دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

برخی قضایای نقطه ثابت مشترک در فضاهای $P-$ متری مرتب جزیی

حسن حسین‌زاده[۱*]، وحید پروانه[۲]

(۱) گروه ریاضی، واحد اردبیل، دانشگاه آزاد اسلامی، اردبیل، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد گیلان -غرب، دانشگاه آزاد اسلامی، گیلان - غرب، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۰/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۱۵

چکیده

یک فضایp-متری تعمیمی جدید و جذاب از یک فضای b- متری است. تعمیم اصل انقباض باناخ مشهور، توسط نویسندگان زیادی انجام شده است. تعمیمها روی توسیع فضاهای متری و توسیع شرایط انقباضی متمرکزند. متر جزیی، شبه متر، جی-متری، دو متری و متر برنسیاری چند مثال از مترهای ارایه شده در این زمینه اند. هدف از انجام این تحقیق ارائه چندین قضیه نقطه ثابت مشترک برای دو نگاشت (که یکی از آن‌ها صعودی ایزوتون ضعیف نسبت به دیگری است) در چارچوب فضاهای متری مرتب می‌باشد. نتایج به‌دست آمده تعمیم نتایج موجود در منابع

{H. K. Nashine, B. Samet and C. Vetro, Math. Comput. Modelling, 54 (2011) 712–720}
{J.R. Roshana, V. Parvaneh and Z. Kadelburg, J. Nonlinear Sci.Appl, 7 (2014), 229-245}

می‌باشد. یک مثال نابدیهی نیز برای تایید نتایج به‌دست آمده ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: فضای متریک تعمیم یافته، فضای مرتب جزیی، $P-$متری، نقطه ثابت.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: hasan_hz2003@yahoo.com

۱- مقدمه

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و f یک خودنگاشت روی X باشد. اگر برای یک عنصر $x \in X$ $f(x)=x$ آن‌گاه x یک نقطه ثابت f نامیده می‌شود.

اخیرا، بسیاری از محققان روی شرایط انقباضی مختلف در فضاهای متریک کامل مجهز به یک ترتیب جزئی تمرکز کرده و نتایج نقطه ثابت متفاوتی را در چنین فضاهایی به‌دست آورده‌اند. برای جزئیات بیشتر در مورد نتایج نقطه ثابت کاربردهای آن‌ها مقایسه شرایط انقباضی مختلف و نتایج وابسته دیگر در فضاهای متریک مرتب و فضای مدولارها خواننده را به منابع [32,31,30,29,28,27,24,23, 22,21,19,18,17,8,6,5,4] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. [15] فرض کنید $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و d یک متر روی X باشند. گوییم $(X,d,\preceq)$ منظم است اگر شرایط زیر برقرار باشد:

(i) اگر دنباله غیر نزولی $x_n \to x$ موجود باشد به طوری که، برای هر $n \in N$، $x_n \preccurlyeq x$.

(ii) اگر دنباله غیر صعودی $y_n \to y$ موجود باشد به طوری که، برای هر $n \in N$، $y_n \preccurlyeq y$.

مفهوم فضای $b-$ متریک توسط چرویک در [15] معرفی شد. از آن به بعد مقالات متعددی در مورد نظریه نقطه ثابت برای رده‌های مختلف عملگرهای تک مقداری و چند مقداری در فضاهای $b-$متریک منتشر شده است (هم‌چنین، مقالات [26,25,16,14,13,12,11,10,9] را ببینید).

تعریف ۲.۱. [15] فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $s \geq 1$ یک عدد حقیقی دلخواه باشد. تابع $d: X\times X \to R^{+}$ یک $b-$متریک است اگر و تنها اگر، برای هر $x,y,z \in X$، شرایط زیر برقرار باشند:

b_1. $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$،

b_2. $d(x,y)=d(y,x)$،

b_3. $d(x,z)\leq s[d(x,y)+d(y,z)]$،

زوج (X,d) یک فضای b - متریک نامیده می‌شود.

اگر $s=1$ یک $b-$ متریک یک متر معمولی است.

در اینجا، مثالی ارائه می‌دهیم تا نشان دهد که در حالت کلی $b-$متریک لزوما یک متر نیست.

(هم‌چنین، [19] صفحه ۲۶۴را ببینید).

مثال ۳.۱.[3] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $\rho(x,y)=(d(x,y))^{p}$ که در آن $p>1$ یک عدد حقیقی است. دراین‌صورت، ρ یک $b-$ متریک با ضریب $s=2^{p-1}$ می‌باشد.

با این حال، اگر (X,d) یک فضای متریک باشد آن‌گاه، (X,ρ) لزوماً یک فضای متریک نیست.

برای مثال اگر $X=\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی و $d(x,y)=|x-y|$ متر اقلیدسی معمولی باشد آن‌گاه $\rho(x,y)=(x-y)^{2}$ یک $b-$متریک روی $\mathbb{R}$ با ضریب $s=2$ می‌باشد، اما یک متر روی $\mathbb{R}$ نیست.

مثال زیر از فضاهای $b-$ متریک در [20] ارائه شده است.

مثال ۴.۱.[20] فرض کنید X مجموعه توابع اندازه پذیر لبگ روی بازه $[0,1]$باشد به‌طوری که

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

تابع $D: X\times X \to [0,\infty)$را با ضابطه

$$D(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2 dx$$

در نظر می‌گیریم. چون

$$\left(\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

یک متر روی X است لذا با توجه به مثال قبل D یک $b-$متریک روی X با ضریب $s=2$ می‌باشد.

