

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱

شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

روش تکراری کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل از نوع براتو فازی

بهرام عاقلی*

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قائمشهر، قائمشهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۰۶

چکیده

در این مقاله معادله دیفرانسیل براتو را در نظر می‌گیریم که مقادیر شرایط مرزی در این مقاله مقدار فازی هستند و هدف محاسبه جواب تقریبی برای آن می‌باشد. برای این منظور ابتدا با استفاده از اعمال حسابی روی داده‌های فازی، معادله دیفرانسیل براتو را به سه دستگاه معادلات دیفرانسیل با داده‌های دقیق تبدیل می‌کنیم و در ادامه با استفاده از روش تمیمی و انصاری (TAM)، جواب تقریبی دستگاه معادلات دیفرانسیل تبدیل شده را محاسبه و به جواب تقریبی فازی از معادله دیفرانسیل براتو می‌رسیم. در پایان دو مثال برای بیان کارایی و سادگی با یافتن جواب تقریبی نشان می‌دهیم. برای تمامی محاسبات و نمایش نمودارها از نرم افزار ممتیکا استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: روش عددی، معادلات دیفرانسیل براتو، معادلات دیفرانسیل فازی.

۱- مقدمه

یک مسئله از مجموعه مسئله‌های غیر خطی مقادیر ویژه بعدی معادلات دیفرانسیل براتو (BDEs) به شرح زیر [۱] است:

$$\Delta \phi(t) + \lambda \exp(\phi(t)) = 0,$$

که $\Delta, t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ عملگر لاپلاس، برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم $|t_i| \leq 1$ و برای $|t_i| = 1$ شرایط اولیه $\phi(t) = 0$ برقرار است.

در این مقاله معادله دیفرانسیل یک بعدی

$$u''(t) + \lambda \exp(u(t)) = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

با شرایط اولیه $u(0) = u_0, u'(0) = u'_0$ که $\lambda > 0$ و $t \in \square$ توابع ثابت هستند، و حل تحلیلی به شرح زیر ارائه می‌شود:

$$u(t) = \log \left(\frac{\cosh\left(\frac{\phi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\frac{\phi}{4}\right)} \right)^{-2},$$

که ϕ جواب معادله $\phi = \sqrt{2\lambda} \cosh\left(\frac{\phi}{4}\right)$ می‌باشد [۳و۲].

برای مقدار بحرانی $\lambda = 3.513830719$ جواب معادله $1 = \frac{1}{4} \sqrt{2\lambda} \sinh\left(\frac{\theta}{4}\right)$ داریم:

اگر $\lambda = \lambda$ معادله دارای یک جواب، اگر $\lambda < \lambda$

معادله دارای دو جواب و اگر $\lambda > \lambda$ معادله دارای جواب نمی‌باشد.

مسئله براتو قدمتی طولانی دارد و توسط براتو در سال ۱۹۱۴ معرفی شد [۴]. در مورد انگیزه و اهمیت این مسئله، باید توجه داشت که در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، مدل‌های شیمیایی و سایر علوم نقش اساسی دارد. چنین کاربردهایی شامل مدل احتراق سوخت احتراق حرارتی، انتقال حرارت تابشی، واکنش حرارتی، تئوری راکتور شیمیایی و فناوری نانو ظاهر می‌شود [۵-۹]. در [۵] خلاصه‌ای از تاریخچه مسئله آورده شده است.

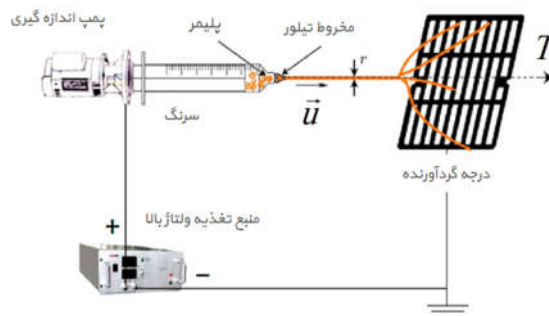
به عنوان نمونه دیگر، مدل‌سازی ریاضیات در شیمی برای فرآیند الکترو نخ ریزی مربوط به معادلات تعادل با ترموالکترو هیدرودینامیک مربوط به BDE ها است. کولانتونی و بوآبیکر مدلی را نشان دادند که معادله تک بعدی براتو به شرح زیر است [۱۰]:

$$u''(t) + \lambda \exp(u(t)) = 0,$$

که

$$\lambda = -\frac{18E^2(I - r^2kE)^2}{\rho^2 r^4}$$

و u سرعت محوری، r شعاع جت در مختصات محور X, I شدت جریان الکتریکی است، E منطقه الکتریکی در جهت محوری است، ρ تراکم مواد، k یک مقدار ثابت است که فقط با توجه به پلیمر غیر قابل فشرده بودن به دما وابسته است (شکل ۱-۱).



