دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک روش نیوتن تعمیم یافته اصلاح شده برای حل معادلات قدرمطلقی

یاسر سیف[1]، طاهر لطفی[2]*

[(۱و۲)] گروه ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۹/۲۳   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۴/۱۱

چکیده

در سال‌های اخیر علاقه به مطالعه معادلات قدرمطلقی هم از لحاظ تئوری، هم از لحاظ عملی بسیار مورد توجه واقع شده است. دلیل اصلی این کار هم آن است که مسائل مختلفی را در بهینه‌سازی از جمله مسئله مکمل برنامه‌ریزی خطی را می توان به شکل معادله قدرمطلقی نوشت که ساده‌تر حل می‌شود. هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش تکراری برای حل معادلات قدرمطلقی است. در واقع در این مقاله، با معرفی یک ماتریس اسکالر، یک روش نیوتن تعمیم یافته اصلاح شده برای حل معادلات قدرمطلقی ارائه شده است. این روش جدید بر اساس روش های منگسرین [۱] و لی [۲] به‌دست می‌آید، که اگر در ماتریس $A + \alpha I - D$، مقدار ضریب ماتریس همانی را مساوی صفر قرار دهیم روش منگسرین و اگر آن را برابر یک قرار دهیم به روش لی می‌رسیم. همچنین این روش همگرایی سراسری خطی دارد، اگر مقادیر منفرد ماتریس ضرایب بیشتر از یک باشد.

واژه‌های کلیدی: معادلات قدرمطلقی، روش نیوتن، ماتریس اسکالر، مقادیر منفرد.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: lotfi@iauh.ac.ir, lotfitaher@yahoo.com

۱- مقدمه

معادلات قدرمطلقی در حالت کلی به شکل زیر می‌باشد

$$Ax - |x| = b \qquad (۱)$$

که در آن ماتریس $A\in R^{n\times n}$ و $b\in R^{n}$ و $|\cdot|$ نماد قدرمطلق تعریف شده است. این معادلات که به اختصار به آنها AVE[1] می‌گویند، در سال‌های اخیر، برخی ازروش‌های عددی برای حل معادلات قدرمطلقی توسعه یافته‌اند [۳،۴،۵،۶،۷]، روش نیوتن [۸،۹،۱۰،۱۱،۱۴]، روش تراب[۱۲] و روش تابع علامت [۱۳] و نیز سایر روش‌های تکراری [۱۵-۲۱] را می‌توان مشاهده کرد. منگسرین [۱] یک روش نیوتن تعمیم یافته برای حل معادلات قدر مطلقی بصورت زیر ارائه داد:

$$x^{k+1} = \left(A - D\left(x^{k}\right)\right)\backslash b \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

که دنباله بدست آمده از تکرارهای برداری $\{x^{i}\}_{i=0}^{\infty}$ همگرای خطی به جواب معادله (۱) می‌باشد، هنگامی که مقادیر منفرد ماتریس A کمتر از یک نباشد.

اهمیت AVEها از این لحاظ است، که این دستگاه تحت شرایطی با مسائل مکمل خطی که به اختصار به آن LCP[2] می‌گویند، هم ارز است. از طرفی بسیاری از مسائل خطی و درجه دوم می‌توانند به مسائل مکمل خطی تبدیل شوند و همچنین تعدادی از مسائل فیزیکی در علوم مهندسی مانند مساله تماس، مساله شار متخلخل، مسائل سد، مساله انقباض منجر به مدل برنامه ریزی درجه دوم محدب می‌شوند، که چون این مسائل با مسائل مکمل خطی هم ارزند و مسائل مکمل خطی هم ارز دستگاه معادلات قدرمطلق هستند. واضحست که الگوریتم‌هایی که برای حل AVE ارائه می‌شود، برای حل LCP نیز به کار می‌رود و در نتیجه مسائل خطی، مسائل درجه دوم و مسائل فیزیکی که به آن اشاره شد، را می‌توان حل کرد. شایان ذکر است که حل معادلات قدر مطلقی ساده‌تر از مسائل LCP است.

در ادامه، مقاله متشکل از بخش‌های زیر است، در بخش ۲ مفاهیم اساسی و در بخش ۳ روش نیوتن تعمیم یافته اصلاح شده ارائه خواهد شد و ویژگی‌های همگرایی مورد بحث قرار خواهد گرفت، و در بخش پایانی نتیجه‌گیری را خواهیم داشت.