اخیرا، حسین و همکاران ایشان مثالی از یک فضای $b-$ متریک ناپیوسته ارائه کرده‌اند (مثال ۳ در [18]). با انگیزه گرفتن از کار انجام شده در[15]، تعاریف و نتایج زیر را که در ادامه مورد نیاز خواهند بود، ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۵. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع $d:X\times X\to\mathbb{R}^+$ یک $p-$ متریک است اگر و تنها اگر تابعی پیوسته و اکیدا صعودی مانند $\Omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$ با شرط $x<\Omega(x)$ برای هر $x>0$ و $\Omega(0)=0$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $x,y,z\in X$، شرایط زیر برقرار باشند:

(p1) $d(x,y)=\circ$ اگر و تنها اگر $x=y$،

(p2) $d(x,y)=d(y,x)$

(p3) $d(x,z)\le\Omega(d(x,y)+d(y,z))$

دراین‌صورت زوج (X,d) یک فضای $p-$ متریک یا یک فضای $b-$ متریک توسعه یافته نامیده می‌شود.
خاطر نشان می‌شود که رده فضاهای $p-$ متریک به‌طور قابل ملاحظه‌ای نسبت به رده فضاهای $b-$متریک وسیع‌تر هستند، زیرا یک $b-$متریک یک $p-$ متریک خواهد بود اگر $\Omega(x)=sx$ و یک متر معمولی یک $p-$ متریک با $\Omega(x)=x$ می‌باشد. حال مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد که در حالت کلی یک $p-$ متریک لزوما یک $b-$ متریک نیست.

مثال ۱.۶. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $\rho(x,y)=\sinh(x,y)$ دراین صورت ρ یک $p-$ متریک است که در آن برای هر $t\ge 0$، $\Omega(t)=t\cosh(t)$ ولی به ازای $s\ge 1$ یک فضای $b-$ متریک نیست.

مثال ۱.۷. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $\rho(x,y)=e^{d(x,y)}-1$ در این صورت ρ یک $p-$ متریک با $\Omega(t)=e^t-1$ می‌باشد.

تعریف ۱.۸. فرض کنید (X,d) یک فضای $p-$ متریک باشد. دنباله $\{x_n\}$ در (ap) -همگرا به X نامیده می‌شود اگر و تنها اگر عنصری مانند $x\in X$ موجود باشد به‌طوری که $d(x_n,x)\to 0$ اگر $n\to+\infty$. در این حال، می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty}x_n=x$.

$p(b)-$کوشی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر $d(x_n,x_m)\to 0$ وقتی $n,m\to+\infty$.

(c) فضای $p-$ متریک (X,d)، p-کامل نامیده می‌شود اگر هر دنباله $p-$کوشی در p-، همگرا باشد.

گزاره ۱.۹. در فضای $p-$متریک (X,d) که $\Omega(0)=0$ باشد آن‌گاه:

$p1$. هر دنباله $p-$ همگرا حد یکتا دارد.

$p2$. هر دنباله $p-$ همگرا $p-$ کوشی است.

$p3$. در حالت کلی، هر $p-$ متریک پیوسته نیست (مثال ۳ در [18] را ببینید).

به لم ساده زیر که در مورد دنباله‌های $p-$همگراست نیاز خواهیم داشت.

لم ۱.۱۰. [3] فرض کنید (X,d) یک فضای $p-$ متریک با تابع پیوسته اکیدا صعودی $\Omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$ باشد و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به ترتیب به x و y، $p-$همگرا باشند. در این‌صورت،

$$(\Omega^2)^{-1}(d(x,y))\le\liminf_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$$
$$\le\limsup_{n\to\infty}d(x_n,y_n)\le\Omega^2(d(x,y)).$$

به‌ویژه اگر $x=y$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=0$ به علاوه، برای هر

$$\Omega^{-1}(d(x,z))\le\liminf_{n\to\infty}d(x_n,z)$$
$$\le\limsup_{n\to\infty}d(x_n,z)\le\Omega(d(x,z)).$$

تعریف ۱.۱۱. فرض کنید f و g دو خودنگاشت روی مجموعه مرتب جزئ $(X,\preceq)$ باشند. نگاشت f یک نگاشت $g-$ صعودی ایزوتون ضعیف نامیده می‌شود اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم:

$$fx\preceq fgx\preceq fgfx$$

اخیرا ناشینه و همکاران [1] قضیه زیر را ثابت کردند.

قضیه ۱.۱۱. [1] فرض کنید $(X,\preceq,d)$ یک فضای متریک مرتب کامل باشد. فرض کنید تابع پیوسته $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ با شرط $\psi(t)<t$ برای هر $t>0$ و $\psi(0)=0$ موجود باشد و $f,g:X\to X$ دو نگاشت باشند که برای هر دو عنصر مقایسه‌پذیر $x,y\in X$ داشته باشیم:

$$d(fx,gy)\le \max\left\{\begin{array}{l}\psi(d(x,y)),\psi(d(x,fx)),\psi(d(y,gy)),\\ \psi(\frac{d(x,gy)+d(y,fx)}{2})\end{array}\right\}$$

هم‌چنین، فرض کنید f نگاشتی $g-$صعودی ایزوتون ضعیف و یکی از نگاشت‌های f یا g پیوسته باشد. آن‌گاه، f و g یک نقطه ثابت مشترک خواهند داشت.

در [2]، روشن و همکاران چند قضیه نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های $g-$صعودی ایزوتون ضعیف در چارچوب فضاهای $b-$متریک مرتب ارائه کردند. نتایج به‌دست آمده توسط آن‌ها به وسیله ناشینه و همکاران را [1]در چارچوب فضاهای متریک مرتب به رسته فضاهای $b-$متریک مرتب تعمیم داده شد.

