دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

ابررویه‌های هاف از فضا فرم ساساکی با عملگر ریچی موازی

محمد المکچی[۱]، اسماعیل عابدی[۲]*

(۱) استادیار، گروه ریاضی (هندسه)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۴/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۰۶

چکیده

فرض کنید M^{2n} یک ابررویه هاف با عملگر ریچی موازی و مماس بر میدان برداری ساختاری ξ در فضا فرم ساساکی $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$ باشد. ابتدا نشان می‌دهیم ابررویه‌ها و ابررویه‌های هاف در فضا فرم ساساکی دارای چه ساختار و خواصی هستند. سپس ساختار ابررویه ها و ابررویه‌های هاف را با داشتن ساختار عملگر ریچی موازی مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم دو حالت پیش می‌آید، در حالت اول عملگر شکل A از M^{2n} دارای خمیدگی‌های اصلی ثابتی هستند و حداکثر دارای سه مقدار ویژه متمایز هست. در حالت دوم عملگر شکل A روی D متحد با صفر است و M^{2n} دارای یک خمینه انتگرال که ساختار فضا فرم ساساکی می‌پذیرد را داراست. ابتدا با تعریف یک میدان برداری درM^{2n} نشان می‌دهیم که خم انتگرال این میدان برداری درM^{2n} ژئودزی بوده و همچنین با تعریف یک ابررویه در M^{2n} نشان می‌دهیم این ابررویه در M^{2n} تماماً ژئودزیک بوده و در نهایت نشان می‌دهیم که M^{2n} بطور موضعی بصورت حاصلضرب این رویه تماما ژئودزیک با خم ژئودزی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ابررویه، خمیدگی اصلی، زیرخمینه حاصلضربی، عملگر شکل، عملگر ریچی، فضا فرم ساساکی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: Esabedi@azaruniv.ac.ir

۱- مقدمه

فضاهای تماسی و ساساکی در طی ۲۰ سال گذشته مورد مطالعه و بررسی زیادی قرار گرفته‌اند. این رویه‌ها متمایز از رویه‌های مختلط، با شباهت‌هایی با این رویه‌ها اما با تفاوت‌های اساسی می‌باشند. در سال ۱۹۶۰ شیگو ساساکی خمینه‌هایی با ساختار تماسی را مورد مطالعه قرار داد ([۱] و [۲]) و ساختارهایی روی آن تعریف کرد. این خمینه‌ها را به افتخار او خمینه‌های ساساکی نامیده‌اند. از زمان معرفی این خمینه‌ها، ساختارهای این خمینه‌ها و ساختارهای فضا فرم‌ها و همچنین زیرخمینه‌های این خمینه‌ها مورد مطالعه بسیاری از ریاضیدانان قرار گرفته است ([۳]، [۴]، [۵]، [۶] و [۷]).

ابررویه با عملگر ریچی موازی در فضاهای مختلف مورد مطالعه و طبقه‌بندی قرار گرفته‌اند ([۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱] و [۱۲]). بیشتر مفاهیم پایه‌ای بر اساس منابع [۳]، [۴]، [۵]، [۷] ، [۱۳] و [۱۴] می‌باشند.

۲- مفاهیم پایه‌ای

خمینه دیفرانسیل پذیر $\widetilde{M}^{2n+1}$ دارای یک ساختار تقریباً تماسی است اگر میدان برداری همیشه ناصفر ξ، یک فرم η و میدان تانسور ϕ از نوع (۱,۱) وجود داشته باشند بطوریکه در روابط

$$\eta(\xi)=1, \quad \phi^2=-I+\eta\otimes\xi,$$

که I نشان دهنده میدان انتقال همانی روی فضای مماس در همه نقاط می‌باشد، صدق کند. میدان برداری ξ میدان برداری مشخصه نامیده می‌شود. این شرایط روی خمینه ایجاب می‌کنند که $\phi\xi=0$ و $\eta\circ\phi=0$ است. همچنین نشان می‌دهد اندومورفیسم ϕ در هر نقطه روی $\widetilde{M}^{2n+1}$ دارای رتبه $2n$ می‌باشد.

خمینه $\widetilde{M}^{2n+1}$ همراه با ساختار تقریبا تماسی (ϕ,ξ,η)، خمینه تقریباً تماسی نامیده می‌شود و بصورت $(\widetilde{M}^{2n+1},\phi,\xi,\eta)$ نمایش داده می‌شود.

اگر خمینه تقریبا تماسی $(\widetilde{M}^{2n+1},\phi,\xi,\eta)$ مجهز به متر ریمانی $\widetilde{g}$ باشد بطوریکه در رابطه

$$\widetilde{g}(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y),$$

برای همه میدان‌های برداری X و Y صدق کند، در این صورت متر ریمانی $\widetilde{g}$، متر سازگار نامیده می‌شود و ساختار (ϕ,ξ,η,g) یک ساختار متری تقریباً تماسی و خمینه $\widetilde{M}^{2n+1}$ با این ساختار، خمینه تقریباً تماسی ریمانی نامیده می‌شود و بصورت $(\widetilde{M},\phi,\xi,\eta,\widetilde{g})$ نشان داده می‌شود. توجه داشته باشید که برای همه میدان‌های برداری مماس X بر $\widetilde{M}^{2n+1}$،

$$\eta(X)=\widetilde{g}(X,\xi),$$

می‌باشد. بنابراین η متریک دوگان برای میدان برداری مشخصه ξ است.