شکل ۱-۱: راه اندازی فرآیند الکتریکی

تقریبی ارائه کرده‌اند. عبد الهامید و همکاران [۲۴] در تحقیقی روش عددی را برای به دست آوردن جواب به کار گرفتند. در این تحقیق از چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقالی برای یافتن جواب عددی استفاده کردند. در [۲۵] روش موجک تیلور توسط کشاورز و همکاران برای به دست آوردن حل عددی به کار گرفته شده است. در یک مطالعه بابلیان و همکاران جهت یافتن جواب‌های تقریبی از هسته بازتولیدی فضای هیلبرت، استفاده کردند [۲۶]. روش محاسباتی و تکراری دیگری توسط تامار و پندی به نام روش تکرار بهینه شبه خطی در [۲۷] برای یافتن جواب تقریبی ارائه شده است. روش محاسباتی دیگر توسط جلیلیان به نام روش اسپلاین غیر چند جمله‌ای در [۲۸] ارائه شده است. در یک مطالعه یانگ و هوو جهت یافتن جواب‌های تقریبی از ویژگی‌های توابع موجک انتقالی شده و ماتریس عملگر استفاده کردند [۲۹]. کاگلار و همکاران [۳۰] در تحقیقی روش عددی به نام بی اسپلاین برای به دست آوردن جواب به کار گرفتند. روش پیشنهادی دیگری با استفاده از راه حل تقریبی تحلیلی با روش بهینه آنالیز هموتویی توسط حسن و سماری در [۳۱] بیان شده است. کومار و یداو روش عددی ارائه کردند که در آن فرموله‌بندی ریاضی به کمک شبکه‌های عصبی صورت گرفته است [۳۲]. در تلاشی تمیمی و بن رومانه روش تکراری تفاضلات محدود را ارائه دادند [۳۳]. در این تحقیق راه حل تقریبی به کمک روش تقریب نیوتن-رافسون-کانتورویچ در فضای تابع برای جستجوی جواب تقریبی ارائه شده است. نویسندگان کلووینسکی و قوینی به منظور به دست آوردن حل عددی از تجزیه تبدیل لاپلاس استفاده نمود [۳۴]. همچنین علاقه‌مندان مقالات می‌توانند روش‌های دیگری برای حل معادله دیفرانسیل براتو را در مراجع [۳۵-۴۰] مطالعه کنند. مفهوم و نظریه مجموعه‌های فازی توسط زاده

از جمله تحقیقات انجام شده معادلات دیفرانسیل براتو می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. ضارب نیا و سروی در [۱۱] از روش اسپلاین مکعبی پارامتری استفاده کردند. به کمک روش بلاک نیستروم، جاتور و ماناتونگا برای به دست آوردن حل عددی تلاش کردند [۱۲]. عباس بندی و همکاران مسئله براتو را به یک مسئله مقدار غیر مرزی مرتبه دوم تبدیل کردند [۱۳]. سپس از روش شوتینگ گروه‌های لی برای محاسبه جواب‌های تقریبی استفاده کردند. روش محاسباتی دیگر به نام روش هم محلی سینک توسط رشیدی نیا و طاهر ارائه گردید [۱۴]. در [۱۵] اینک و همکارانش محاسبه جواب‌های تقریبی مسئله را توسط روش فضای هسته تکثیر کننده هیلبرت پیشنهاد دادند. یانگ و هو [۱۶] در تحقیقی روش عددی را برای به دست آوردن جواب به کار گرفتند. در این تحقیق از تقریبات موج‌های چیبیشف برای یافتن جواب عددی استفاده کردند. در [۱۷] روش شبه‌طیفی، روش تفاضلات متناهی و روش توابع پایه شعاعی برای تهیه جواب‌های تقریبی توسط کارکوفسکی به کار گرفته شده‌اند. یک روش عددی دیگر در [۱۸] ارائه شده است. در این روش رشیدی نیا و همکاران بر اساس روش گالرکین با استفاده از توابع پایه سینک جواب عددی را پیدا کردند. عاقلی در [۱۹] برای یافتن جواب تقریبی از توابع پایه‌ای مثلثی استفاده کرد و در مقاله‌ای دیگر [۲۰] از روش شبه تحلیلی که یک روش تکراری می‌باشد جواب تقریبی را محاسبه نمود. سیام و حمدان [۲۱] از یک روش عددی به جستجوی جواب پرداختند. روش آنها بر پایه تولید یک معادله ضمنی دو متغیره به کمک روش تجزیه ادمیان و لاپلاس می‌باشد. روش محاسباتی و تکراری دیگری توسط باتیه به نام روش تکراری تغییرات در [۲۲] برای یافتن جواب تقریبی ارائه شده است. فنگ و همکاران [۲۳] یک روش منطبق بر اختلال هموتویی برای یافتن جواب

(b) $u(t)$ یکنوا کاهشی روی $[b, d]$ است.

(c) $u(t) = 1$ روی $a \leq t \leq b$.

تعریف ۲-۲ عدد فازی \tilde{u} را ذوذنقه‌ای گوئیم هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد [۴۳]:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{t-c}{a-c} & c \leq t \leq a \\ 1 & a \leq t \leq b \\ \frac{d-t}{d-b} & b \leq t \leq d \\ 0 & t \notin [c, d] \end{cases}$$

و با $\tilde{u} = (c, a, b, d)$ نشان می‌دهیم. اگر $a = b$ باشد عدد فازی را مثلثی گوئیم و با $\tilde{u} = (c, a, d)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳-۲ برای $0 < r \leq 1$ ، r -تراز عدد فازی \tilde{u} را با $[\tilde{u}]^r$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\tilde{u}]^r = \{t \in \mathbf{R} \mid u(t) \geq r\}$$

برای عدد فازی ذوذنقه‌ای $\tilde{u} = (c, a, b, d)$ برای $[\tilde{u}]^r = [c + (a - c)r, d + (b - d)r]$ و برای عدد فازی مثلثی $\tilde{u} = (c, a, d)$ $[\tilde{u}]^r = [c + (a - c)r, d + (a - d)r]$.

