frac{1-|g(\xi)|^2}{1-|\xi|^2}$$

لم ۲. [۱۴] فرض کنید f بر U نرمالیزه دو تحلیلی باشد، در این صورت داریم

$$\left|(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)}-2\bar{z}\right|\leq 4,\qquad z\in U.$$

لم ۳. [۲۴] اگر $\rho(z)$ تابعک مینکوفسکی بر حوزه‌ی $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ باشد و $z\neq 0$. آن‌گاه داریم

12. Yu
13. Gao
14. Li

$$\frac{\partial\rho}{\partial z_1}(z)=\frac{\overline{z}_1}{\rho(z)\left[2\left|\frac{z_1}{\rho(z)}\right|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j\left|\frac{z_j}{\rho(z)}\right|^{p_j}\right]},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z)=\frac{p_j\overline{z}_j\left|\frac{z_j}{\rho(z)}\right|^{p_j-2}}{2\rho(z)\left[2\left|\frac{z_1}{\rho(z)}\right|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j\left|\frac{z_j}{\rho(z)}\right|^{p_j}\right]},$$

$p_j\ge 1,\ j=2,\mathrm{K}\ ,n.$

۳- نتایج اصلی

این بخش را با قضیه‌ی زیر شروع می‌کنیم.

قضیه ۱. فرض کنید $\alpha\in[0,1)$، $\beta\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ و $c\in(0,1)$. همچنین فرض کنید عملگر $F(z)=[\Phi_{n,p_2,\mathrm{K},p_n}(f)](z)$ به‌صورت رابطه‌ی (۴) و $\Omega_{n,p_2,\mathrm{K},p_n}$ به‌فرم (۵) تعریف شده باشد. اگر اعداد مختلط a_j برای هر $j=2,\mathrm{K}\ ,n$، در رابطه‌ی $|a_j|\le\frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)}\cos\beta$ صدق نمایند، آن‌گاه F قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر $\Omega_{n,p_2,\mathrm{K},p_n}$ است اگر و تنها اگر $f(z)$ قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر U است.

برهان. بنا به تعریف قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α، کافی‌است نابرابری

$$\left|\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2}{\rho(z)}\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)\times J_f^{-1}(z)f(z)-\frac{1+c^2}{1-c^2}\right|\le\frac{2c}{1-c^2},\qquad (۷)$$

را برای هر $z\in\Omega_{n,p_2,\mathrm{K},p_n}$ و $|a_j|\le\frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)}\cos\beta$ ثابت کنیم. به‌وضوح این رابطه برای $z=0$ برقرار است، لذا فرض کنیم $z=(z_1,\hat{z})\in\overline{\Omega}_{n,p_2,\mathrm{K},p_n}\setminus\{0\}$. پس دو حالت زیررا دارم:

اولاً، اگر $\hat{z}=0$، آن‌گاه حکم به‌سادگی اثبات می‌شود.

ثانیاً، فرض کنید $\hat{z}\neq 0$. به‌وضوح نگاشت F در هر همسایگی $z=(z_1,\hat{z})\in\overline{\Omega}_{n,p_2,\mathrm{K},p_n}\setminus\{0\}$ تحلیلی است. برای $u\in\partial\Omega_{n,p_2,\mathrm{K},p_n}$، که $\hat{u}\neq 0$ و $\lambda\in\overline{U}\setminus\{0\}$ قرار می‌دهیم $z=\lambda u=|\lambda|e^{i\theta}u$. در این‌صورت بنا به رابطه‌ی (۱) داریم

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2}{\rho(z)}\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)J_F^{-1}(z)F(z)]-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1$$

$\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2}{\rho(|\lambda|e^{i\theta}u)}\frac{\partial\rho}{\partial z}(|\lambda|e^{i\theta}u)J_F^{-1}(|\lambda|e^{i\theta}u)F(|\lambda|e^{i\theta}u)\right]-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1$$