خمینه $\widetilde{M}^{2n+1}$ خمینه تماسی نامیده می‌شود اگر به ۱- فرم سراسری η روی هر نقطه مجهز باشد بطوریکه در رابطه

$$\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0,$$

صدق کند. ۱- فرم η فرم تماسی نامیده می‌شود.

زیرخمینه M از خمینه تماسی $\widetilde{M}^{2n+1}$ مماس بر میدان برداری ξ پایا نامید می‌شود اگر برای هر نقطه $p\in M$، $\phi(T_pM)\subset T_pM$ باشد. همچنین اگر برای هر نقطه $p\in M$، $\phi(T_pM)\subset T_p^{\perp}M$ باشد زیرخمینه را ناپایا می‌نامند.

زیرخمینه M از خمینه تماسی $\widetilde{M}^{2n+1}$ مماس بر میدان برداری ξ را CR می‌نامند هرگاه یک جفت توزیع متمم متعامد D و $D^{\perp}$ روی M موجود باشد بطوری که

۱. $TM=D\oplus D^{\perp}\oplus\mathbb{R}\xi$، که $\mathbb{R}\xi$ توزیع یک بعدی تولید شده بوسیله ξ است؛

۲. D تحت ϕ پایا باشد یعنی برای هر $p\in M$، $\phi(D_p)\subset D_p$ برقرار باشد؛

۳. $D^{\perp}$ تحت ϕ ناپایا باشد یعنی برای هر $p\in M$، $\phi(D_p^{\perp})\subset T_p^{\perp}M$ برقرار باشد.

فرض کنید $(\widetilde{M},\phi,\xi,\eta,\widetilde{g})$ خمینه تماسی $(2n+1)$ بعدی باشد بطوریکه

$$\widetilde{\nabla}_X\xi=-\phi X, \tag{۱}$$

$$(\widetilde{\nabla}_X\phi)Y=\widetilde{g}(X,Y)\xi-\eta(Y)X, \tag{۲}$$

که $\widetilde{\nabla}$ ارتباط لوی–چویتا نسبت به متر $\tilde{g}$ را نشان می‌دهد، در این صورت $\widetilde{M}$ یک خمینه ساساکی نامیده می‌شود.
صفحه برشی π از $T\widetilde{M}$ برای هر $x \in \widetilde{M}$، اگر در رابطه $\phi\pi_x \subseteq \pi_x$ صدق کند یک $\phi-$ برش نامیده می‌شود. $\widetilde{M}$ با خمیدگی $\phi-$برشی ثابت نامیده می‌شود اگر خمیدگی برشی همه $\phi-$برش‌ها ثابت باشند. فضا فرم ساساکی یک خمینه ساساکی با خمیدگی $\phi-$برشی ثابت است. اگر این مقدار ثابت برابر $4c$ باشد در این صورت فضا فرم ساساکی را بصورت $\widetilde{M}(c)$ نشان می‌دهند. در این حالت خمیدگی ریمانی میدان تانسوری $\tilde{R}$ برای هر میدان برداری X, Y, Z بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)Z &= \frac{c+3}{4}\{\tilde{g}(Y,Z)X - \tilde{g}(X,Z)Y\} \\
&-\frac{c-1}{4}\{\eta(Z)\eta(Y)X - \eta(X)\eta(Z)Y \\
&+\tilde{g}(Y,Z)\eta(X)\xi - \tilde{g}(X,Z)\eta(Y)\xi \\
&-\tilde{g}(\phi Y,Z)\phi X + \tilde{g}(\phi X,Z)\phi Y \\
&+2\tilde{g}(\phi X,Y)\phi Z\}.
\end{aligned}$$

۳– ابررویه و ابررویه هاف در فضا فرم ساساکی

فرض کنیم (M^{2n}, g) یک ابررویه شامل میدان برداری مشخص ξ از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ باشد در این صورت میدان برداری یکه موضعی یکتای N عمود بر M وجود دارد. چون ابررویه M شامل میدان برداری مشخصه ξ است بنابراین میدان برداری N عمود بر میدان برداری مشخصه ξ است پس میدان برداری یکه U وجود دارد بطوری که $U = -\phi N$. بنابراین برای صفحه مماس ابررویه M داریم

$$TM = D \oplus D^{\perp} \oplus \xi.$$

بنابر ساختار خمینه‌های ساساکی، $D^{\perp}$ توزیع یک بعدی تولید شده توسط U می‌باشد. فرض کنیم $\overline{\nabla}$ و ∇ بترتیب ارتباطهای لوی چویتا بر روی خمینه‌های $\overline{M}(c)$ و M باشند در این صورت بنا بر فرمول گاوس برای هر میدان برداری مماسی X داریم

$$\nabla_X\xi + g(AX,\xi)N = \overline{\nabla}_X\xi,$$

که A عملگر شکل ابررویه M در فضا فرم ساساکی $\overline{M}(c)$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\overline{\nabla}_X\xi = -\phi X$$

بنابراین معادله زیر برای هر میدان برداری مماسی X حاصل می‌شود

$$\nabla_X\xi + g(AX,\xi)N = -\phi X. \qquad (۱)$$

با انتخاب $X = U$ در معادله (۱) داریم:

$$\nabla_U\xi + g(AU,\xi)N = -\phi U = -N,$$

که با مقایسه قسمت‌های مماسی و عمودی روابط زیر را داریم:

$$\nabla_U\xi = 0 \ , \ g(AU,\xi) = -1. \qquad (۲)$$

حال با جا گذاری $X = \xi$ داریم:

$$\nabla_\xi\xi + g(A\xi,\xi)N = -\phi\xi = 0,$$

با مقایسه قسمت‌های مماسی و عمودی روابط زیر حاصل می‌شود

$$\nabla_\xi\xi = 0 \ , \ g(A\xi,\xi) = 0. \qquad (۳)$$

لم ۱.۳. فرض کنیم M^{2n} ابررویه‌ای از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ با عملگر شکل A باشد آنگاه $A\xi = -U$.