۲- مفاهیم اساسی

مفاهیم پایه‌ای زیر را نیاز داریم:

تعریف ۲-۱: فرض کنید فضای ضرب داخلی V یک فضای برداری حقیقی باشد، ضرب داخلی روی V تابعی است که به هر جفت از بردارهای u , v از V، عدد حقیقی $\langle u,v\rangle$ را نسبت می‌دهدکه ضرب داخلی این دو بردار نامیده می‌شود. هرگه برای بردارهای u, v, w و اسکالرهای α وβ داشته باشیم:

الف) $\langle u,v\rangle \geq ۰$ و $\langle u,v\rangle = ۰$ اگروتنها اگر $u = ۰$

ب) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

ج) $\langle(\alpha v + \beta u), w\rangle = \alpha\langle v,w\rangle + \beta\langle u,w\rangle$

تعریف ۲-۲: ماتریس مربعی A را قطری گویند، اگر تمام مؤلفه‌های غیر از قطر اصلی آن صفر باشند. ماتریس قطری را معمولاً بصورت $D = \mathrm{diag}(d_{۱۱}, d_{۱۲}, \ldots, d_{nn})$ نمایش می‌دهند که:

$$D = \begin{pmatrix} d_{۱۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & d_{22} & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

تعریف ۲-۳: (ماتریس همانی) اگر همه درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ باشد، ماتریس را همانی گویند و آن را با I نشان می‌دهند.

تعریف ۲-۴: (ماتریس اسکالر) هرگاه در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های قطر اصلی با هم برابر باشند، ماتریس را اسکالر نامیده و هر ماتریس اسکالر مضربی از یک ماتریس واحد است.

$$\mathrm{diag}(a,a,\ldots,a) = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix} = aI$$

1. Absolute value equation
2. Linear complementarity problem

تعریف ۲-۵: (ماتریس علامت) ماتریس قطری D را ماتریس علامت بردار x گوییم هرگاه عناصر قطری D بیانگر علامت درایه‌های بردار x باشند.

تعریف ۲-۶: (ماتریس ژاکوبی) اگر $f: R^n \to R^m$ یک تابع مشتق‌پذیر چند متغیره باشد که مقادیر آن $[y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_m(x_1,\dots,x_n)]$ باشند، آنگاه مشتق آن در هر نقطه $(x_1,\dots,x_n)$، یک نگاشت خطی از فضای R^n به R^m می‌باشد، به‌طوری که ماتریس این نگاشت خطی به صورت زیر نوشته می‌شود $=: \frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} =: J_F(x_1,\dots,x_n)$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

توجه: یک ژاکوبین تعمیم یافته $\partial f(x)$ از $|x|$ بر اساس منابع [۱۸،۱۹] از مولفه‌های داده شده روی ماتریس قطری $D(x)$ به این صورت داده شده است:

$$D(x) = \partial |x| = \operatorname{diag}(\operatorname{sign}(x))$$

لم ۲-۱: فرض کنید $A \in R^{n\times n}$ باشد، آنگاه ماتریس A^TA یک ماتریس $n \times n$ معین نامنفی است، مقادیر ویژه A^TA نامنفی است،

$$x^TA^TAx = \|Ax\|_۲^۲ \ge ۰$$

اگر این مقادیر ویژه را با $\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n$ نشان دهیم و قرار دهیم $\sigma_۱^۲ = \lambda_۱, \sigma_۲^۲ = \lambda_۲, \dots, \sigma_n^۲ = \lambda_n$ در این صورت $\sigma_۱, \sigma_۲, \dots, \sigma_n$ مقادیر منفرد ماتریس A است.

لم ۲-۲: (پیوستگی لیپ شیتس قدرمطلق) فرض کنید $x, y \in R^n$ پس:

$$\| |x| - |y| \| \le 2 \|x - y\|.$$

اثبات:

$$\| |x| - |y| \| = \| x_+ + (-x)_+ - y_+ - (-y)_+ \|$$
$$\le \| x_+ - y_+ \| + \| (-x)_+ - (-y)_+ \|$$
$$\le \| x - y \| + \| (-x) - (-y) \| = 2\| x - y \|$$

۳- روش نیوتن اصلاح شده

با تابع برداری خطی $f(x)$ با استفاده از تعریف معادلات قدرمطلقی (۱) شروع می‌کنیم.