$\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2}{|\lambda|}\frac{e^{-i\theta}\partial\rho}{\partial z}(u)J_F^{-1}(|\lambda|e^{i\theta}u)F(|\lambda|e^{i\theta}u)\right]-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1$$

$\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2}{\lambda}\frac{\partial\rho}{\partial z}(u)J_F^{-1}(\lambda u)F(\lambda u)\right]-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1.$$

عبارت

$$\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2}{\lambda}\frac{\partial\rho}{\partial z}(u)J_F^{-1}(\lambda u)F(\lambda u)\right]-\frac{1+c^2}{2c}$$

نسبت به λ تحلیلی است. بنابراین، بنا به اصل ماکسیمم مطلق برای توابع تحلیلی، در $|\lambda|=1$ به مقدار ماکسیمم خود را می‌رسد. لذا، کافی است حکم را برای هر $z=(z_1,\hat{z})\in\partial\Omega_{n,p_2,\mathrm{K},p_n}$ که $\hat{z}\neq 0$ اثبات کنیم. پس $\rho(z)=1$ و کافی‌است برای هر $z\in\partial\Omega_{n,p_2,\mathrm{K},p_n}$ و $\hat{z}\neq 0$ نابرابری زیر را ثابت کنیم.

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(z)]-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1,$$

چون

$$F(z)=[\Phi_{n,p_2,\ldots,p_n}(f)](z)=\left(f(z_1)+f'(z_1)\sum_{j=2}^{n}a_j z_j^{p_j},\ (f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}}z_2,\ldots,(f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}}z_n\right),$$

داریم

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}J_F^{-1}(z)F(z)=\\&\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_1}z_1\\&-\sum_{j=2}^{n}a_j(p_j-1)z_j^{p_j}\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_1}\\&+\sum_{j=2}^{n}[1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{p_j(f'(z_1))^2}\\&+\frac{f''(z_1)}{p_jf'(z_1)}\sum_{k=2}^{n}a_k(p_k-1)z_k^{p_k}]\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_j}z_j.\end{aligned}\tag{۸}$$

حال بنا به لم (۳) داریم

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial z_1}(z)=\frac{\overline{z}_1}{\rho(z)\left[2\left|\frac{z_1}{\rho(z)}\right|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j\left|\frac{z_j}{\rho(z)}\right|^{p_j}\right]}\\&=\frac{\overline{z}_1}{2|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}},\\&\frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z)=\frac{p_j\overline{z}_j|z_j/\rho(z)|^{p_j-2}}{2\rho(z)\left[2\left|\frac{z_1}{\rho(z)}\right|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j\left|\frac{z_j}{\rho(z)}\right|^{p_j}\right]}\\&=\frac{p_j\overline{z}_j|z_j|^{p_j-2}}{2\left[2|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}\right]}.\end{aligned}\tag{۹}$$

از روابط (۸) و (۹) داریم

$$\begin{aligned}&\frac{1-c^2}{2c}\left(\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2\partial\rho}{\partial z}(z)J_F^{-1}F(z)\right)\\&-\frac{1+c^2}{2c}=\frac{G(z)}{2|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}}\end{aligned}\tag{۱۰}$$

که در آن

$$\begin{aligned}&G(z)=2|z_1|^2\left(\frac{1-c^2}{2c}\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}\right.\\&\left.+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{1-c^2}{2c}\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}-\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)\\&+\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\\&\times\sum_{j=2}^{n}a_j(p_j-1)z_j^{p_j}\\&\times\left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\sum_{j=2}^{n}|z_j|^{p_j}-2\overline{z}_1\right)\\&+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}\left(\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\right.\\&\times\left(1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{p_j(f'(z_1))^2}\right)\\&\left.+\frac{1-c^2}{2c}\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{2c}\right)\end{aligned}\tag{۱۱}$$

فرض کنید

$$\begin{aligned}&h(z_1)=\frac{1-c^2}{2c}\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}\\&+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{1-c^2}{2c}\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}-\frac{1+c^2}{1-c^2}.\end{aligned}\tag{۱۲}$$