اثبات: با انتخاب X عضو D در معادله (۱) و مقایسه قسمت‌های مماسی و عمودی داریم

$$\begin{aligned}
&g(A\xi,X) = g(AX,\xi) = 0, \\
&\nabla_X\xi = -\phi X. \qquad (۴)
\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه فوق و روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $A\xi = -U$.

با توجه به لم قبل، ساختار ساساکی و فرمول گاوس داریم

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi U &= \overline{\nabla}_\xi U - g(A\xi,U)N \\
&= \overline{\nabla}_\xi(-\phi N) + N \\
&= -(\overline{\nabla}_\xi\phi)N - \phi(\overline{\nabla}_\xi N) + N \\
&= -\phi U + N = 0 \qquad (۵)
\end{aligned}$$

لم ۲.۳. فرض کنیم M^{2n} ابررویه‌ای از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ با عملگر شکل A باشد آنگاه داریم:

$$\overline{\nabla}_U U = \phi AU.$$

اثبات: با توجه به فرمول گاوس و تعریف U داریم

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_U U &= \overline{\nabla}_U(-\phi N)\\ &= -(\overline{\nabla}_U\phi)N - \phi(\overline{\nabla}_U N)\\ &= \phi AX\end{aligned}$$

بنابراین $\overline{\nabla}_U U = \phi AU$.

حال فرض کنیم $AU = \alpha U + \beta\xi + (AU)_D$ که $(AU)_D$ قسمت مماس $A(U)$ روی D می‌باشد. بنابر رابطه (۲) داریم $\beta = -1$. بنابراین داریم

$$AU = -\xi + \alpha U + (AU)_D.$$

تعریف ۱.۳. فرض کنیم M^{2n} ابررویه‌ای از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ با عملگر شکل A باشد. اگر عملگر شکل صفحه تولید شده توسط U و ξ را به خودش ببرد آنگاه M را ابررویه هاف گوییم.

اگر M یک ابررویه هاف باشد در این صورت $(AU)_D = 0$ خواهد بود بنابراین از رابطه فوق خواهیم داشت

$$AU = -\xi + \alpha U \tag{۶}$$

اگر M یک ابررویه هاف باشد با توجه به لم ۲.۳ و فرمول گاوس داریم

$$\begin{aligned}\nabla_U U &= \overline{\nabla}_U U - g(AU,U)N\\ &= \phi AU - \alpha N = 0.\end{aligned} \tag{۷}$$

اگر M یک ابررویه هاف باشد در این صورت $AD = D$ و $Aspan\{\xi,U\} = span\{\xi,U\}$. همچنین چون عملگر شکل خودالحاق است پس پایه یکه عمود موضعی $X_1,\ldots,X_{2n-2}$ برای زیر فضای D و پایه $\{W_1,W_2\}$ برای زیر فضای $\mathrm{span}\{\xi,U\}$ موجود است بطوری که

$$\begin{aligned}&AX_i = \lambda_i X_i \quad , \quad i = 1,\ldots,2n-2 \ ,\\ &AW_1 = \gamma_1 W_1 \quad , \quad AW_2 = \gamma_2 W_2 \ .\end{aligned}$$

با توجه به لم ۱.۳ و معادله (۶)، ξ و U نمی‌توانند بردارهای ویژه باشند بنابراین $0 < \theta < \pi/2$ وجود دارد بطوری که

$$\begin{aligned}W_1 &= \xi\cos\theta + U\sin\theta \ ,\\ W_2 &= -\xi\sin\theta + U\cos\theta,\end{aligned}$$

که توابع $\cos\theta$ و $\sin\theta$ هیچ وقت صفر نمی‌شوند. همچنین با توجه به تعاریف W_1 و W_2 داریم

$$U = W_1\sin\theta + W_2\cos\theta \ , \tag{۸}$$

$$\xi = W_1\cos\theta - W_2\sin\theta \ . \tag{۹}$$

حال لم زیر را داریم.

لم ۳.۳. فرض کنیم M^{2n} ابررویه‌ای هاف از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ با ساختارهای فوق باشد آنگاه $\gamma_1 = -\tan\theta$ و $\gamma_2 = \cot\theta$.