۲- نتایج اصلی

فرض کنید $(X,\preceq,d)$ یک فضای $p-$ متریک مرتب باشد و $f,g:X\to X$ دو نگاشت باشند. در این مقاله فرض می‌کنیم $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ یک تابع پیوسته صعودی باشد که $\psi(t)<t$ برای هر $t>0$ و $\psi(0)=0$ فرض می‌کنیم

$$M_{\Omega}(x,y)=\max\left\{\begin{array}{l}\psi(d(x,y)),\psi(d(x,fx)),\psi(d(y,gy)),\\ \psi(\frac{\Omega^{-1}[d(x,gy)+d(y,fx)]}{2})\end{array}\right\}.$$

قضیه ۲.۱. فرض کنید $(X,\preceq,d)$ یک فضای $p-$ متریک کامل مرتب جزئی باشد و $f,g:X\to X$ دو نگاشت باشند به‌طوری که f یک نگاشت $g-$صعودی ایزوتون ضعیف است. برای هر دو عنصر مقایسه‌پذیر $x,y\in X$، داشته باشیم

$$\Omega^4(d(fx,gy))\le M_{\Omega}(x,y) \qquad (۱.۲)$$

اگر یکی از نگاشت‌های f یا g پیوسته باشد آن‌گاه، زوج (f,g) دارای یک نقطه ثابت مشترک مانند z در X می‌باشد. به‌علاوه، مجموعه نقاط ثابت مشترک نگاشت‌های f و g خوش‌ترتیب است اگر و تنهااگر f و g یک و فقط یک نقطه ثابت مشترک داشته باشند.

فرض کنید x_0 یک نقطه دلخواه از X باشد. عناصر $x_1\in X$ و $x_2\in X$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $fx_0=x_1$ ، $gx_1=x_2$, با ادامه این روش دنباله $\{x_n\}$ تعریف شده با ضابطه زیررا می‌سازیم.

$$x_{2n+1}=fx_{2n}$$

و

$$x_{2n+2}=gx_{2n+1}$$

چون f نگاشتی $g-$ صعودی ایزوتون ضعیف است، لذا،

$$x_1=fx_0\preceq gfx_0=gx_1=x_2\preceq fgfx_0=fx_2=x_3.$$

با تکرار این روند برای هر $n\ge 1$ نتیجه می‌شود که،

$$x_n\preceq x_{n+1}.$$

برهان را در سه مرحله به طریق زیر کامل می‌کنیم.

گام I. نشان می‌دهیم که $\lim_{k\to\infty}d(x_k,x_{k+1})=0$.

فرض کنید $d_k=d(x_k,x_{k+1})$ اگر برای یک اندیس k_0 داشته باشیم $d_{k_0}=0$، آن‌گاه، $x_k=x_{k0+1}$ در حالتی که $k_0=2n$، از $x_{2n}=x_{2n+1}$ نتیجه می‌شود که $x_{2n+1}=x_{2n+2}$ در واقع،

$$\begin{aligned}&\Omega^4(d(x_{2n+1},x_{2n+2}))=\\&\Omega^4(d(fx_{2n},gx_{2n+1}))\le M_{\Omega}(x_{2n},x_{2n+1}),\end{aligned} \qquad (۲.۲)$$

که در آن

$$\begin{aligned}&M_{\Omega}(x_{2n},x_{2n+1})\\&=\max\{\psi(d(x_{2n},x_{2n+1})),\\&\psi(d(x_{2n},fx_{2n})),\psi(d(x_{2n+1},gx_{2n+1})),\\&\psi(\frac{\Omega^{-1}[d(x_{2n},gx_{2n+1})+d(x_{2n+1},fx_{2n})]}{2})\}\end{aligned}$$

$$= \max\{\psi(d(x_{2n}, x_{2n+1})), \psi(d(x_{2n}, x_{2n+1})), \psi(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})), \psi(\frac{\Omega^{-1}[d(x_{2n}, x_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+1})]}{2})\}$$
$$= \max\{0, 0, \psi(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})), \psi(\frac{\Omega^{-1}[d(x_{2n}, x_{2n+2})]}{2})\}$$
$$\preceq \max\{\psi(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})), \psi(\frac{d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{2})\}.$$

اگر $M_\Omega(x_{2n}, x_{2n+1}) \le \psi(d(x_{2n+1}, x_{2n+2}))$، آن‌گاه، با استفاده از نامساوی (2.2)، نتیجه می‌شود که

$$\Omega^4(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \le \psi (d(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \le d(x_{2n+1}, x_{2n+2}).$$

از طرفی،

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le \Omega^4(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \le \psi(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \le d(x_{2n+1}, x_{2n+2}),$$

که نتیجه می‌دهد که

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) = \Omega^4(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})),$$

و لذا

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) = 0$$

اگر $M_\Omega(x_{2n}, x_{2n+1}) \le \psi(\frac{d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{2})$ مجددا با استفاده از نامساوی (۲.۲)، نتیجه می‌شود که

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le \Omega^4(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \le \psi(\frac{d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{2}) \le \frac{d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{2} \le d(x_{2n+1}, x_{2n+2}).$$

بنابراین، $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) = \Omega^4(d(x_{2n+1}, x_{2n+2}))$ یعنی، $x_{2n+1} = x_{2n+2}$.
به‌طور مشابه، اگر $k_0 = 2n+1$، آن‌گاه $x_{2n+1} = x_{2n+2}$ نتیجه می‌دهد که $x_{2n+2} = x_{2n+3}$ در نتیجه دنباله $\{x_k\}$ برای هر $k \ge k_0$ دنباله‌ای ثابت خواهد بود که در نتیجه

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, x_{k+1}) = 0.$$

فرض کنید برای هر k

$$d_k = d(x_k, x_{k+1}) > 0.$$

ادعا می‌کنیم که نامساوی زیر برای هر $k = 1, 2, 3, \cdots$ برقرار است.