چون $h(z_1)$ بر U قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α است، داریم $|h(z_1)|<1$. با انجام محاسباتی داریم

$$\begin{aligned}&\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{f(z_1)f''(z_1)}{(f'(z_1))^2}\\&=-c-h(z_1)-z_1h'(z_1).\end{aligned}\tag{۱۳}$$

لذا با جایگزاری روابط (۱۲) و (۱۳) در رابطه‌ی (۱۱) داریم

$$\begin{aligned}&G(z)=2|z_1|^2h(z_1)\\&+\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\end{aligned}$$

$$\times\sum_{j=2}^{n} a_j (p_j-1) z_j^{p_j}\left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\sum_{j=2}^{n}|z_j|^{p_j} - 2\bar{z}_1\right)$$
$$+\sum_{j=2}^{n} p_j\left(\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\right.$$
$$\left.+\frac{c}{p_j}+\frac{1-c^2}{2c}\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{2c}\right)|z_j|^{p_j}$$
$$+h(z_1)\sum_{j=2}^{n}|z_j|^{p_j} + z_1 h'(z_1)\sum_{j=2}^{n}|z_j|^{p_j}$$

چون $z\in\partial\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ پس

$$|z_1|^2+\sum\nolimits_{j=2}^{n}|z_j|^{p_j}=1$$

لذا داریم

$$G(z)=2|z_1|^2\, h(z_1)+\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}$$
$$\times\sum_{j=2}^{n} a_j (p_j-1) z_j^{p_j}\left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}(1-|z_1|^2)-2\bar{z}_1\right)$$
$$+\sum_{j=2}^{n} p_j\left(\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{c}{p_j}\right.$$
$$\left.+\frac{1-c^2}{2c}\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{2c}\right)|z_j|^{p_j}$$
$$+h(z_1)(1-|z_1|^2)+z_1 h'(z_1)(1-|z_1|^2).$$

بنابراین داریم

$$|G(z)|\le|h(z_1)|(1+|z_1|^2)$$
$$+|z_1 h'(z_1)|(1-|z_1|^2)+\sum_{j=2}^{n} c(p_j-1)|z_j|^{p_j}$$
$$+\frac{1-c^2}{2c}\left|\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\right|$$
$$\times\sum_{j=2}^{n}|a_j|(p_j-1)|z_j|^{p_j}\left|\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}(1-|z_1|^2)-2\bar{z}_1\right|$$

لذا از لم (۱) و (۲) داریم

$$|G(z)|\le|h(z_1)|(1+|z_1|^2)+$$
$$|z_1|(1-|h(z_1)|^2)+c\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)|z_j|^{p_j}$$
$$+\frac{4}{(1-\alpha)\cos\beta}\frac{1-c^2}{2c}\sum_{j=2}^{n}|a_j|(p_j-1)|z_j|^{p_j}$$
$$=|h(z_1)|(1+|z_1|^2)+|z_1|(1-|h(z_1)|^2)+$$
$$\sum_{j=2}^{n}\left(c+\frac{4}{\cos\beta}\frac{1-c^2}{2c}|a_j|\right)(p_j-1)|z_j|^{p_j}$$
$$\le(1+|z_1|^2)(|h(z_1)|-1)+(1+|z_1|^2)$$
$$+2|z_1|(1-|h(z_1)|)$$
$$+\sum_{j=2}^{n}\left(c+\frac{2}{(1-\alpha)\cos\beta}\frac{1-c^2}{c}|a_j|\right)(p_j-1)|z_j|^{p_j}$$
$$=(1+|z_1|^2)+(1-|z_1|)^2(|h(z_1)|-1)$$
$$+\sum_{j=2}^{n}\left(c+\frac{2}{(1-\alpha)\cos\beta}\frac{1-c^2}{c}|a_j|\right)(p_j-1)|z_j|^{p_j}$$

اگر $|a_j|\le\frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)}\cos\beta$، آن‌گاه داریم

$$|G(z)|\le(1+|z_1|^2)$$
$$+(1-|z_1|)^2(|h(z_1)|-1)$$
$$+\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)|z_j|^{p_j} \qquad (۱۴)$$
$$\le 2|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}$$

از روابط (۱۰) و (۱۴) داریم

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(z)\right]$$
$$\left.-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1.$$

بنابراین F قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α است.