اثبات: با توجه به لم ۱.۳ داریم

$$\begin{aligned}AW_1 &= \cos\theta\, A\xi + \sin\theta\, AU\\ &= -\cos\theta\, U + \sin\theta\, AU,\\ AW_2 &= -\sin\theta\, A\xi + \cos\theta\, AU\\ &= \sin\theta\, U + \cos\theta\, AU\ .\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}U &= \sin\theta\, AW_2 - \cos\theta\, AW_1\\ &= \gamma_2\sin\theta\, W_2 - \gamma_1\cos\theta\, W_1\end{aligned}$$

با توجه به روابط (۸) و (۹) خواهیم داشت

$$(\gamma_2\sin\theta - \cos\theta)\, W_2 - (\gamma_1\cos\theta + \sin\theta)\, W_1 = 0.$$

اما چون بردارهای W_1 و W_2 مستقل خطی هستند لذا ضرایبشان برابر صفر خواهد بود و در نتیجه $\gamma_1 = -\tan\theta$ و $\gamma_2 = \cot\theta$.

بنابراین برای مقادیر ویژه γ_1 و γ_2 روابط زیر نیز حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}&(\gamma_2 - \gamma_1)\cos\theta\sin\theta = 1,\\ &\gamma_1\cos^2\theta + \gamma_2\sin^2\theta = 0.\end{aligned}$$

از طرفی چون $g(AU,U) = \gamma_1 + \gamma_2$ و $\alpha = g(AU,U)$ بنابراین

$$\alpha = \gamma_1 + \gamma_2\ . \tag{۱۰}$$

فرض کنیم X میدان برداری مماسی از خمینه M باشد در این صورت ϕX لزوماً در D نیست بنابراین می‌توانیم ϕX را به صورت زیر تجزیه کنیم

$$\phi X = FX + g(X,U)N \qquad (۱۱)$$

که FX قسمت مماس ϕX روی D می‌باشد. بنابراین برای هر میدان برداری مماس عضو D، $\phi X = FX$ و $F\xi = FU = 0$.

لم ۴.۳. فرض کنیم M^{2n} ابررویه‌ای از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ با عملگر شکل A باشد آنگاه داریم $\nabla_X U = FAX$.

اثبات: با توجه به فرمول گاوس و تعریف U داریم

$$\begin{aligned}\nabla_X U &= \overline{\nabla}_X U - \overline{g}(AX,U)N\\ &= \overline{\nabla}_X(-\phi N) - \overline{g}(AX,U)N\\ &= -(\overline{\nabla}_X\phi)N - \phi(\overline{\nabla}_X N) - \overline{g}(AX,U)N\\ &= \phi AX - \overline{g}(AX,U)N\\ &= FAX + u(AX)N - \overline{g}(AX,U)N\\ &= FAX\end{aligned}$$

بنابراین $\nabla_X U = FAX$.

همچنین با توجه به روابط (۱) و (۱۱) داریم

$$\nabla_X \xi = -FX. \qquad (۱۲)$$

همچنین با توجه به ساختار تماسی خواهیم داشت

$$g(FX,FY) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) - u(X)u(Y). \qquad (۱۳)$$

همچنین با توجه به ساختار ساساکی خواهیم داشت

$$(\nabla_Y)X = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X - g(AX,Y)U + u(Y)AX. \qquad (۱۴)$$

با توجه به معادله کودازی و با استفاده از خمیدگی فضا فرم ساساکی خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&g\big((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, Z\big)\\ &= \tfrac{c-1}{4} g(u(X)FY - u(Y)FX\\ &-2g(FX,Y),Z).\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

با جاگذاری $X = X_i$ و $X = X_j$ و $Z = W_1$ در رابطه (۱۵) و با استفاده از لم ۳.۳ و روابط (۱۰) و (۱۳) و تعریف W_1 خواهیم داشت

$$2\lambda_i\lambda_j - \alpha(\lambda_i+\lambda_j) = \tfrac{c+3}{2}. \qquad (۱۶)$$

۴- ابررویه هاف در فضا فرم ساساکی با عملگر ریچی موازی

فرض کنیم M^{2n} ابررویه‌ای با عملگر ریچی موازی از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ باشد. یعنی برای میدان برداری مماس X دلخواه داشته باشیم

$$\nabla_X S = 0, \qquad (۱۷)$$

که S عملگر ریچی می‌باشد. بنابر معادله گاوس و با استفاده از خمیدگی فضا فرم ساساکی داریم

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= \tfrac{c+3}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}\\ &-\tfrac{c-1}{4}\{\eta(Z)\eta(Y)X - \eta(X)\eta(Z)Y\\ &+g(Y,Z)\eta(X)\xi - g(X,Z)\eta(Y)\xi\\ &-g(\phi Y,Z)\phi X + g(\phi X,Z)\phi Y\\ &+2g(\phi X,Y)\phi Z\}\\ &+g(AY,Z)AX - g(AX,Z)A.\end{aligned}$$

بنابرین برای پایه

$$\{e_1,\dots,e_{n-1},Fe_1,\dots,Fe_{n-1},\xi,U\}$$

از TM که $e_1,\dots,e_{n-1} \in D$ می‌باشند داریم:

$$S(X) = (2n-1)X + (\mathrm{tr}A)AX - A^2X$$

بنابراین با مشتق‌گیری از رابطه فوق و استفاده از رابطه (۱۴) داریم

$$\begin{aligned}(\nabla_Y S)X &= \tfrac{c-1}{2}\{(n-1)g(X,FY)\xi + \eta(X)FX\} - \tfrac{3(c-1)}{4}\{g(X,Y)\xi - \eta(X)Y - g(AY,X)U + u(X)AY\} +\\ &Y(\mathrm{tr}A)AX + (\mathrm{tr}A)(\nabla_Y A)X -\\ &(\nabla_Y A)AX - A(\nabla_Y A)X.\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