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) \le d(x_k, x_{k+1}).$$

فرض کنید $k = 2n$ و برای یک اندیس $n \ge 0$ داشته باشیم:

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) > d(z_{2n}, z_{2n+1}) > 0. \quad (۵.۲)$$

در این صورت، چون $x_{2n} \preceq x_{2n+1}$، با استفاده از نامساوی (1.2) نتیجه می‌گیریم که

$$\Omega^4(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})) = \Omega^4(d(fx_{2n}, gx_{2n+1})) \preceq M_\Omega(x_{2n}, x_{2n+1}), \quad (۲۶)$$

که در آن گام II. در حال نشان می‌دهیم که $\{x_n\}$ یک دنباله $P-$ کوشی در X است لذا، پبرای $\varepsilon > 0$ $k \in$ وجود دارد به طوری که برای هر $m.n \ge k$، $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. به برهان خلف فرض می‌کنیم که $\{x_{2m(k)}\}$ و $\{x_{2n(k)}\}$ از $\{x_{2n}\}$ را به طوری که $n(k) > m(k) \ge k$ و

$$M_\Omega(x_{2n}, x_{2n+1}) = \max\{\psi(d(x_{2n}, x_{2n+1})), \psi(d(x_{2n}, fx_{2n})), \psi(d(x_{2n+1}, gx_{2n+1})), \psi(\frac{\Omega^{-1}[d(x_{2n}, gx_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, fx_{2n})]}{2})\}$$
$$= \max\{\psi(d(x_{2n}, x_{2n+1})), \psi(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})), \psi(\frac{\Omega^{-1}[d(x_{2n}, x_{2n+2})]}{2})\}.$$

باتوجه به نامساوی (4.2) داریم:

$$M_{\Omega}(x_{2n},x_{2n+1}) \le \max\{\psi(d(x_{2n+1},x_{2n+2})), \psi(\frac{d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})}{2})\}.$$

اگر

$$\psi(\frac{d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})}{2}) \le \psi(d(x_{2n+1},x_{2n+2}))$$

از نا مساوی (6.2)، نتیجه می‌شود که

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2}) \le \Omega^4(d(x_{2n+1},x_{2n+2})) \le \psi(d(x_{2n+1},x_{2n+2})) < d(x_{2n+1},x_{2n+2}), \quad (۸.۲)$$

و لذا $d(x_{2n+1},x_{2n+2})=0$، که یک تناقض است. اگر

$$\psi(d(x_{2n+1},x_{2n+2})) \le \psi(\frac{d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})}{2})،$$

آن‌گاه با توجه به نامساوی (6.2) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})}{2} &< d(x_{2n+1},x_{2n+2})\\ &\le \Omega^4(d(x_{2n+1},x_{2n+2}))\\ &\le \psi(\frac{d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})}{2})\\ &< \frac{d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})}{2},\end{aligned} \quad (۹.۲)$$

که نتیجه می‌دهد که

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) = d(x_{2n+1},x_{2n+2})$$

که به وضوح یک تناقض است. بنابراین، نامساوی (5.2) برقرار نیست، یعنی، برای هر n، $d(x_{2n+1},x_{2n+2}) \le d(x_{2n},x_{2n+1})$. لذا، برای هر $k=2n$ نامساوی (4.2) برقرار است.
به طور مشابه می‌توان نشان داد که

$$d(x_{2n+2},x_{2n+3}) \le d(x_{2n+1},x_{2n+2}).$$

بنابراین، $\{d(x_k,x_{k+1})\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی نامنفی است. لذا، عددی حقیقی مانند $r \ge 0$ وجو دارد به طوری که

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k,x_{k+1}) = r. \quad (۱۱.۲)$$

فرض کنید $r>0$. با توجه به نامساوی (7.2)، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}M_{\Omega}(x_{2n},x_{2n+1}) &< \max\{d(x_{2n},x_{2n+1}), d(x_{2n+1},x_{2n+2}), \frac{\Omega^{-1}[d(x_{2n},x_{2n+2})]}{2}\}\\ &\le \max\{d(x_{2n},x_{2n+1}), d(x_{2n+1},x_{2n+2}), \frac{d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})}{2}\}.\end{aligned} \quad (۱۲.۲)$$

حال، در نامساوی (12.2)، با گرفتن حد بالا زمانی که $n\to\infty$، نتیجه می‌گیریم که

$$\limsup_{n\to\infty} M_{\Omega}(x_{2n},x_{2n+1}) \le r \quad (۱۳.۲)$$

با گرفتن حد بالا در نامساوی (6.2) و با استفاده از (13.2)، نتیجه می‌شود که $r \le \Omega^4(r) \le r$.
لذا، $\Omega(r)=r$، که با فرض $r>0$ در تناقض است. بنابراین،

$$r = \lim_{k\to\infty} d(x_k,x_{k+1}) = 0. \quad (۱۴.۲)$$

$$d(x_{2m(k)},x_{2n(k)}) \ge \varepsilon, \quad (۱۵.۲)$$

و $n(k)$ کوچک ترین اندیسی است که نامساوی (15.2) برقرار است؛ یعنی،

$$d(x_{2m(k)},x_{2n(k)-1}) < \varepsilon. \quad (۱۶.۲)$$

با استفاده از نا مساوی مثلثی و نامساوی‌های (15.2) و (16.2)، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\varepsilon &\le d(x_{2m(k)},x_{2n(k)})\\ &\le \Omega[d(x_{2m(k)},x_{2m(k)+1})+d(x_{2m(k)+1},x_{2n(k)})]\\ &\le \Omega[d(x_{2m(k)},x_{2m(k)+1})\\ &\Omega[d(x_{2m(k)+1},x_{2n(k)+2})+d(x_{2n(k)+2},x_{2n(k)})]].\end{aligned} \quad (۱۷.۲)$$