برعکس، نشان می‌دهیم اگر

$$F(z)=[\Phi_{n,p_2,\ldots,p_n}(f)](z)$$
$$=\left(f(z_1)+f'(z_1)\sum_{j=2}^{n}a_j z_j^{p_j},\right.$$
$$\left.(f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}}z_2,\ldots,(f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}}z_n\right),$$

قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α باشد،

آن‌گاه f نیز چنین است. در واقع اگر $z=(z_1,0,\ldots,0)\in\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$، $z_1\neq 0$ آن‌گاه برای $0<|z_1|<1$ بنا به روابط (۸) و (۹) داریم

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}\right]-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1.$$

و حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۲. فرض کنید $\alpha\in[0,1)$، $\beta\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ و $c\in(0,1)$. همچنین فرض کنید عملگر $F(z)=\Phi_{n,P_j}(f)(z)$ به‌صورت رابطه‌ی

$$F(z)=[\Phi_{n,P_j}(f)](z)=\left(f(z_1)+f'(z_1)\sum_{j=2}^{n}P_j(z_j),\ (f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}}z_2,\ldots,(f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}}z_n\right),$$

بر $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ تعریف شده باشد. اگر $\|P_j\|\le\frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)}\cos\beta$ آن‌گاه $f(z)$ قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر U است، اگر و تنها F قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ باشد.

برهان. بنا به تعریف (۳) کافی‌است برای هر $z\in\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$، $z\neq 0$ و $\|P_j\|\le\frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)}\cos\beta$ ثابت کنیم

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\times\frac{2}{\rho(z)}\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(z)\right]-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1 \quad (۱۵)$$

مشابه قضیه‌ی (۱)، بنا به اصل مدول مینیمم برای توابع تحلیلی کافی‌است رابطه‌ی (۱۵) را برای هر $\rho(z)=1$ و $\hat{z}\neq 0$ ثابت کنیم. لذا کافی است نشان دهیم

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\times\frac{2\partial\rho}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(z)\right]-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1,$$

چون

$$F(z)=[\Phi_{n,P_j}(f)](z)=\left(f(z_1)+f'(z_1)\sum_{j=2}^{n}P_j(z_j),\ (f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}}z_2,\ldots,(f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}}z_n\right),$$

پس

$$J_F(z)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \beta_2 & \lambda_2 I_{n-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_n & 0 & \cdots & \lambda_n I_{n-1}\end{bmatrix}$$

که در آن I_{n-1} عملگر همانی در فضای $\mathbb{C}^{n-1}$ است و

$$\lambda_1=f'(z_1)+f''(z_1)\sum_{j=2}^{n}P_j(z_j),$$

$$\lambda_j=(f'(z_1))^{\frac{1}{p_j}},\quad j=2,\ldots,n,$$

$$\alpha_j=f'(z_1)\nabla P_j(z_j),$$

$$\beta_j=\frac{1}{p_j}(f'(z_1))^{\frac{1}{p_j}-1}f''(z_1)z_j,\quad j=2,\ldots,n.$$