$$f(x) = Ax - |x| - b \qquad (۳)$$

ژاکوبین تعمیم یافته (۳) به این صورت بیان می‌شود:

$$\partial f(x) = A - D(x) \qquad (۴)$$

که یادآوری می‌کنیم $D(x) = \operatorname{diag}(\operatorname{sign}(x))$ پس روش نیوتن تعمیم یافته اصلاح شده برای پیدا کردن جواب معادله $f(x) = 0$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x^k) + \left(\partial f(x^k) + \alpha I\right)\left(x^{k+1} - x^k\right) = 0 \qquad (۵)$$

که I ماتریس همانی و αI یک ماتریس اسکالر می‌باشد. با جایگزینی $f(x^k)$ با (۳) و $\partial f(x^k)$ با (۴) خواهیم داشت:

$$Ax^k - |x^k| - b + \left(A + \alpha I - D(x^k)\right)\left(x^{k+1} - x^k\right) = 0 \qquad (۶)$$

و از آنجائیکه $D(x^k)x^k = |x^k|$، پس از ساده کردن رابطه (۶)، خواهیم داشت:

$$\left(A + \alpha I - D(x^k)\right)x^{k+1} = (x^k + b) \qquad (۷)$$

معادله فوق را نسبت به x^{k+1} حل می‌کنیم:

$$x^{k+1} = \left(A + \alpha I - D(x^k)\right) \backslash (x^k + b) \qquad (۸)$$

حال ویژگی همگرایی روش نیوتن اصلاح شده را برای معادلات قدرمطلق بررسی می‌نماییم. قبل از بررسی همگرایی روش (۸)، لازم است برای جلوگیری از طولانی شدن اثبات‌ها چند لم را بیان کنیم.

لم ۳-۱: مقادیر منفرد ماتریس $A \in R^{n\times n}$ بیشتر از یک است اگر و تنها اگر کمترین مقادیر ویژه A^TA بیشتر از یک باشد.

لم ۳-۲: اگر مقادیر منفرد از ماتریس $A \in R^{n\times n}$ بیشتر از یک باشد، آنگاه، برای هر ماتریس قطری D که عناصر قطری آن مساوی ۰ یا ±۱ باشد، $(A + \alpha I - D)^{-1}$ وجود دارد.

اثبات: به برهان خلف داریم:
اگر $A + \alpha I - D$ منفرد باشد، آنگاه به ازای هر $x \neq 0$، داریم: $(A + \alpha I - D)x = 0$، که با توجه به لم ۳-۱ تناقض است زیرا:

$$x^Tx < x^TA^TAx = x^T(D - \alpha I)Ax$$
$$= x^T(D - \alpha I)(D - \alpha I)x \le x^Tx$$

پس $A + \alpha I - D$ نامنفرد است.

لم ۳-۳: اگر مقادیر منفرد ماتریس A بیشتر از یک باشد، آنگاه هر تکرار

$$x^{k+1} = \left(A + \alpha I - D(x^k)\right)\backslash x^k + b$$

از روش نیوتن تعمیم یافته (۱۱)، خوش تعریف و کراندار است، در نتیجه نقطه حدی $\bar{x}$ که $(A + \alpha I - \bar{D})\bar{x} = x^k + b$ برای برخی ماتریس‌های قطری $\bar{D}$ با عناصر قطری ۰ و ±۱ وجود دارد.
اثبات خوش‌تعریفی و کرانداری مانند لم ۳ [۱۴] می‌باشد که از آن صرفنظر می‌کنیم.

قضیه ۱: اگر ماتریس $A + \alpha I - D$ یک ماتریس نامنفرد باشد، برای هر ماتریس قطری D با مؤلفه‌های قطری ۰ و ±۱ که در شرط $\|(A + \alpha I - D)^{-1}\| < \frac{1}{3}$ صدق کند، روش اصلاح شده نیوتن با هر نقطه آغازین دلخواه، به یک جواب $\bar{x}$ از معادله قدرمطلقی (۱) همگرایی خطی دارد.