با جاگذاری $Y = \xi$ در رابطه (۱۸) و با توجه به رابطه (۱۷) داریم

$$\begin{aligned}&\xi(\mathrm{tr}A)AX + (\mathrm{tr}A)(\nabla_\xi A)X\\ &-(\nabla_\xi A)AX - A(\nabla_\xi A)X = 0,\end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱.۳ و روابط (۶) و (۱۲) خواهیم داشت

$$\left(-\xi(\mathrm{tr}A)+\xi(\alpha)\right)\xi$$
$$+\left((\mathrm{tr}A)-\alpha\right)\xi(\alpha)U=0$$

اما چون U و ξ میدان‌های برداری مستقل از هم می‌باشند لذا داریم

$$-\xi(\mathrm{tr}A)+\xi(\alpha)=0,$$
$$\left((\mathrm{tr}A)-\alpha\right)\xi(\alpha)=0. \qquad (۱۹)$$

همچنین با جاگذاری $Y=U$ در رابطه (۱۸) و با توجه به رابطه (۱۷) بطریق فوق خواهیم داشت

$$-U(\mathrm{tr}A)+U(\alpha)=0,$$
$$\left((\mathrm{tr}A)-\alpha\right)U(\alpha)=0. \qquad (۲۰)$$

با در نظر گرفتن $Y\in D$ و جاگذاری $X=\xi$ در رابطه (۱۸) و با توجه به رابطه (۱۷) بطریق مشابه خواهیم داشت

$$-Y(\mathrm{tr}A)+Y(\alpha)=0. \qquad (۲۱)$$

همچنین با در نظر گرفتن $Y\in D$ و جاگذاری $X=U$ در رابطه (۱۸) و با توجه به رابطه (۱۷) بطریق مشابه خواهیم داشت

$$\left((\mathrm{tr}A)-\alpha\right)Y(\alpha)=0. \qquad (۲۲)$$

بنابراین بنابر روابط (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) برای هر میدان برداری دلخواه مماس X خواهیم داشت

$$X(\mathrm{tr}A)=X(\alpha), \qquad (۲۳)$$
$$\left((\mathrm{tr}A)-\alpha\right)X(\alpha)=0. \qquad (۲۴)$$

از رابطه (۲۴) خواهیم داشت

$X(\alpha)=0$ یا $\mathrm{tr}A=\alpha.$

حالت $X(\alpha)=0$:

لم ۱.۴. فرض کنیم M^{2n} ابررویه‌ای هاف از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ باشد بطوری که $X(\alpha)=0$ آنگاه مقادیر ویژه عملگر شکل آن ثابت می‌باشند.

اثبات: چون برای هر میدان برداری دلخواه مماس X، $X(\alpha)=0$ می‌باشد لذا α مقدار ثابتی می‌باشد و بنابر لم ۳.۳ و رابطه (۱۰)، γ_1 و γ_2 مقادیر ثابتی هستند. از طرفی چون

$$\mathrm{tr}A=\lambda_1+\cdots+\lambda_{2n-2}+\alpha,$$

بنابر رابطه (۲۳) خواهیم داشت

$$X(\lambda_1+\cdots+\lambda_{2n-2})=0. \qquad (۲۵)$$

همچنین بنابر رابطه (۱۶) داریم

$$2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2n-2}\lambda_i\lambda_j-\alpha(\lambda_1+\cdots+\lambda_{2n-2})$$
$$=(n-1)\left(\frac{c+3}{4}\right). \qquad (۲۶)$$

حال با استفاده از رابطه (۲۵) خواهیم داشت

$$X\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2n-2}\lambda_i\lambda_j\right)=0,$$

اما چون برای هر i و j دلخواه رابطه فوق برقرار است لذا با تعویض اندیس‌ها خواهیم داشت

$$X(\lambda_i\lambda_j)=0.$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه (۱۶) و با توجه به رابطه فوق خواهیم داشت

$$X(\lambda_i+\lambda_j)=0.$$

بنابراین همه مقادیر ویژه λ_i برای هر i ثابت هستند. بنابراین همه مقادیر ویژه عملگر شکل ثابت می‌باشد.

لم ۲.۴. فرض کنیم M^{2n} ابررویه‌ای هاف از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ باشد بطوری که $X(\alpha)=0$ آنگاه عملگر شکل حداکثر دارای سه مقدار ویژه می‌باشد.

اثبات: با استفاده از لم فوق و رابطه (۲۶) که برای هر i و j دلخواه برقرار است لذا با تعویض اندیس‌ها خواهیم داشت

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2n-2}\lambda_i\lambda_j=\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{2n-2}\lambda_i\lambda_k.$$

بنابراین برای هر i و j دلخواه خواهیم داشت $\lambda_i=\lambda_j$. لذا عملگر شکل حداکثر سه مقدار ویژه خواهد داشت.

میدان برداری $Z = \lambda\xi + U$ را در $span\{\xi, U\}$ نظر می‌گیریم. فرض کنیم $Z_\perp$ نماد عمود Z در $span\{\xi, U\}$ باشد بنابرین $Z_\perp = \xi - \lambda U$. لم زیر را داریم

لم ۳.۴. زیرفضای $D \oplus Z_\perp$ پایاست.