تعریف ۴-۲ فرم پارامتری یک عدد فازی به صورت زوج مرتب $\tilde{u} = (\underline{u}(r), \bar{u}(r))$ نمایش داده می‌شود که در شرایط زیر صادق می‌باشد [۴۳].

i. تابع $\bar{u}(r)$ روی $[0, 1]$ تابع چپ پیوسته، کران دار و نانزولی می‌باشد.

ii. تابع $\underline{u}(r)$ روی $[0, 1]$ تابع چپ پیوسته، کران دار و نانزولی می‌باشد.

iii. برای $0 \leq r \leq 1$

نامساوی $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$ برقرار است.

معرفی شد [۴۱، ۴۲] و در ادامه اعداد فازی و اعمال محاسباتی مطرح گردید. از جمله کاربردهای مهم اعداد فازی که در همان ابتدا مورد توجه قرار گرفت به کارگیری آن در کنترل فازی و مسایل استدلال تقریبی می‌باشد [۴۳].

در فرموله کردن معادلات دیفرانسیل، پارامترها، متغیرها و شرایط اولیه و شرایط مرزی به طور دقیق تعیین یا تعریف می‌شوند. اما در حقیقت، به دلیل خطاهای آزمایشی و اندازه‌گیری، این پارامترها ممکن است مبهم و نامشخص باشند، که منجر به معادلات دیفرانسیل فازی می‌شوند. در سال‌های اخیر، به دلیل کاربرد فراوان معادلات دیفرانسیل فازی در بسیاری از مسایل علوم و مهندسی به طور مفصل مورد توجه و مطالعه محققان قرار گرفته‌اند. برخی از این مقالات و یافته‌ها را می‌توان در مطالعات قبلی یافت [۴۴-۵۱].

انگیزه اصلی این مقاله استفاده از روش تمیمی و انصاری [TAM 52] برای معادله دیفرانسیل فازی براتو $\tilde{u}''(t) + \lambda \exp(\tilde{u}(t)) = 0$, $0 < t \leq T$ ، با شرایط مرزی $\tilde{u}(0) = \tilde{\alpha}$, $\tilde{u}'(0) = \tilde{\beta}$ که $\tilde{u}(t)$ تابع فازی می‌باشد.

۲- پیشینه‌ها

در این بخش برخی نمادها، تعاریف و نتایج را که در ادامه مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند، ذکر می‌شوند.

تعریف ۱-۲ عدد فازی، نگاشتی است بصورت $u: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ که در روابط زیر صادق می‌باشد [۴۳]:

(۱) u نیم پیوسته بالایی است.

(۲) خارج از $\mathbf{R} \subset [c, d]$ داریم $u(t) = 0$.

(۳) اعداد حقیقی a و b وجود دارند به طوری که $c \leq a \leq b \leq d$ در این صورت

(a) $u(t)$ یکنوا افزایشی روی $[c, a]$ است.

قسمت غیرخطی تابع مجهول $u(t)$ و تابع $h(t)$ تابع معلوم برحسب متغیر مستقل Z می‌باشند. در روش TAM برای یافتن جواب‌های تکراری (۱-۱) از فرض اولیه $u_0(t)$ شروع کرده و دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی در نظر گرفته می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u_0(t)] + h(t) = 0, \\ B\left(u_0, \frac{du_0}{dt}\right) = 0, \\ L[u_1(t)] = N[u_0(t)] + h(t), \\ B\left(u_1, \frac{du_1}{dt}\right) = 0, \\ L[u_2(t)] = N[u_1(t)] + h(t), \\ B\left(u_2, \frac{du_2}{dt}\right) = 0, \\ \vdots \\ L[u_{n+1}(t)] + N[u_n(t)] + h(t) = 0, \\ B\left(u_{n+1}, \frac{du_{n+1}}{dt}\right) = 0. \end{array} \right.$$

برای حل تقریبی کفایت حد زیر در نظر گرفته شود:

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t).$$

۲-۳ معادله دیفرانسیل فازی براتو

در این زیربخش معادله دیفرانسیل فازی براتو را به صورت کلی زیر در نظر می‌گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}''(t) + \lambda \exp(\tilde{u}(t)) = 0 \\ \tilde{u}(a) = \tilde{\alpha}, \quad \tilde{u}'(a) = \tilde{\beta}, \end{array} \right.$$

که $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ دو عدد فازی معلوم و $N[\tilde{u}(t)] = -\lambda \exp(\tilde{u}(t))$ ، $L[\tilde{u}(t)] = \tilde{u}''(t)$ ، و هدف تقریب تابع $\tilde{u}(t) = (u(1, t), u_*(t), u^*(t))$ می‌باشد. فرض کنید:

تعریف ۲-۵ برای عدد فازی $\tilde{u} = (u(r), \bar{u}(r))$ عدد $u(1) = \frac{1}{2}(u(1) + \bar{u}(1))$ شاخص مرکزی عدد فازی \tilde{u} نامیده می‌شود و تابع چپ پیوسته نانزولی $u_* = u(1) - u(r)$ تابع شاخص فازی شده چپ و تابع چپ پیوسته نانزولی $u^* = \bar{u}(r) - u(1)$ تابع شاخص فازی شده راست نامیده می‌شود [۴۳].