اثبات: اگر $\bar{x}$ یک جواب از معادله قدرمطلقی (۱) باشد، داریم:
هنگامیکه $\|(A + \alpha I - D)^{-1}\| < \frac{1}{3}$ و همه مقادیر نامنفرد $A + \alpha I - D$ بیشتر از ۳ هستند.

$$\left(A + \alpha I - \bar{D}(\bar{x})\right)\bar{x} = \bar{x} + b \qquad (۹)$$

$$\left(A + \alpha I - D(x^k)\right)x^{k+1} = x^k + b \qquad (۱۰)$$

با ترکیب رابطه (۹) و رابطه (۱۰) داریم:

$$\left(A + \alpha I - D(x^k)\right)(x^{k+1} - x^k) = (x^k - \bar{x}) + D(x^k)(\bar{x} - x^k) + (|x^k| - |\bar{x}|) \qquad (۱۱)$$

$$(x^k - \bar{x}) = ((x^k - \bar{x}))^{-1}[(x^k - \bar{x}) + D(x^k)(\bar{x} - x^k) +) + |x^k| - |\bar{x}|] \qquad (۱۲)$$

با توجه به اینکه $D^ix^i = |x^i|$ و با استفاده از لم ۲-۲ داریم:

$$\||x| - |y|\| \le 2\|x - y\|,$$
$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| \le \left\|\left(A + \alpha I - D(x^k)\right)^{-1}\right.$$
$$\times [(x^k - \bar{x}) + D(x^k)(\bar{x} - x^k)$$
$$\left. + |x^k| - |\bar{x}|]\right\|$$
$$\le \left\|\left(A + \alpha I - D(x^k)\right)^{-1}\right\| \left\|[\|(x^k - \bar{x})\|\right.$$
$$+ \|D(x^k)(\bar{x} - x^k)\| + \||x^k| - |\bar{x}|$$
$$\le \left\|\left(A + \alpha I - D(x^k)\right)^{-1}\right\|$$
$$\times \left(2 \times \|\bar{x} - x^k\| + \||x^k| - |\bar{x}|\|\right)$$
$$\le 3 \times \left\|\left(A + \alpha I - D(x^k)\right)^{-1}\right\|$$
$$\times \left(\|\bar{x} - x^k\|\right)$$

با توجه به شرط $\|(A + \alpha I - D)^{-1}\| < \frac{1}{3}$ داریم:

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| \le \|\bar{x} - x^k\|$$

حال اگر ماتریس $A + \alpha I - D$ نامنفرد باشد، برای هر ماتریس قطری D با مؤلفه های ۰ , ±1 ، ماتریس همانی I و ماتریس اسکالر αI که ضریبی از ماتریس همانی باشد که در شرط فوق صدق کند، روش تعمیم یافته اصلاح شده نیوتن به جواب دلخواه $\bar{x}$ از معادله (۱) همگرایی خطی دارد.

۴- نتایج محاسباتی

در اینجا به آزمایش عددی روش اصلاح شده (A) می‌پردازیم. همچنین به ازای $\alpha = ۰$ همان روش منگسرین [۱] را نشان می‌دهد. برای پارامترهای مختلفی از α روش را بر روی ده ماتریس تصادفی با ابعاد مختلف برای حل معادله قدرمطلقی پیاده‌سازی کردیم. همه ماتریس‌های با توزیع یکنواخت از بازه [10, 10-] و به‌صورت تصادفی انتخاب شده‌اند. سپس با فرض برقراری شرایط روش گفته (مقادیر منفرد A بزرگتر از

یک) دستگاه‌های معادلات قدرمطلقی با ابعاد ۱۰۰ و ۱۰۰۰را آزمایش کردیم. در اغلب موارد (بیش از ۹۵ درصد) موارد گزارش‌های عددی در زمان کمتر از ۸۵۰ ثانیه حاصل شد که نسبت به روش منگسرین بهبود ۱۰۰ ثانیه‌ای داشت. بردار b را از رابطه $b = Ax - |k|$ برای $\alpha = ۰$ محاسبه کرده‌ایم. در جدول‌های ۱ و ۲ گزارش‌های این پیاده‌سازی و مقایسه‌ها را ارائه کرده‌ایم.

از جدول‌های ۱و ۲ ملاحظه می‌شود که برای $\alpha = ۰$ که همان روش منگسرین است، نتایج نسبت به اجرای خود مقاله اصلی بهتر بوده است. همچنین $\alpha = 1$ و $\alpha = -۱$ برای ابعاد ۱۰۰ تفاوت ملاحظه نمی‌شود، حال آنکه برای ابعاد بالاتر، مثل ۱۰۰۰، روش اصلاح شده کمی کارآمدتر است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش جدید برای حل معادله قدرمطلقی معرفی گردید. این روش حالت کلی‌تری از روش‌های منگسرین [۱] و، لی [۲] می‌باشد. در واقع اگر در ماتریس $A + \alpha I - D$، به ازای پارامتر $\alpha = 0$ روش منگسرین [۱]، و ازای پارامتر $\alpha = 1$ روش لی [۲] به‌دست می‌آید. همچنین نشان دادیم که این روش همگرایی سراسری خطی دارد، اگر مقادیر منفرد ماتریس ضرایب بیشتر از باشد. برای کارهای آتی می‌توان ایده‌های ذیل را به‌کار برد: چگونه می‌توان شرایط همگرایی ساده‌تری را در نظر گرفت؟ چگونه می‌توان مرتبه همگرایی روش را بالا برد؟