اثبات: میدان‌های برداری X و Y دلخواه را از D در نظر می‌گیریم. ابتدا توجه کنیم که

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= g(\nabla_X Y, \lambda\xi + U) \\ &= \lambda g(\nabla_X Y, \xi) + g(\nabla_X Y, U) \\ &= -\lambda g(Y, \nabla_X \xi) - g(Y, \nabla_X U) \\ &= \lambda g(Y, \phi X) - g(Y, \phi AX) \\ &= \lambda g(Y, \phi X) - \lambda g(Y, \phi X) = 0\,. \end{aligned}$$

و بطور مشابه $g(\nabla_Y X, Z) = 0$. بنابراین داریم

$$g([X, Y], Z) = 0\;. \qquad (۲۷)$$

همچنین بطریق مشابه

$$g(\nabla_X Z_\perp, Z) = 0 \;\;,\;\; g\left(\nabla_{Z_\perp} X, Z\right) = 0\,.$$

بنابراین داریم

$$g([X, Z_\perp], Z) = 0\,. \qquad (۲۸)$$

بنابراین برای میدان‌های برداری دلخواه X و Y در $D \oplus Z_\perp$، بنابر روابط (۲۷) و (۲۸)، $[X, Y]$ عضو $D \oplus Z_\perp$ است یعنی این زیر فضا پایاست.

فرض کنیم M' زیر خمینه انتگرال زیرفضای $D \oplus Z_\perp$ باشد. بنابراین M' یک ابررویه در داخل M با میدان برداری قائم Z می‌باشد. همچنین فرض کنیم C خم انتگرال میدان برداری Z باشد. بطور تلویحی در اثبات لم قبل ثابت شد $C'' = \nabla_Z Z = 0$. بنابراین C یک خم ژئودزیک در M می‌باشد.

لم ۴.۴. زیرخمینه انتگرال M' در M تماماً ژئودزیک است.

اثبات: چون M' ابررویه‌ای از M با میدان برداری قائم Z می‌باشد فرض کنیم A' عملگر شکل M' در M باشد. میدان برداری دلخواه مماسی X در M' را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف عملگر شکل داریم

$$\begin{aligned} A'X &= -\nabla_X Z = -\overline{\nabla}_X Z + g(AX, Z)N \\ &= -\lambda\overline{\nabla}_X \xi - \overline{\nabla}_X U + g(AX, \lambda\xi + U)N \\ &= \lambda\phi X - \phi AU + g(AX, \lambda\xi + U)N \end{aligned}$$

اما چون $A'X \in TM'$ بنابراین بایستی سمت راست معادله نیز عضو TM' باشند لذا $g(AX, \lambda\xi + U) = 0$. پس داریم

$$A'X = \lambda\phi X - \phi AU.$$

معادله فوق به ازای هر میدان برداری در D برابر صفر است و همچنین $AZ_\perp = 0$. بنابراین به ازای هر میدان برداری مماس بر M' مانند X داریم $AX = 0$. بنابراین M' ابررویه‌ای تماماً ژئودزیک در M می‌باشد.

گزاره ۵.۴. فرض کنیم M ابررویه‌ای با عملگر ریچی موازی از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ باشد بطوریکه $X(\alpha) = 0$. آنگاه M بصورت موضعی برابر با $M' \times C$ است که C خم ژئودزی و M' ابررویه‌ای تماماً ژئودزیک در M می‌باشند.

اثبات: خم ژئودزی C و ابررویه تماماً ژئودزیک M' را مطابق فوق در نظر می‌گیریم. برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم

$$\begin{aligned} &\nabla_{TM'} TM' \subseteq TM', \quad \nabla_Z Z = 0\,, \\ &\nabla_Z TM' \subseteq TM' \quad, \quad \nabla_{TM'} Z = 0. \end{aligned}$$

چون C خمی ژئودزی است بنابراین $\nabla_Z Z = 0$. همچنین چون M' ابررویه تماماً ژئودزیک در M می‌باشد بنابراین $\nabla_{TM'} Z = 0$. برای اثبات $\nabla_{TM}\, TM' \subseteq TM'$ کافی است نشان دهیم برای میدان‌های برداری X و Y در TM'، $g(\nabla_X Y, Z) = 0$. بنابراین کافیست نشان دهیم $g\left(\nabla_{Z_\perp} Z_\perp, Z\right) = 0$. اما

$$\begin{aligned} &g\left(\nabla_{Z_\perp} Z_\perp, Z\right) \\ &= g\left(\nabla_{\xi - \lambda U}(\xi - \lambda U), \lambda\xi + U\right) = 0 \end{aligned}$$

برای اثبات $\nabla_Z TM' \subseteq TM'$ کافی است نشان دهیم برای میدان برداری X در TM'، $g(\nabla_Z X, Z) = 0$. بنابراین

$$g(\nabla_Z X, Z) = -g(X, \nabla_Z Z) = 0.$$

لذا بنابر قضیه تجزیه درام [۱۵]، M بصورت موضعی با حاصلضرب ریمانی خمینه انتگرال تماماً ژئودزیک M' و خم ژئودزی C هم متر است.

حالت $\mathrm{tr}A = \alpha$:

لم ۶.۴. فرض کنیم M^{2n} ابررویه‌ای هاف از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ باشد بطوری که $\mathrm{tr}A = \alpha$ آنگاه عملگر شکل روی D متحد با صفر است.