با توجه به تعریف ۲-۳ هر عدد فازی را می‌توان به صورت $\tilde{u} = (u(1), u_*, u^*)$ نمایش داد.

تعریف ۲-۶ برای دو عدد فازی دلخواه $\tilde{u} = (u(1), u_*, u^*)$ و $\tilde{v} = (v(1), v_*, v^*)$ چهار عمل اصلی به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۳]

$$\tilde{u} * \tilde{v} = \left(\begin{array}{l} u(1) * v(1), \\ \max\{u_*, v_*\}, \\ \max\{u^*, v^*\} \end{array} \right)$$

که $*$ یکی از چهار عمل اصلی است.

۳- روش تمیمی و انصاری و معادله دیفرانسیل فازی براتو

در این بخش روش تمیمی و انصاری و حل عددی معادله دیفرانسیل فازی براتو به کمک آن بیان می‌گردد.

۱-۳ روش تمیمی و انصاری TAM

در این زیر بخش به معرفی روش TAM پرداخته خواهد شد. با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل غیرخطی $L[u(t)] = N[u(t)] + h(t)$ با شرایط مرزی $B\left(u, \frac{du}{dt}\right) = 0$ که $L[u(t)]$ قسمت خطی تابع مجهول $u(z)$ ، $N[u(t)]$

با بکارگیری روش TAM برای E_1, E_2 و E_3 سه دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر برای $n=0,1,2,\dots$ حاصل می‌شود:

$$TAM E_1 : \begin{cases} u''_{n+1}(1,t) = -\lambda \exp(u_n(1,t)), \\ u_{n+1}(1,a) = \alpha(1), \\ u'_{n+1}(1,a) = \beta(1), \\ u''_0(1,t) = 0, \end{cases}$$

$$TAM E_2 : \begin{cases} u''_{n+1^*}(t) = -\lambda(u_{n^*}(t)), \\ u_{n+1^*}(a) = \alpha_*, \\ u'_{n+1^*}(a) = \beta_*, \\ u''_{0^*}(t) = 0, \end{cases}$$

$$TAM E_3 : \begin{cases} u''_{n+1^*}(t) = -\lambda(u_n^*(t)), \\ u_{n+1^*}(a) = \alpha^*, \\ u'_{n+1^*}(a) = \beta^*, \\ u''_{0^*}(t) = 0, \end{cases}$$

که $u_0(1,t)$ و $u_{n+1}(1,t)$ از $TAM E_1$ حاصل می‌شوند.

۴- مثال‌های عددی

در این بخش به محاسبه حل عددی معادله دیفرانسیل فازی براتو به کمک روش TAM می‌پردازیم.

مثال ۴-۱: معادله دیفرانسیل فازی براتو زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \tilde{u}''(t) - 2 \exp(\tilde{u}(t)) = 0 \\ \tilde{u}(0) = (-1, 0, 1), \quad \tilde{u}'(0) = (-1, 0, 1), \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله با توجه به شرایط اولیه $u(0)=0$ و $u'(0)=0$ برابر است با $u(t) = -2 \log(\cos(t))$ برای یافتن جواب عددی به کمک روش TAM می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= (\alpha(1), \alpha_*, \alpha^*) \\ \tilde{\beta} &= (\beta(1), \beta_*, \beta^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_* &= \alpha(1) - \underline{\alpha}(r), \\ \alpha^* &= \bar{\alpha}(r) - \alpha(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_* &= \beta(1) - \underline{\beta}(r), \\ \beta^* &= \bar{\beta}(r) - \beta(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_*(t) &= u(1,t) - \underline{u}(r,t), \\ u^*(t) &= \bar{u}(r,t) - u(1,t) \end{aligned}$$

$$L[\tilde{u}(t)] = (u''(1,t), u''_*(t), u''^{**}(t))$$

$$u''_*(t) = u''(1,t) - \underline{u}''(r,t),$$

$$u''^{**}(t) = \bar{u}''(r,t) - u''(1,t)$$

$$N[\tilde{u}(t)] = -\lambda \begin{pmatrix} \exp(u(1,t)), \\ u_*(t), u^*(t) \end{pmatrix}.$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل براتو به کمک مجموع و برابری دو عدد فازی خواهیم داشت:

$$E_1 : \begin{cases} u''(1,t) = -\lambda \exp(u(1,t)), \\ u(1,a) = \alpha(1), \\ u'(1,a) = \beta(1), \end{cases}$$

$$E_2 : \begin{cases} u''_*(t) = -\lambda(u_*(t)), \\ u_*(a) = \alpha_*, \\ u'_*(a) = \beta_*, \end{cases}$$

$$E_3 : \begin{cases} u''^{**}(t) = -\lambda(u^{**}(t)), \\ u^{**}(a) = \alpha^*, \\ u'^{**}(a) = \beta^*. \end{cases}$$

که

و

و

لذا

$$u_{1*}(t) = 1 - r + t - rt + \frac{t^2}{2} - \frac{rt^2}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{rt^3}{6},$$

$$u_{2*}(t) = 1 - r + t - rt + \frac{t^2}{2} - \frac{rt^2}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{rt^3}{6} + \frac{t^4}{24} - \frac{rt^4}{24} + \frac{t^5}{120} - \frac{rt^5}{120},$$

...