با گرفتن حد بالا زمانی که $k \to \infty$ در (17.2) و با استفاده از (14.2) نتیجه می‌گیریم که

$$(\Omega^{-1})^2(\varepsilon) \le \limsup_{k\to\infty} d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)+2}). \quad (۱۸.۲)$$

مجددا، با استفاده از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1}) \le \Omega[d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) + d(x_{2n(k)-1}, x_{2n(k)+1})]. \quad (۱۹.۲)$$

باحد گرفتن زمانی که $k \to \infty$ در نا مساوی (19.2) و با استفاده از نا مساوی‌های (14.2) و (18.2) می‌بینیم که

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1}) \le \Omega(\varepsilon). \quad (۲۰.۲)$$

مجددا، بااستفاده از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+2}) \le \Omega[d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) + d(x_{2n(k)-1}, x_{2n(k)+2})]. \quad (۲۱.۲)$$

اگر نا مساوی بالا $k \to \infty$، نتیجه می‌شود که

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+2}) \le \Omega(\varepsilon).$$

سرانجام،

$$d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)+1}) \le \Omega[d(x_{2m(k)+1}, x_{2m(k)}) + d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1})]. \quad (۲۲.۲)$$

با حد گرفتن زمانی که $k \to \infty$ با استفاده از (18.2)، نتیجه می‌شود که

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)+1}) \le \Omega^2(\varepsilon).$$

چون $n(k) > m(k)$ لذا، $x_{m(k)} \preceq x_{n(k)}$ بنابراین، با توجه به (1.2)، می‌بینیم که

$$s^3 d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)+2}) = s^3 d(fx_{2m(k)}, gx_{2n(k)+1})) \le M_\Omega(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1}),$$

که در آن

$$\begin{aligned} M_\Omega(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1}) &= \max\{\psi(d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1})), \psi(d(x_{2m(k)}, fx_{2m(k)})), \psi(d(x_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1})), \\ &\quad \psi(\frac{\Omega^{-1}[d(x_{2m(k)}, gx_{2n(k)+1}) + d(x_{2n(k)+1}, fx_{2m(k)})]}{2})\} \\ &= \max\{\psi(d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1})), \psi(d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1})), \psi(d(x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+2})), \\ &\quad \psi(\frac{\Omega^{-1}[d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+2}) + d(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)+1})]}{2})\} \\ &< \max\{d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1}), d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1}), d(x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+2}), \\ &\quad \frac{\Omega^{-1}[d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+2}) + d(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)+1})]}{2}\}. \end{aligned}$$

با گرفتن حد بالای زمانی که $k \to \infty$ با استفاده از نامساوی‌های (142)، (18.2)، (220.2)، (21.2) و (22.2)، نتیجه می‌گیریم که

$$\limsup_{k\to\infty} M_\Omega(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1}) \le \max\{\Omega(\varepsilon), 0, 0, \frac{\Omega(\varepsilon) + \Omega^2(\varepsilon)}{2}\} \le \Omega^2(\varepsilon).$$

با گرفتن حد بالا زمانی که $k \to \infty$ در نامساوی (22.2)، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\Omega^2(\varepsilon) &= \Omega^4((\Omega^{-1})^2(\varepsilon))\\ &\le \Omega^4[\limsup_{k\to\infty} d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)+2})]\\ &\le \limsup_{k\to\infty} M_\Omega(x_{2m(k)}, x_{2n(k)+1})\\ &\le \Omega^2(\varepsilon),\end{aligned} \qquad (۲۳.۲)$$

لذا، $\Omega^2(\varepsilon) = \frac{\Omega(\varepsilon)+\Omega^2(\varepsilon)}{2}$، که با فرض $\varepsilon > 0$ در تناقض است. بنابراین، $\{x_n\}$ یک دنباله $p-$کوشی است.

گام III. نشان می‌دهد که f و g یک نقطه ثابت مشترک دارند.

چون $\{x_n\}$ یک دنباله $p-$کوشی در فضای $p-$ متریک کامل X می‌باشد، لذا، عنصری مانند $x \in X$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{2n+1}, x) = \lim_{n\to\infty} d(fx_{2n}, x) = 0 \qquad (۲۴.۲)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{2n+2}, x) = \lim_{n\to\infty} d(gx_{2n+1}, x) = 0. \qquad (۲۵.۲)$$

با توجه به نامساوی مثلثی می‌بینیم که

$$\begin{aligned}&d(fx, x) \le\\ &\Omega[d(fx, fx_{2n}) + d(fx_{2n}, x)].\end{aligned} \qquad (۲۶.۲)$$

فرض کنید f پیوسته است. اگر درنامساوی (27.2) $n \to \infty$، با توجه به نامساوی‌های (24.2) و (25.2) می‌بینیم که

$$\begin{aligned}&d(fx, x) \le \Omega[\lim_{n\to\infty} d(fx, fx_{2n})\\ &+ \lim_{n\to\infty} d(fx_{2n}, x)] = 0.\end{aligned} \qquad (۲۷.۲)$$