اثبات: چون

$$\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{2n-2} + \alpha$$

بنابراین $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{2n-2} = 0$ از رابطه (۲۶) که برای هر i و j دلخواه برقرار است با تعویض اندیس‌ها خواهیم داشت

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2n-2} \lambda_i\lambda_j = \sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{2n-2} \lambda_i\lambda_k.$$

بنابراین برای هر i و j دلخواه خواهیم داشت $\lambda_i = \lambda_j$. در نتیجه برای هر i دلخواه $\lambda_i = 0$.

لم ۷.۴ . توزیع $D \oplus span\{\xi\}$ در M پایاست.

اثبات: میدان‌های برداری X و Y را در D دلخواه در نظر می‌گیریم بنابر لم ۱.۳ داریم

$$\begin{aligned} g([X,Y],U) &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, U)\\ &= -g(Y,\nabla_X U) + g(X,\nabla_Y U)\\ &= g(Y,\phi AX) - g(X,\phi AY) = 0.\end{aligned}$$

همچنین بنابر لم ۱.۳ و لم ۲.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g([X,\xi],U) &= g(\nabla_X \xi - \nabla_\xi X, U)\\ &= -g(\phi X,U) - g(X,\phi A\xi) = 0.\end{aligned}$$

بنابراین برای میدان‌های برداری دلخواه X و Y در $D \oplus span\{\xi\}$ خواهیم داشت $g([X,Y],U) = 0$ یعنی توزیع $D \oplus span\{\xi\}$ پایاست.

خمینه انتگرال توزیع $D \oplus span\{\xi\}$ را M' در نظر می‌گیریم. بنابراین M' ابررویه‌ای با میدان برداری قائم U در M است.

لم ۸.۴. خمینه انتگرال M' در M تماماً ژئودزیک است.

اثبات: فرض کنیم ∇' ارتباط لوی-چویتای القایی از ارتباط M روی M' باشد. همچنین A' عملگر شکل وابسته به میدان برداری U، M' باشد. بنابراین برای میدان برداری دلخواه X در TM' داریم

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla'_X Y + g(A'X,Y)U\,,\\ \nabla_X U &= -A'X.\end{aligned}$$

اگر میدان برداری X در D باشد بنابر لم ۱.۳ و لم ۴.۳ داریم $A'X = 0$، و اگر میدان برداری U بجای X بنشیند بنابر معادلات (۵) و (۱۲) خواهیم داشت $A'U = 0$. بنابراین A' روی TM' صفر خواهد بود.

لم ۹.۴. زیر خمینه M' در $\overline{M}(c)$ تماماً ژئودزیک است.

اثبات: میدان‌های برداری X و Y را دلخواه در TM' در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض کنیم میدان‌های برداری X و Y هر دو در D باشند آنگاه بنابر معادله گاوس و لم‌های ۱.۳ و ۴.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + g(AX,Y)N\\ &= \nabla'_X Y + g(A'X,Y)U + g(AX,Y)N\\ &= \nabla'_X Y.\end{aligned}$$

اما اگر یکی از میدان‌های برداری X و Y در D و دیگری میدان برداری مشخصه ξ باشند بنابر لم ۴.۳ و اینکه M ابررویه‌ای هاف است بطریق مشابه است. در نهایت هر دو میدان برداری X و Y میدان برداری مشخصه ξ باشند بنابر لم ۴.۳ و معادله (۳) باز بطریق مشابه ثابت می‌شود. لذا برای میدان‌های برداری X و Y دلخواه در TM'، $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$ یعنی زیر خمینه M' در $\overline{M}(c)$ تماماً ژئودزی است.

لم ۱۰.۴. خمینه M' یک فضا فرم ساساکی است.

اثبات: چون $TM' = D \oplus \xi$ ، بنابراین میدان برداری ξ میدان بردار مشخصه M' در نظر می‌گیریم. همچنین ϕ' را تحدید ϕ به روی TM' در نظر می‌گیریم. چون D تحت ϕ پایا و دارای رتبه $2n-2$ بود لذا ϕ' نیز

روی D پایا و دارای رتبه $2n-2$ خواهد بود. حال به ازای میدان برداری دلخواه X در TM' بنابر لم ۴.۳ و ساختار ساساکی خواهیم داشت

$$\nabla_X \xi = \overline{\nabla}_X \xi = -\phi X = -\phi' X,$$

و همچنین برای میدان‌های برداری دلخواه X و Y در TM' بنابر ساختار ساساکی خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(\nabla_X \phi')Y &= (\nabla_X \phi)Y \\ &= \nabla_X(\phi Y) - \phi(\nabla_X Y) \\ &= \overline{\nabla}_X(\phi Y) - \phi(\overline{\nabla}_X Y) \\ &= (\overline{\nabla}_X \phi)Y \\ &= \tilde{g}(X,Y)\xi - \eta(Y)X \\ &= g'(X,Y)\xi - \eta'(Y)X\end{aligned}$$