به کمک حل دستگاه $TAM E_3$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_{n+1}''(t) = 2(u_n^*(t)), \\ u_{n+1}^*(0) = 1 - r, \\ u_{n+1}'^*(0) = 1 - r, \\ u_{0}''(t) = 0, \\ u_0^*(t) = 1 - r + t - rt, \\ u_2^*(t) = 1 - r + t - rt + \frac{t^2}{2} - \frac{rt^2}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{rt^3}{6} + \frac{t^4}{24} - \frac{rt^4}{24} + \frac{t^5}{120} - \frac{rt^5}{120}, \\ \dots \end{cases}$$

تقریب جواب مثال ۴-۱ تا تکرار ۵ را در جدول ۱-۱ بیان شده است. نمودار جواب واقعی و تقریبی در ۱-۱ تراز در نمودار ۱-۱ و نمودار تابع چپ، نمودار تابع راستو تابع وسط در ۱-۱ تراز نیز در نمودار ۱-۲ نمایش داده شده‌اند. شکل جواب فازی در تکرار پنجم در نمودار ۱-۳ و در نهایت خطای مطلق آن در نمودار ۱-۴ نشان داده شده است.

$$\tilde{u}(0) = (-1, 0, 1) = (0, 1 - r, 1 - r),$$

$$\tilde{u}'(0) = (-1, 0, 1) = (1, 1 - r, 1 - r),$$

$$L[\tilde{w}(z)] = \tilde{w}''(z),$$

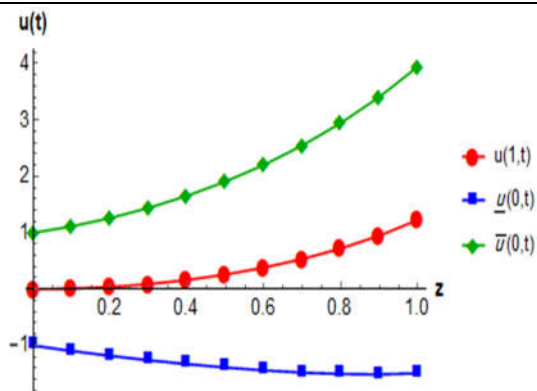
$$N[\tilde{w}(z)] = 2 \exp(\tilde{u}(t)).$$

به کمک حل دستگاه $TAM E_1$ ، خواهیم داشت:

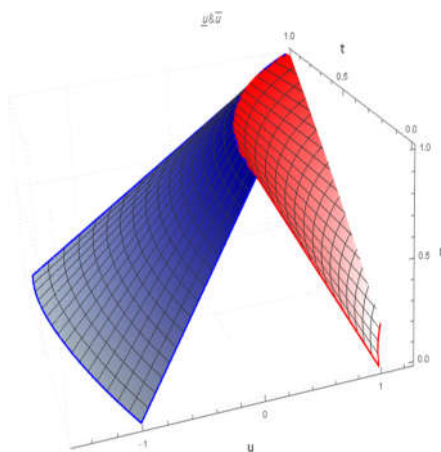
$$\begin{cases} u_{n+1}''(1, t) = 2 \exp(u_n(1, t)), \\ u_{n+1}(1, 0) = 0, \\ u_{n+1}'(1, 0) = 0, \\ u_0''(1, t) = 0, \\ u_0(1, t) = 0, \\ u_1(1, t) = t^2, \\ u_2(1, t) = \frac{t^8}{168} + \frac{t^6}{30} + \frac{t^4}{6} + t^2, \\ u_3(1, t) = \frac{t^{26}}{9246182400} + \frac{t^{24}}{467389440} + \frac{53t^{22}}{1955923200} + \frac{3617t^{20}}{12065760000} + \frac{1657t^{18}}{647740800} + \frac{167t^{16}}{9072000} + \frac{2461t^{14}}{20638800} + \frac{53t^{12}}{83160} + \frac{43t^{10}}{14175} + \frac{11t^8}{840} + \frac{2t^6}{45} + \frac{t^4}{6} + t^2, \\ \vdots \end{cases}$$

به کمک حل دستگاه $TAM E_2$ ، خواهیم داشت:

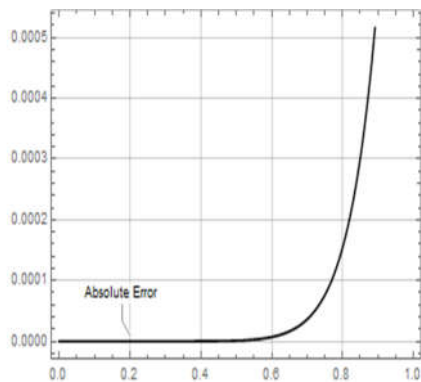
$$\begin{cases} u_{n+1}''(t) = 2(u_n^*(t)), \\ u_{n+1}^*(0) = 1 - r, \\ u_{n+1}'^*(0) = 1 - r, \\ u_{0}''(t) = 0, \\ u_{0}^*(t) = 1 - r + t - rt, \end{cases}$$



نمودار ۲-۱: نتایج عددی تقریب مثال ۳-۱ تا تکرار ۵ برای ۱-تراز



نمودار ۳-۱: نتایج عددی تقریب مثال ۳-۱ تا تکرار ۵



نمودار ۴-۱: نمودار خطای مطلق تقریب مثال ۳-۱ تا تکرار ۵.