فرض کنید $d(z,gz) > 0$. چون z و gz مقایسه پذیرند، با توجه به نامساوی (1.2) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}&\Omega^4(d(z, gz)) =\\ &\Omega^4(d(fz, gz)) \le M_\Omega(z, z),\end{aligned} \qquad (۲۸.۲)$$

که در آن

$$\begin{aligned}&M_\Omega(z, z) = \max\\ &\left\{\begin{matrix}\psi(d(z,z)), \psi(d(z,fz)), \psi(d(z,gz)),\\ \psi(\frac{\Omega^{-1}[d(z,gz) + d(z,fz)]}{2})\end{matrix}\right\}\\ &< d(z, gz).\end{aligned}$$

بنابراین، نامساوی (28.2) نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}&d(z, gz) \le \Omega^4(d(z, gz)) =\\ &\Omega^4(d(fz, gz)) < d(z, gz),\end{aligned}$$

که یک تناقض است. لذا، $d(z, gz) = 0$.

به طور مشابه، اگر g پیوسته باشد، نتیجه مورد انتظار به دست خواهد آمد.

در قضیه زیر، فرض پیوستگی یکی از نگاشت‌های f و g را نادیده می‌گیریم.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $(X, \preceq, d)$ یک فضای $p-$ متریک کامل مرتب جزئی باشد و $f, g : X \to X$، دو عنصر مقایسه پذیر $x, y \in X$، داشته باشیم:

$$\Omega^2(d(fx, gy)) \le M_\Omega(x, y). \qquad (۲۹.۲)$$

زوج (f, g) دارای یک نقطه ثابت مشترک مانند z در X است. به علاوه، مجموعه نقاط ثابت مشترک نگاشت‌های f و g خوش ترتیب است اگر و تنها اگر f و g دارای یک و فقط یک نقطه ثابت مشترک باشند.

اثبات. با مرور اثبات قضیه 1.2، عنصری مانند $x \in X$ موجود است به طوری که:

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0. \qquad (۳۰.۲)$$

نشان می‌دهیم که x یک نقطه ثابت مشترک نگاشت‌های f و g خواهد بود.

چون $x_{2n+1} \to x$، زمانی که $n \to \infty$، با توجه به منظم بودن X، $x_{2n+1} \preceq x$ لذا، با توجه به نامساوی (29.2)، می‌بینیم که

که در آن $\Omega^4(d(fx, gx_{2n+1})) \le M_\Omega(x, x_{2n+1})$,

$$M_\Omega(x, x_{2n+1}) = \max\{\psi(d(x, x_{2n+1})), \psi(d(x, fx)), \psi(d(x_{2n+1}, gx_{2n+1})), \psi(\frac{\Omega^{-1}[d(x, gx_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, fx)]}{2})\}. \quad (۳۱.۲)$$

با گذفتن حد نامساوی (31.2) زمانی که $n \to \infty$ و با استفاده از لم 10.1، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}
d(x, fx) &\le \Omega(d(fx, x)) \\
&= \Omega^2(\Omega^{-1}(d(fx, x))) \\
&\le \Omega^2(\limsup_{n\to\infty} d(fx, gx_{2n+1})) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} M_\Omega(x, x_{2n+1}) \\
&= \max\{\limsup_{x\to\infty} d(x, x_{2n+1}), \\
&\limsup_{n\to\infty} d(x, fx), \\
&\limsup_{x\to\infty} d(x_{2n+1}, gx_{2n+1}), \\
&\limsup_{n\to\infty} \frac{\Omega^{-1}[d(x, gx_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, fx)]}{2}\} \\
&\le \max\{0, d(x, fx), 0, \frac{d(x, fx)}{2}\} \\
&= d(x, fx),
\end{aligned}$$

لذا، $fx = x$.
به طور مشابه، می‌توان نشان داد که x یک نقطه ثابت نگاشت g است.
با انتخاب $f = g$ در قضیه‌های بالا نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه ۲.۳. فرض کنید $(X, \preceq, d)$ یک فضای $p-$ متریک کامل مرتب جزئی باشد و $f : X \to X$ نگاشت صعودی ایزتون ضعیف باشد. فرض کنید برای هر دو عنصر مقایسه‌پذیر $x, y \in X$، داشته باشیم:

$$\Omega^4(d(fx, fy)) \le M_\Omega(x, y).$$

در اینجا

$$M_\Omega(x, y) = \max \begin{Bmatrix} \psi(d(x, y)), \psi(d(x, fx)), \psi(d(y, fy)), \\ \psi(\frac{\Omega^{-1}[d(x, fy) + d(y, fx)]}{2}) \end{Bmatrix}.$$

در این صورت، f دارای یک نقطه ثابت z در X است اگر، (1). f پیوسته باشد، یا (2). X منظم باشد. به علاوه، مجموعه نقاط ثابت نگاشت f خوش ترتیب است اگر و تنها اگر f یک وفقط یک نقطه ثابت داشته باشد.