قرار می‌دهیم

$$J_F^{-1}(z)F(z)=A=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n$$

داریم

$$x_1=\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}-\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)P_j(z_j),$$

$$x_2 =$$
$$\left(1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{p_2(f'(z_1))^2}+\frac{f''(z_1)}{p_2 f'(z_1)}\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)P_j(z_j)\right)z_2,$$
$$\vdots$$
$$x_n =$$
$$\left(1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{p_n(f'(z_1))^2}+\frac{f''(z_1)}{p_n f'(z_1)}\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)P_j(z_j)\right)z_n.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}J_F^{-1}(z)F(z)=\\&\frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)}\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_1}z_1\\&-\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)P_j(z_j)\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_1}\\&+\sum_{j=2}^{n}\left(1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{p_j(f'(z_1))^2}\right.\\&\left.+\frac{f''(z_1)}{p_j f'(z_1)}\sum_{k=2}^{n}(p_k-1)P_k(z_k)\right)\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_j}z_j.\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

حال از لم (۳) داریم

$$\frac{\partial\rho}{\partial z_1}(z)=\frac{\bar{z}_1}{2|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}},$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z)=\frac{p_j\bar{z}_j|z_j|^{p_j-2}}{2\left(2|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}\right)}. \qquad (۱۷)$$

از روابط (۱۶) و (۱۷) داریم

$$\begin{aligned}&\frac{1-c^2}{2c}\left(\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{2\partial\rho}{\partial z}(z)J_F^{-1}F(z)\right)\\&-\frac{1+c^2}{2c}=\frac{G(z)}{2|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}}\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که در آن

$$\begin{aligned}&G(z)=\frac{1-c^2}{2c}\Big[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}(2|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j})\\&+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\Big[2|z_1|^2\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}\\&+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}\left(1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{p_j(f'(z_1))^2}\right)+\\&\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)P_j(z_j)\left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\sum_{k=2}^{n}|z_k|^{p_k}-2\bar{z}_1\right)\Big]\Big]\\&-\frac{1+c^2}{2c}\left(2|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}\right)\\&=2|z_1|^2\left[\begin{array}{l}\frac{1-c^2}{2c}\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\\\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{1-c^2}{2c}\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}-\frac{1+c^2}{2c}\end{array}\right]\\&+\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)P_j(z_j)\\&\left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\sum_{k=2}^{n}|z_k|^{p_k}-2\bar{z}_1\right)\\&+\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\sum_{j=2}^{n}p_j\left(1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{p_j(f'(z_1))^2}\right)|z_j|^{p_j}\\&+\sum_{j=2}^{n}p_j\left[\frac{1-c^2}{2c}\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{2c}\right]|z_j|^{p_j}\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

فرض کنید

$$\begin{aligned}&h(z_1)=\frac{1-c^2}{2c}\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}\\&+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{1-c^2}{2c}\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}-\frac{1+c^2}{1-c^2}.\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

چون $h(z_1)$ بر U قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α است، داریم $|h(z_1)|<1$. با انجام محاسباتی داریم

$$\begin{aligned}&\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{f(z_1)f''(z_1)}{(f'(z_1))^2}\\&=-c-h(z_1)-z_1h'(z_1).\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

لذا با جایگذاری روابط (۲۰) و (۲۱) در رابطه‌ی (۱۹) داریم

$$\begin{aligned}
G(z) &= 2|z_1|^2\, h(z_1) + \frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha} \\
&\times\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)P_j(z_j)\left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\sum_{k=2}^{n}|z_k|^{p_k}-2\bar{z}_1\right) \\
&+\sum_{j=2}^{n}p_j\left[\frac{1-c^2}{2c}\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{2c}\right]|z_j|^{p_j} \\
&+\frac{1-c^2}{2c}\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j} \\
&+h(z_1)\sum_{j=2}^{n}|z_j|^{p_j}+z_1h'(z_1)\sum_{j=2}^{n}|z_j|^{p_j} \\
&+c\sum_{j=2}^{n}|z_j|^{p_j}\,.
\end{aligned}$$