جدول ۱-۱: نتایج عددی تقریب مثال ۳-۱ تا تکرار ۵

t	$\underline{u}(0,t)$	$\bar{u}(0,t)$	$u(1,t)$	Exact Solution	Absolut Error
$t = 0$	-1	1	0	0	0
$t = 0.2$	-1.18113	1.26167	0.0402695	0.0402695	97.1582×10^{-12}
$t = 0.4$	-1.32737	1.65628	0.164458	0.164458	107.275×10^{-9}
$t = 0.6$	-1.4382	2.20604	0.383923	0.38393	7.0674×10^{-6}
$t = 0.8$	-1.50291	2.94817	0.722627	0.722781	154.122×10^{-6}
$t = 1.0$	-1.48898	3.94759	1.2293	1.23125	1.94919×10^{-3}

فرم پارامتری جواب فازی به صورت زوج مرتب

$$\tilde{u} = (\underline{u}(r,t), \bar{u}(r,t)) \text{ می باشد که برای } n = 2$$

$$\underline{u}(r,t) =$$

$$\frac{rt^5}{120} + \frac{rt^4}{24} + \frac{rt^3}{6} +$$

$$\frac{rt^2}{2} + rt + r - 7t^{16} +$$

$$4.173268453036214 -$$

$$8t^{17} + 0.061881t^6 +$$

$$0.125683t^5 - 6t^{15}$$

$$0.0000290234t^{14} +$$

$$0.00012648t^{13} +$$

$$5.683738740095146 +$$

$$4.683574430410054 +$$

$$0.000414778t^{12} +$$

$$0.000921274t^{11} +$$

$$0.0004816t^{10} -$$

$$0.00342383t^9 -$$

$$0.015267t^8 -$$

$$0.0248368t^7 +$$

$$0.00483776t^4 -$$

$$0.58274t^3 - 1.5t^2 +$$

$$0.24822t - 1.$$

مثال ۴-۲: معادله دیفرانسیل فازی براتو زیر را در

نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \tilde{u}''(t) + 2 \exp(\tilde{u}(t)) = 0 \\ \tilde{u}(0) = (-1, 0, 1), \\ \tilde{u}'(0) = (0.49822, \\ 1.24822, 1.99822), \end{cases}$$

با بکارگیری روش TAM برای $TAM E_1$

و $TAM E_2$ سه دستگاه معادلات

دیفرانسیل زیر برای $n = 0, 1, 2, \dots$ حاصل می شود:

$$\begin{cases} u_{n+1}''(1,t) = -2 \exp(u_n(1,t)), \\ u_{n+1}(1,0) = 0, \\ u_{n+1}'(1,0) = 1.24822, \\ u_0''(1,t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{n+1}''(t) = -2(u_n^*(t)), \\ u_{n+1}^*(0) = 1 - r, \\ u_{n+1}'^*(0) = 0.75(1-r), \\ u_0^*(t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{n+1}''^*(t) = -2(u_n^*(t)), \\ u_{n+1}^*(0) = 1 - r, \\ u_{n+1}'^*(0) = 0.75(1-r), \\ u_0^*(t) = 0, \end{cases}$$

بعضی از روش‌های تبدیل لاپلاس (LTM)، روش تجزیه (DM) و روش بی اسپلاین (BSM) مقایسه شده است که می‌توان در جدول ۱-۲ مشاهده نمود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله روش روش تمیمی و انصاری (TAM) برای حل شبه تحلیلی معادله دیفرانسیل براتو با شرایط اولیه فازی استفاده شده است. با استفاده از اعمال حسابی روی داده‌های فازی، معادله دیفرانسیل براتو فازی به سه دستگاه معادلات دیفرانسیل با داده‌های دقیق تبدیل شده است. با حل این سه دستگاه، جواب تقریبی فازی از معادله دیفرانسیل براتو محاسبه گردید.

مزیت این روش در این است که به کمک یک فرمول تکراری با تعداد تکرار کم می‌توان جواب تقریبی مناسبی برای معادله دیفرانسیل در نظر گرفته شده پیدا کرد. ما براین عقیده هستیم که با روش ارائه شده می‌توان به حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی دیگر و همچنین معادلات دیفرانسیل با مشتقات غیر صحیح نیز این روش را تعمیم داد.