جدول۱: نتایج برای بعد ۱۰۰

روش	تکرار	زمان اجرا (ثانیه)
$\alpha = 1$	۴	۲
$\alpha = ۰$	۳	۱/۵
$\alpha = -1$	۲	۲

جدول۲: نتایج برای بعد ۱۰۰۰

روش	تکرار	زمان اجرا (ثانیه)
$\alpha = 1$	۶	۸۲۰
$\alpha = ۰$	۷	۸۵۰
$\alpha = -1$	۵	۸۱۰

فهرست منابع

1. O.L. Mangasarian, A generalized Newton method for absolute value equations. Optim. Lett. 3, 101–108 (2009)

2. C.X. Li, **A modified generalized newton method for absolute value equations.** J. Optim Theory Appl., 170:1055–1059 (2016)

3. J. Rohn, A theorem of the alternatives for the equation Ax + B|x| = b. Linear Multilinear A 52, 421–426 (2004)

4. O.L. Mangasarian, Absolute value programming. Comput. Optim. Appl. 36, 43–53 (2007)

5. R.W. Cottle, G.B. Dantzig, Complementary pivot theory of mathematical programming. Linear Algebra Appl. 1, 103–125 (1968)

6. R.W. Cottle, J.S. Pang, R.E. Stone, The Linear Complementarity Problem. Academic, San Diego (1992)

7. L. Caccetta, B. Qu, Zhou, A globally and quadratically convergent method for absolute value equations. Comput. Optim. Appl. 48, 45–58 (2011)

8. S. L. Hu, Z. H. Huang, Q. Zhang, A generalized Newton method for absolute value equations associated with second order cones. J. Comput. Appl. Math. 235, 1490–1501 (2011)

9. C. Zhang, Q. J. Wei, Global and finite convergence of a generalized Newton method for absolute value equations. J. Optim. Theory Appl. 143, 391–403 (2009)

10. S. Ketabchi, H. Moosaei, An efficient method for optimal correcting of absolute value equations by minimal changes in the right hand side, Comput. Math. Appl. 64, 1882–1885 (2012)

11. N. Zainali, T. Lotfi, On developing a stable and quadratic convergent method for solving absolute value equation, J. Comput. and Appl. Math.,742-747 (2018)

12. F. Kh. Haghani, On Generalized Traub’s Method for Absolute Value Equations, J. Optim. Theo. Appl., 619-625 (2015)

13. J. Rohn, An algorithm for solving the absolute value equations. Electron. J. Linear Algebra 18, 589– 599 (2009)

14. B. Huang, Ch. Ma, Convergent conditions of the generalized Newton method for absolute value equation over second order cones, Appl. Math. Lett. 92, 151–157 (2019)

15. J.J., Zhang, The relaxed nonlinear PHSS-like iteration method for absolute value equations, Appl. Math. Comput. 265, 266–274 (2015)

16. O.L.Mangasarian, A hybrid algorithm for solving the absolute value equation, Optim. Lett. 9(7), 1469–1474 (2015)

17. J. Rohn, V. Hooshyarbakhsh, R. Farhadsefat, An iterative method for solving absolute value equations and sufficient conditions for unique solvability, Optim. Lett. 8, 35–44 (2014)

18. Noor, M.A., Iqbal, J., Al-Said, E., Residual iterative method for solving absolute value equations, Abstr. Appl. Anal. 2012 Article ID 406232, 9 (2012)

19. Polyak, B.T.: Introduction to Optimization. Optimization Software Inc, Publications Division, New York (1987)

20. Rockafellar, R.T.: New applications of duality in convex programming. In

Proceedings Fourth Conference on Probability, Brasov (1971)

21. F. Rahpeymaii, K. Amini, T. Allahviranloo, M. Rostamy Malkhalifeh, A new class of conjugate gradient methods for unconstrained smoot optimization and absolute value equations. Calcolo, 56:2 (2019)

22. F. Bu, F. Ma, The tensor splitting methods for solving tensor absolute value equation, J. Comput. Appl. Math., 39:178 (2020