حال بنا به لم (۱) و (۲) داریم

$$\begin{aligned}
|G(z)| &\le (1+|z_1|^2)|h(z_1)| \\
&+\sum_{j=2}^{n}c(p_j-1)|z_j|^{p_j} \\
&+|z_1|\frac{1-|h(z_1)|^2}{1-|z_1|^2}(1-|z_1|^2) \\
&+\frac{4}{(1-\alpha)\cos\beta}\frac{1-c^2}{2c}\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)|P_j(z_j)| \\
&\le \left(1+|z_1|^2\right)\left|h(z_1)\right|+|z_1|\left(1-\left|h(z_1)\right|^2\right) \\
&+\sum_{j=2}^{n}\left(c+\frac{2}{\cos\beta}\frac{1-c^2}{c(1-\alpha)}P_j\right)(p_j-1)|z_j|^{p_j} \\
&\le (1+|z_1|^2)(|h(z_1)|-1)+(1+|z_1|^2) \\
&+2|z_1|(1-|h(z_1)|) \\
&+\sum_{j=2}^{n}\left(c+\frac{2}{\cos\beta}\frac{1-c^2}{c(1-\alpha)}P_j\right)(p_j-1)|z_j|^{p_j} \\
&= 1+|z_1|^2+(1-|z_1|)^2(|h(z_1)|-1) \\
&+\sum_{j=2}^{n}\left(c+\frac{2}{\cos\beta}\frac{1-c^2}{c(1-\alpha)}P_j\right) \\
&\times(p_j-1)|z_j|^{p_j}
\end{aligned}$$

بنابراین، برای $\|P_j\| \le \frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)}\cos\beta$، $j=2,\ldots,n$ داریم

$$\begin{aligned}
|G(z)| &\le 1+|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}(p_j-1)|z_j|^{p_j} \\
&= 2|z_1|^2+\sum_{j=2}^{n}p_j|z_j|^{p_j}
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

لذا از روابط (۱۸) و (۲۲) داریم

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\times\frac{2\partial\rho}{\partial z}(z)J_F^{-1}(z)F(z)\right]-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1,$$

F قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر $\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$ است.

برعکس، نشان می‌دهیم اگر

$$F(z)=\left(f(z_1)+f'(z_1)\sum_{j=2}^{n}P_j(z_j),\ (f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}}z_2,\ldots,(f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}}z_n\right),$$

قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α باشد، آن‌گاه f نیز چنین است. در واقع اگر $z=(z_1,0,\ldots,0)\in\Omega_{n,p_2,\ldots,p_n}$، $z_1\neq 0$ آن‌گاه برای $0<|z_1|<1$ بنا به روابط (۸) و (۹) داریم

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{-\alpha+i\tan\beta}{1-\alpha}+\frac{1-i\tan\beta}{1-\alpha}\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}\right]-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1.$$

و حکم ثابت می‌شود.

تذکر۳. با فرض $\alpha=0$، $\beta=0$ و $\alpha=\beta=0$ در قضایای ۱ و ۲، نتایج مربوط به مفاهیم قویاً فنرگون از

نوع β، قویاً و تقریباً فنرگون از مرتبه‌ی α و قویاً ستارگون را به‌دست می‌آوریم.

نتیجه‌گیری

ازآن جایی که یافتن مثال برای توابع محدب، ستارگون، فنرگون و ... در فضای n-بعدی B^{n} بسیار دشوار است لذا عملگر توسیعی رافر-سافریج و تعمیم‌های آن روش بسیار ساده‌ای جهت ارائه مثال‌هایی این چنینی را در این فضا فراهم می‌آورد. در این مقاله، با بررسی شرایط خاصی به‌ترتیب برای a_j و P_j نشان دادیم که تحت آن شرایط، عملگرهای توسیع $\Phi_{n,P_j}(f)$ و $\Phi_{n,p_2,\ldots,p_n}(f)$ قویاً فنرگونی و تقریباً فنرگونی از نوع β و مرتبه‌ی α را بر $\Omega_{n,p_1,\ldots,p_n}$ حفظ می‌نماید.

فهرست منابع

[1] Y. Cui, C. Wang and H. Liu, The invariance strong and almost starlik mapping of type β and order α, Acta Math. Sci. Ser. B, 35(6)(2015), 1454-1466.