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, t) = & 1 - r + \\ & 2.24822t - rt - 0.5t^2 \\ & - \frac{rt^2}{2} - 0.249407t^3 - \frac{rt^3}{6} + \\ & 0.0784956t^4 - \frac{rt^4}{24} + \\ & 0.142349t^5 - \frac{rt^5}{120} + \\ & 0.061881t^6 - 0.0248368t^7 \\ & - 0.015267t^8 - 0.00342383t^9 + \\ & 0.0004816t^{10} + 0.000921274t^{11} + \\ & 0.000414778t^{12} + \\ & 4.173268453036214 - \\ & 8t^{17} + 5.683738740095146 - \\ & 7t^{16} + 4.683574430410054 - \\ & 6t^{15} + 0.0000290234t^{14} + \\ & 0.00012648t^{13} \end{aligned}$$

همچنین جواب تقریبی این روش در ۱-تراز با

جدول ۲-۱: مقایسه عددی روش‌های LTM, DM, BSM و FTAM (n=۴) و جواب دقیق برای مثال ۴-۲.

t	LTM	DM	BSM	$u(1, t)$	Exact
$t = 0.5$	0.319353	0.335937	0.328896	0.328978	0.328952
$t = 0.6$	0.304160	0.318336	0.315036	0.31514	0.315089
$t = 0.7$	0.261946	0.267991	0.273834	0.273963	0.273879
$t = 0.8$	0.194041	0.191744	0.206386	0.20654	0.206419
$t = 0.9$	0.103537	0.099193	0.114393	0.114572	0.114411

فهرست منابع

- [9] Frank-Kamenetskii, D. A. (2015). Diffusion and heat exchange in chemical kinetics. Princeton University Press.
- [10] Colantoni, A., & Boubaker, K. (2014). Electro-spun organic nanofibers elaboration process investigations using comparative analytical solutions. Carbohydrate polymers, 101, 307-312.
- [11] Zarebnia, M., & Sarvari, Z. (2013). New Approach for Numerical Solution of the One-Dimensional Bratu Equation. Thai Journal of Mathematics, 11(3), 611-621.
- [12] Jator, S. N., & Manathunga, V. (2018). Block Nyström type integrator for Bratu's equation. Journal of Computational and Applied Mathematics, 327, 341-349.
- [13] Abbasbandy, S., Hashemi, M. S., & Liu, C. S. (2011). The Lie-group shooting method for solving the Bratu equation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(11), 4238-4249.
- [14] Rashidinia, J., & Taher, N. (2012). Application of the Sinc Approximation to the Solution of Bratu's Problem, International Journal of Mathematical Modelling & Computations, 2(3), 239-246.
- [15] Inc, M, Akgül, A, Geng, F: Reproducing kernel Hilbert space method for solving Bratu's problem. Bull. Malays. Math. Soc. 38, 271-287 (2015)
- [16] Yang, C., & Hou, J. (2013). Chebyshev wavelets method for solving Bratu's problem. Boundary value problems, 2013(1), 142.
- [1] Karkowski, J. (2013). Numerical experiments with the Bratu equation in one, two and three dimensions. Computational and Applied Mathematics, 32(2), 231-244.
- [2] Jator, S. N., & Manathunga, V. (2018). Block Nystrom type integrator for Bratu's equation. Journal of Computational and Applied Mathematics, 327, 341-349.
- [3] Wazwaz, A. M. (2005). Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu- type equations. Applied Mathematics and Computation, 166(3), 652-663.
- [4] Bratu, G. (1914). Sur les équations intégrales non linéaires. Bull. Soc. Math. France, 42, 113-142.
- [5] Jacobsen, J., & Schmitt, K. (2002). The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators. Journal of Differential Equations, 184(1), 283-298.
- [6] Wan, Y. Q., Guo, Q., & Pan, N. (2004). Thermo-electro-hydrodynamic model for electrospinning process. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 5(1), 5-8.
- [7] Jalilian, R. (2010). Non-polynomial spline method for solving Bratu's problem. Computer Physics Communications, 181(11), 1868-1872.
- [8] McGough, J. S. (1998). Numerical continuation and the Gelfand problem. Applied mathematics and computation, 89(1-3), 225-239.

- [25] Keshavarz, E., Ordokhani, Y., & Razzaghi, M. (2018). The Taylor wavelets method for solving the initial and boundary value problems of Bratu-type equations. *Applied Numerical Mathematics*, 128, 205-216.
- [26] Babolian, E., Javadi, S., & Moradi, E. (2016). RKM for solving Bratu-type differential equations of fractional order. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(6), 1548-1557.
- [27] Tomar, S., & Pandey, R. K. (2019). An efficient iterative method for solving Bratu-type equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 357, 71-84.
- [28] Sakar, M. G., Saldır, O., & Akgül, A. (2018). Numerical solution of fractional Bratu type equations with Legendre reproducing kernel method. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 4(5), 126.
- [29] Yang, C., & Hou, J. (2013). Chebyshev wavelets method for solving Bratu's problem. *Boundary value problems*, 2013(1), 142.
- [30] Caglar, H., Caglar, N., Özer, M., Valaristos, A., & Anagnostopoulos, A. N. (2010). B-spline method for solving Bratu's problem. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(8), 1885-1891.
- [31] Hassan, H. N., & Smary, M. S. (2013). Analytic approximate solution for the Bratu's problem by optimal homotopy analysis method. *Communications in Numerical Analysis*, 2013, 1-14.
- [32] Kumar, M., & Yadav, N. (2015). Numerical solution of Bratu's problem
- [17] Karkowski, J. (2013). Numerical experiments with the Bratu equation in one, two and three dimensions. *Computational and Applied Mathematics*, 32(2), 231-244.
- [18] Rashidinia, J., Maleknejad, K., & Taheri, N. (2013). Sinc-Galerkin method for numerical solution of the Bratu's problems. *Numerical Algorithms*, 62(1), 1-11.
- [19] Agheli, B. (2021). Approximate solution of Bratu differential equations using trigonometric functions. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 45(2), 203-214.
- [20] Agheli, B. (2019). Solving fractional Bratu's equations using a semi-analytical technique. *Journal of Mathematics*, 51(9), 111-121.
- [21] Syam, M. I., & Hamdan, A. (2006). An efficient method for solving Bratu equations. *Applied Mathematics and Computation*, 176(2), 704-713.
- [22] Batiha, B. (2010). Numerical solution of Bratu-type equations by the variational iteration method. *Hacetatepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39(1), 23-29.
- [23] Feng, X., He, Y., & Meng, J. (2008). Application of homotopy perturbation method to the Bratu-type equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 31(2), 243-252.
- [24] Abd-Elhameed, W. M., Youssri, Y. H., & Doha, E. (2015). A novel operational matrix method based on shifted Legendre polynomials for solving second-order boundary value problems involving singular, singularly perturbed and Bratu-type equations. *Mathematical Sciences*, 9(2), 93-102.