مثال۲. ۴. فرض کنید $X = \{0,1,2,3\}$ مجهز به را بطه تریب $\preceq$ تعریف شده به صورت

$$\preceq := \{(0,0), (1,0), (1,1), (1,2), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

باشد. متر $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ را با ضابطه اگر

$$d(x, y) = \begin{cases} \circ, & x = y, \\ x + y, & \ne y \end{cases}$$

تعریف می کنیم و فرض می‌کنیم

$$\rho(x, y) = \sinh d(x, y).$$

به سهولت می‌توان نشان داد که (X, ρ) یک فضای $p-$ متریک کامل با تابع $\Omega(t) = t\cosh t$ می‌باشدکه $\Omega^2(t) = t\cosh t[\cosh(t\cosh t)]$. خود نگاشت f را به صورت

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

در نظربگیرید. بنابراین

$$f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مشاهده می‌شود که f یک نگاشت صعودی ایزوتون ضعیف است. و $(X,\preceq,p)$ یک فضای منظم است.
تابع $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ را با ضابطه $\psi(t)=t-\sinh^{-1}t$ تعریف می‌کنیم. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. $(x,y)=(3,1)$ آن‌گاه،

$$\begin{aligned}&\Omega^2(\rho(fx,fy))\\&=\sinh(f\ 3+f\ 1)\cosh(\sinh(f\ 3+f\ 1))\\&[\cosh[\sinh(f\ 3+f\ 1)\cosh(\sinh(f\ 3+f\ 1))]]\\&=\sinh(1)\cosh(\sinh(1))\\&[\cosh[\sinh(1)\cosh(\sinh(1))]]\end{aligned}$$

۲. $(x,y)=(3,2)$. آن‌گاه،

$$\begin{aligned}&\Omega^2(\rho(fx,fy))\\&=0\cosh(0))[\cosh[0\cosh(0)]]\\&=0\\&=0\le 69.2032105778=\\&74.2032105778-\ln(74.2032105778+\\&\sqrt{1+74.2032105778^2})\\&\le\psi(74.2032105778)\\&=\psi(\sinh 5)\\&=\psi(d(x,y))\le M(x,y).\end{aligned}$$

بنابراین تمام شرایط نتیجه 3.2 برقرارند و لذا f باید دارای یک نقطه ثابت باشد. در واقع، ۵ نقطه ثابت نگاشت f است.

۳. نتایج نقطه تناوبی

فرض کنید $F(f)=\{x\in X: fx=x\}$ مجموعه نقاط ثابت نگاشت f باشد. به وضوح، یک نقطه ثابت نگاشت f برای هر $n\in\mathbb{N}$ یک نقطه ثابت نگاشت f^n نیز هست، یعنی، $F(f)\subset F(f^n)$. با این وجود، عکس این موضوع همواره برقرار نیست. برای مثال، نگاشت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده با ضابطه $fx=\frac{1}{2}-x$ دارای نقطه ثابت یکتای $\frac{1}{4}$ می‌باشد، اما هر $x\in\mathbb{R}$ یک نقطه ثابت نگاشت f^2 است. اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، $F(f)=F(f^n)$، برای جزئیات بیشتر، خواننده را به منبع [5] ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۳.۱. فرض کنید X و f همان نگاشت‌های اشاره شده در گزاره 3.2 باشند. در این صورت، f دارای خاصیت نقطه ثابت است.

اثبات. با توجه به نتیجه ۲.۳، $F(f)\neq\emptyset$. فرض کنید برای یک $n>1$، $u\in F(f^n)$. نشان می‌دهیم که $u=fu$.

به برهان خلف فرض کنید $u\neq fu$، یعنی $d(u,fu)>0$.

در این صورت، چون f یک نگاشت صعودی ایزوتون ضعیف است، لذا، $f^{n-1}u\preceq f^nu$ با استفاده از نامساوی انقباضی (1.2)، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}&\Omega^4[d(fu,u)]=\\&\Omega^4[d(f^{n+1}u,f^nu)]=\\&\Omega^4[d(ff^nu,ff^{n-1}u)]\le M_\Omega(f^nu,f^{n-1}u),\end{aligned}\tag{۱.۳}$$

که در آن

$$\begin{aligned}&M_\Omega(f^nu,f^{n-1}u)<\max\{d(f^nu,f^{n-1}u),\\&d(f^nu,f^{n+1}u),d(f^{n-1}u,f^nu),\\&\frac{\Omega^{-1}[d(f^nu,f^nu)+d(f^{n-1}u,f^{n+1}u)]}{2}\}\\&\le\max\{d(f^nu,f^{n-1}u),d(f^nu,f^{n+1}u),\\&\frac{d(f^{n-1}u,f^nu)+d(f^nu,f^{n+1}u)}{2}\}\\&=\max\{d(f^nu,f^{n-1}u),d(f^nu,f^{n+1}u)\}.\end{aligned}$$

اگر $M_\Omega(f^nu,f^{n-1}u)=d(f^nu,f^{n+1}u)$، آن‌گاه با توجه به نامساوی (2.3)، داریم:

$$\begin{aligned}&\Omega^4[d(u,fu)]=\\&\Omega^4[d(f^nu,f^{n+1}u)]<d(f^nu,f^{n+1}u),\end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین،

$$\Omega^4[d(fu,u)] = \Omega^4[d(f^{n+1}u, f^n u)] < d(f^n u, f^{n-1}u).$$

با شروع از $d(f^{n-1}u, f^n u)$ و تکرار روند بالا، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} d(u,fu) &= d(f^{n+1}u, f^n u) \\ &< (\Omega^4)^{-1}[d(f^n u, f^{n-1}u)] \\ &< (\Omega^4)^{-2}[d(f^{n-2}u, f^{n-1}u)] \\ &\dots \\ &< ((\Omega^4)^{-1})^n[d(u,fu)] \\ &\le d(u,fu), \end{aligned}$$

که با توجه به خواص تابع Ωنتیجه می‌دهد که برای هر $0 \le i \le n-1$، $d(f^{n-(i+1)}u, f^{n-(i)}u) = 0$. حال، با انتخاب $i = n-1$ می‌بینیم که $u = fu$.