[2] S. X. Feng, T. S. Liu and G. B. Ren, The growth and covering theorems for several mappings on the unit ball in complex Banach spaces, Chin. Ann. Math., 28A(2)(2007), 215-230.

[3] S. X. Feng and T. S. Liu, Modified Roper-Suffridge operator for some holomorphic mappings, Front. Math. Chin., 6(3)(2011), 411-426.

[4] S. Gong and T. S. Liu, On the Roper-Suffridge extension operator, J. Anal. Math., 88(2002), 397-404.

[5] S. Gong and T. S. Liu, The generalized Roper-Suffridge extension operator, J. Math. Anal. Appl., 284(2)(2003), 425-434.

[6] I. Graham and G. Kohr, Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator, J. Anal. Math., 81(2000), 331-342.

[7] I. Graham and G. Kohr, Geometric function theory in one and higher dimensions, Marcel Dekker, New York, (2003).

[8] G. Kohr, Loewner chains and a modification of the Roper-Suffridge extension operator, Mathematica (Cluj), 48(1)(2006), 41-48.

[9] H. Li, S. Feng, Roper-Suffridge extension operator on a Reinhardt domain, Acta. Math. Sci., 34B (2014), No. 6, 1761-1774.

[10] T. S. Liu and S. Gong, The family of starlike mappings. I , Chin. Annal. Math. Ser. A., 23(3)(2002), 273-282.

[11] X. S. Liu and T. S. Liu, The generalized Roper-Suffridge extension operator on a Reinhardt domain and the unit ball in a complex Hilbert space, Chin. Annal. Math. Ser. A., 26(5)(2005), 721-730.

[12] T. S. Liu and G. B. Ren, The growth theorem for starlike mappings on bounded starlike circular domains, Chin. Annal. Math. Ser. B., 19(4)(1998), 401-408.

[13] J. R. Muir, A class of the Loewner chain preserving extention operators, Comput. Meth. func. Theo., 5(1)(2005), 237-251.

[14] C. Pommerenke, Univalent functions, Vandenhoek and Ruprecht, $\ddot{o}$ Gttingen, Germmany, (1975).

[15] S. Rahrovi, A. Ebadian and S. Shams, G-Loewner chains and parabolic starlike mappings in several complex variables, General Math., 20(2-3)(2012). 59-73.

[16] S. Rahrovi, A. Ebadian and S. Shams, Applications of the Roper-Suffridge Extension Operator to the Spirallike mappings of type β , Acta Uni. Apul., 37(2014), 171-183.

[17] S. Rahrovi, Parabolic starlike mappings on the unit ball B^n , Sahand Commu. Math. Anal., 3(1)(2016), 63-70.

[18] S. Rahrovi and H. Piri, The generalized Roper-Suffridge extension operator on the Rienhardt domains , J. Math. System Sci. 6(2016) 383-394.

[19] K. A. Roper and T. J. Suffridge, Convex mappings on the unit ball $\mathbb{C}^n$, J. Anal. Math., 65(1995), 333-347.

[20] J. Wang, Modified Roper-Suffridge for some subclasses of starlike mappings on Reinhardt domains, Act. Math. Sci., 33(6)(2013), 1627-1638.

[21] J. Wang and C. Gao, A new Roper-Suffridge extension operator on a Reinhardt domain, Abst. Appl. Anal.,(2011), 1-14.

[22] J. F. Wang and T. S. Liu, A modified Roper-Suffridge extension operator for some holomorphic mappings, Chin. Annal. Math. Ser. A., 31(4)(2010), 487-496.

[23] Y. C Zhu and M. S. Liu, The generalized Roper-Suffridge extension operator on a Reinhardt domain D_p, Taiwanese J. Math., 14(2)(2010), 359-372.

[24] W. J. Zhang and T. S. Liu, On decomposition theorem of normalized biholomorphic convex mappings in Reinhardt domains, Sci. Chin., 46(1)(2003), 94-106.