که g' و η' بترتیب تحدید g و η روی خمینه M' هستند. بنابراین $(M', \phi', \xi, \eta', g')$ یک خمینه تماسی با بعد $2n-1$ است. فرض کنیم R' تانسور خمیدگی روی خمینه M' باشد لذا برای میدان‌های برداری X و Y و Z و W دلخواه در TM' داریم

$$\begin{aligned}&g'(R'(X,Y)Z,W) \\ &= g(R(X,Y)Z,W) \\ &+g(AY,Z)g(AX,W) \\ &-g(AX,Z)g(AY,W) \\ &+g(A'Y,Z)g(A'X,W) \\ &-g(A'X,Z)g(A'Y,W) \\ &= (\tfrac{c+3}{4})[g(Y,Z)g(X,W) \\ &-g(X,Z)g(Y,W)] \\ &+(\tfrac{c-1}{4})[g(X,\phi Z)g(\phi Y,W) \\ &-g(Y,\phi Z)g(\phi X,W) \\ &+2g(X,\phi Y)g(\phi Z,W)]\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}H(X) &= R'(X,\phi X) \\ &= g(R'(X,\phi X)\phi' X, X) = c\end{aligned}$$

بنابراین $M'(c)$ یک فضا فرم ساساکی با بعد $2n-1$ است.

فرض کنیم $\gamma(t)$ خم انتگرال میدان برداری U باشد یعنی $\gamma'(t) = U$. بنابر معادله (۱۱)، $\gamma(t)$ یک خم ژئودزیک در M است.

گزاره ۱۱.۴. فرض کنیم M ابررویه‌ای با عملگر ریچی موازی از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ باشد بطوریکه $\mathrm{tr}A = \alpha$. آنگاه M بصورت موضعی برابر با $M' \times \gamma$ است که γ خم ژئودزی در M و M' فضا فرم ساساکی است که نیز ابررویه‌ای تماماً ژئودزیک در M است می‌باشند.

اثبات: خم ژئودزی γ و ابررویه تماماً ژئودزیک M' را مطابق فوق در نظر می‌گیریم. برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم

$$\begin{aligned}&\nabla_{TM'} TM' \subseteq TM', \quad \nabla_{\mathrm{U}} U = 0\,, \\ &\nabla_U TM' \subseteq TM'\,, \quad \nabla_{TM'} U = 0.\end{aligned}$$

چون γ خمی ژئودزی است بنابراین $\nabla_U = 0$. همچنین چون M' ابررویه تماماً ژئودزیک در M می‌باشد بنابراین $\nabla_{TM'} U = 0$. برای اثبات $\nabla_{TM'} TM' \subseteq TM'$ کافیست نشان دهیم برای میدان‌های برداری X و Y در TM'، $g(\nabla_X Y, U) = 0$. بنابر لم ۴.۳ داریم

$$\begin{aligned}&g(\nabla_X Y, U) = -g(Y, \nabla_X U) = \\ &-g(Y, \phi A X) = 0.\end{aligned}$$

برای اثبات $\nabla_U TM' \subseteq TM'$ کافیست نشان دهیم برای میدان برداری X در TM' ، $g(\nabla_U X, U) = 0$. بنابراین

$$g(\nabla_U X, U) = -g(X, \nabla_U U) = 0.$$

لذا بنابر قضیه تجزیه درام [۱۵]، M بصورت موضعی با حاصلضرب ریمانی خمینه انتگرال M' و خم γ هم متر است.

بنابراین در حالت کلی اثبات کردیم:

قضیه ۱۲.۴. فرض کنیم M ابررویه‌ای با عملگر ریچی موازی از فضا فرم ساساکی $\overline{M}^{2n+1}(c)$ باشد. آنگاه M بصورت موضعی برابر با حاصلضرب یک خم ژئودزی با یک ابررویه تماماً ژئودزیک در خودش می‌باشد، همچنین اگر $\mathrm{tr}A = \alpha$ باشد آنگاه آن ابررویه تماماً ژئودزیک خود بعنوان یک خمینه، فضا فرم ساساکی می‌باشد.

فهرست منابع

[1] S. Sasaki, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, I, *Tohoku Math. J.* (2) 12: 459-476, (1960).

[2] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, II, *Tohoku Math. J.* (2) 13: 281-294, (1961).

[3] A. Bejancu, CR-submanifolds of Kaeher Manifold *I*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 69, no.1, 135-142, (1978).

[4] A. Bejancu, *Geometry of CR-submanifolds*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo, (1986).

[5] D. E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

[6] K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.* 24: 93-103, (1972).

[7] K. Yano, M. Kon, *Structure on Manifold*, World Scientific, Singapore, (1984).

[8] P. J. Ryan, Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces, *Tohoku Math. J.* 21: 363-388, (1969).

[9] P. J. Ryan, Hypersurfaces with parallel Ricci tensor, *Osaka J. Math*. 8: 251-259, (1971).

[10] T, Takahashi, Hypersurface with parallel Ricci tensor in a space of constant holomorphic sectional curvature, *J. Math. Soc. Japan*, 19 (2): 199-204, (1967).

[11] H. Reckziegel, Hypersurfaces with Parallel Ricci Tensor in Spaces of Constant Curvature, *Results in Math*. 27 (1–2): 113–116, (1995).

[12] U-Hang Ki, Real Hypersurfaces with Parallel Ricci Tensor of a Complex Space Form, *Tsukuba Journal of Math.* Vol. 13, No. 1: 73-81, (1989).

[13] M. Djoric, M. Okumura, Certain CR submanifolds of maximal CR dimension of complex space forms, *Differential Geometry and its Applications*, 26 (2): 208-217, (2008).

[14] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I*, Wiley and Sons Inc. New York-London, (1963).

[15] G. de Rham, Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, *Comment. Math. Helv.* 268: 328-344, (1952).