فهرست منابع

[1]. H. K. Nashine, B. Samet and C. Vetro, Monotone generalized nonlinear contractions and fixed point theorems in ordered metric spaces, Math. Comput. Modelling, 54 (2011), 712-720

[2]. J.R. Roshana, V. Parvaneh and Z. Kadelburg, Common fixed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered b-metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl., 7 (2014), 229--245.

[3]. V. Parvaneh, Fixed points of $(\psi,\varphi)_{\omega}$ -contractive mappings in ordered p -metric spaces, submitted.

[4]. M. Abbas, T. Nazir and S. Radenovic, Common fixed points of four maps in partially ordered metric spaces, Appl. Math. Letter. 24 (2011), 1520-1526.

[5]. M. Abbas, V. Parvaneh and A. Razani, Periodic point of T-Ciric generalized contraction mappings in ordered metric spaces. Georgian Math. J. 19 (2012, No.4, 597-610.

[6]. R. P. Agarwal, M. A. El-Gebeily and D. O'Regan, generalized contractions in partially ordered metric spaces, Applicable Analysis, 87 (1) (2008), 109-116.

[7]. A. Aghajani, M. Abbas and J.R. Roshan, Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b -metric spaces, Mathematica Slovaca, Accepted.

[8]. A. Aghajani, S. Radenovic, J.R. Roshan, Common fixed point results for four mappings satisfying almost generalized (ST) -contractive condition in partially ordered metric spaces, Appl. Math. Comput, 218 (2012), 5665--5670.

[9]. M. Akkouchi, Common fixed point theorems for two selfmappings of a b -metric space under an implicit relation, Hacettepe journalof Mathematics Stat, 40 (6) (2011), 805-810.

[10]. H. Aydi, M. Bota, E. Karapinar and S. Mitrovic, A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions in b -metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2012: 88. 2012.

[11]. M. Boriceanu, Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b -metrics, Studia Univ., Babes-Bolyai, Mathematica, Volume LIV, Number 3, (2009).

[12]. M. Boriceanu, Strict fixed point theorems for multivalued operators in b -metric spaces, Int. J. Modern Math., 4 (3) (2009), 285-301.

[13]. M. Boriceanu, M. Bota and A. Petrusel, Multivalued fractals in b -metric spaces, Cent. Eur. J. Math., 8 (2) (2010), 367-377.

[14]. M. Bota, A. Molnar and C. Varga, On Ekeland's variational principle in b -metric spaces, Fixed Point Theory, 12 (2) (2011), 21--28.

[15]. S. Czerwik, Nonlinear set-valued contraction mappings in b -metric spaces, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 46 (2) [1]. (1998), 263-276.

[16]. J. Esmaily, S. M. Vaezpour and B.E.. Rhoades, Coincidence point theorem for generalized weakly contractions in ordered metric spaces, Appl. Math. Comput., 219 (2012), 1536-1548.

to ordinary differential equations, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 23 (2007), 2205-2212.

[26]. M. O. Olatinwo, Some results on multi-valued weakly jungck mappings in b -metric space, Cent. Eur. J. Math, 6 (4) (2008), 610-621.

[27]. M. Pacurar, Sequences of almost contractions and fixed points in b -metric spaces, Analele Universitatii de Vest, Timisoara Seria Matematica Informatica XLVIII, 3 (2010), 125-137.

[28]. S. Radenovic and Z. Kadelburg, Generalized weak contractions in partially ordered metric spaces, Compu. Math. Appl, 60 (2010), 1776-1783.

[29]. A. C. M. Ran and M. C. B. Reurings, A fixed point theorem in partially ordered sets and some application to matrix equations, Proc. Amer. Math. Soc., 132 (2004), 1435-1443.

[30]. A Razani, H Hosseinzadeh, Triple fixed point theorems on FLM algebras, Fixed Point Theory and Applications, 1(2013),16.

[31]. A.Razani. Results in Fixed Point Theory, Andisheh Zarin publisher, Qazvin, August 2010.

[32]. A. Razani, R. Moradi. Fixed point theory in modular space, Saieh Ghostar Publisher, Qazvin, April 2006.

[17]. J. Harjani and K. Sadarangani, Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations, Nonlinear Anal., 72 (3-4) (2010), 1188-1197.

[18]. H. Hosseinzadeh, Fixed point theorems on soft metric spaces, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 19(2)(2017),1625-647.

[19]. H Hosseinzadeh, A Jabbari, A Razani, Fixed-Point Theorems and Common Fixed-Point Theorems on Spaces Equipped With Vector-Valued Metrics, Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal, 65(5)(2013), 734-740

[20]. Hussain and M. H. Shah, KKM mappings in cone b -metric spaces, Comput. Math. Appl, 62 (2011), 1677-1684.

[21]. M. A. Khamsi and N. Hussain, KKM mappings in metric type spaces, Nonlinear Anal., 73 (9) (2010), 3123-3129.

[22]. H. K. Nashine and B. Samet, Fixed point results for mappings satisfying (ψ, φ)-weakly contractive condition in partially ordered metric spaces, Nonlinear Anal., 74 (2011), 2201-2209.

[23]. J. J. Nieto and R. R. Lopez, Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Order 22 (2005), 223-239.

[24]. J. J. Nieto, R. L. Pouso and R. Rodriguez-Lopez, Fixed point theorems in ordered abstract sets, Proc. Amer. Math. Soc., 135 (2007), 2505-2517.

[25]. J. J. Nieto and R. Rodriguez-Lopez, Existence and uniqueness of fixed points in partially ordered sets and applications