- [40] Ben-Romdhane, M., Temimi, H., & Baccouch, M. (2019). An iterative finite difference method for approximating the two-branched solution of Bratu's problem. *Applied Numerical Mathematics*, 139, 62-76.
- [41] Chang, S. S., & Zadeh, L. A. (1996). On fuzzy mapping and control. In *Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh*, 180-184.
- [42] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.
- [43] Ma, M., Friedman, M., & Kandel, A. (1999). A new fuzzy arithmetic. *Fuzzy sets and systems*, 108(1), 83-90.
- [44] Ahmadian, A., Salahshour, S., Chan, C. S., & Baleanu, D. (2018). Numerical solutions of fuzzy differential equations by an efficient Runge–Kutta method with generalized differentiability. *Fuzzy Sets and Systems*, 331, 47-67.
- [45] Razvarz, S., Jafari, R., & Yu, W. (2018). Numerical solution of fuzzy differential equations with Z-numbers using fuzzy Sumudu transforms. *Adv. Sci. Technol. Eng. Syst. J.(ASTESJ)*, 3, 66-75.
- [46] Jameel, A. F., Saaban, A., Altaie, S. A., Anakira, N. R., Alomari, A. K., & Ahmad, N. (2018). Solving first order nonlinear fuzzy differential equations using Optimal Homotopy Asymptotic Method. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 118(1), 49-64.
- [47] Bertone, A. M., Jafelice, R. M., de Barros, L. C., & Gomide, F. (2018). Granular approximation of solutions of partial differential equations with fuzzy parameter. *Granular Computing*, 3(1), 1-7.
- using multilayer perceptron neural network method. *National Academy Science Letters*, 38(5), 425-428.
- [33] Temimi, H., & Ben-Romdhane, M. (2016). An iterative finite difference method for solving Bratu's problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 292, 76-82.
- [34] Khuri, S. A. (2004). A new approach to Bratu's problem. *Applied mathematics and computation*, 147(1), 131-136.
- [35] Hajipour, M., Jajarmi, A., & Baleanu, D. (2018). On the accurate discretization of a highly nonlinear boundary value problem. *Numerical Algorithms*, 79(3), 679-695.
- [36] Aksoy, Y., & Pakdemirli, M. (2010). New perturbation–iteration solutions for Bratu-type equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(8), 2802-2808.
- [37] Raja, M. A. Z., Samar, R., Alaidarous, E. S., & Shivanian, E. (2016). Bio-inspired computing platform for reliable solution of Bratu-type equations arising in the modeling of electrically conducting solids. *Applied Mathematical Modelling*, 40(11-12), 5964-5977.
- [38] Wazwaz, A. M. (2016). The successive differentiation method for solving Bratu equation and Bratu-type equations. *Romanian Journal of Physics*, 61(5), 774-783.
- [39] Lotfi, M., & AliPanah, A. (2019). Using Legendre spectral element method with Quasi-linearization method for solving Bratu's problem. *Computational Methods for Differential Equations*, 7(4 (Special Issue)), 580-588.

fuzzy linear fractional differential equation. *Advances in Difference Equations*, 2013(1), 104.

[51] Allahviranloo, T., & Ghanbari, B. (2020). On the fuzzy fractional differential equation with interval Atangana–Baleanu fractional derivative approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 130, 109397.

[52] Al-Jawary, M. A., Adwan, M. I., & Radhi, G. H. (2018). Three iterative methods for solving second order nonlinear ODEs arising in physics. *Journal of King Saud University-Science*.

[48] da Costa, T. M., Chalco-Cano, Y., Lodwick, W. A., & Silva, G. N. (2018). A new approach to linear interval differential equations as a first step toward solving fuzzy differential. *Fuzzy Sets and Systems*, 347, 129-141.

[49] Khastan, A., & Rodríguez-López, R. (2015). On periodic solutions to first order linear fuzzy differential equations under differential inclusions' approach. *Information Sciences*, 322, 31-50.

[50] Ahmadian, A., Suleiman, M., Salahshour, S., & Baleanu, D. (2013). A Jacobi operational matrix for solving a