دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و چهارم، مهر و آبان ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

# بررسی قاب‌های پیوسته با تبدیل به قاب‌های گسسته

ریحانه رئیسی طوسی[۱*]، رجبعلی کامیابی گل[۱]، حسین عوض زاده[۱]، عاطفه رازقندی[۲]

(۱) گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
(۲) گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۲۲   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۷/۱۶

چکیده

در این مقاله به بررسی پایه‌های ریس پیوسته می‌پردازیم و روابط آن‌ها با پایه‌های متعامد پیوسته را بیان می‌کنیم. نشان می‌دهیم که یک تناظر بین قاب‌های پیوسته و گسسته وجود دارد. به‌عنوان کاربرد، می‌توان چندین مسأله در قاب‌های پیوسته را به کمک قاب‌های گسسته حل کرد. به‌ویژه دوگان قاب‌های پیوسته را به کمک قاب گسسته متناظرش مشخص می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** پایه ریس پیوسته، پایه متعامد یکه پیوسته، پایه ریس گسسته، قاب پیوسته.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: raisi@um.ac.ir

**۱- مقدمه**

قاب‌ها ابزارهای کارامدی برای بسیاری از مسائل کاربردی مانند انتقال داده، پردازش سیگنال و تصویر، تئوری عملگر، آنالیز هارمونیک، فیلتر بانک‌ها، ژئوفیزیک و ... می‌باشند. برای آشنایی بیشتر با تئوری قاب‌ها و کاربرد آنها مراجع [۸، ۱۰] را ببینید. فرض کنید $\mathrm{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. مجموعه $(f_i)_{i\in I}$ یک قاب (گسسته) برای $\mathrm{H}$ نامیده می‌شود، هرگاه $A,B>0$ وجود داشته باشند به‌طوری که برای هر $f\in H$:

$$A\|f\|^2 \le \sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^2 \le B\|f\|^2$$

ثابت‌های $A$ و $B$ را به ترتیب کران‌های بالا و پایین قاب می‌نامیم. تاکنون تعمیم‌های متنوعی از قاب‌ها مانند قاب‌های زیر فضایی، شبه قاب‌ها و قاب‌های بازیابنده فاز [۱] ارائه شده است.

در سال ۲۰۰۶ سان نوعی از قاب را که $g$ قاب سان نامیده می‌شود، معرفی کرد. این قاب تعمیمی از قاب‌های فوق الذکر به جز قاب‌های پیوسته (که توسط علی و همکارانش ارائه شد [۱]) می‌باشد.

برخی از مطالعات صورت گرفته در سال‌های اخیر $g$ قاب‌های سان و قاب‌های پیوسته را تعمیم داده‌اند [۸].

از این رو داشتن یک قاب که همه‌ی قاب‌های شناخته شده را تعمیم دهد بسیار مفید به نظر می‌رسد، به‌خصوص اگر چنین قابی در بررسی روابط بین قاب‌های شناخته شده کمک کند. در حقیقت با اطلاع از چنین روابط و انتقال اطلاعات از قاب‌های دیگر می‌توان به حل مسائل کمک کرد. در مرجع [۵] قاب جدیدی که $g$ قاب نامیده می‌شود، معرفی شده است و همه‌ی قاب‌های فوق الذکر را تعمیم می‌دهد. در حقیقت نشان داده شده که رابطه‌ی نزدیکی بین $g$ قاب‌های ذکر شده وجود دارد. هدف این مقاله تعیین وجود ارتباط بین قاب‌های پیوسته و گسسته می‌باشد. به این منظور در ابتدا پایه‌های ریس پیوسته را بیان می‌کنیم و چندین نتیجه که در مجموعه گسسته برقرار است را برای مجموعه پیوسته بیان می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن این ایده ارتباط بین قاب‌های پیوسته و گسسته را بیان می‌کنیم.

همچنین با بیان چند مثال نشان می‌دهیم چندین مسأله از حالت پیوسته را که بررسی آن برای قاب‌های پیوسته مشکل است با انتقال به مجموعه قاب‌های گسسته، راحت‌تر می‌توانیم حل کنیم. به کمک ارتباط بین قاب‌های گسسته و پیوسته قاب‌های دقیق پیوسته را شناسایی می‌کنیم و در نهایت دوگان قاب‌های پیوسته را با انتقال به مجموعه قاب‌های گسسته مشخص می‌کنیم. در ابتدا به یادآوری برخی تعاریف و مفاهیم اولیه می‌پردازیم.

فرض کنید $(\Omega,\mu)$ یک فضای اندازه باشد و $\mathrm{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. نگاشت $F:(\Omega,\mu)\to H$ یک قاب پیوسته با کران‌های $A$ و $B$ نامیده می‌شود هرگاه $\omega\to<f,F(\omega)>$ برای هر $f\in H$ یک تابع اندازه‌پذیر روی $\Omega$ باشد

$$A\|f\|^2 \le \int_{\Omega}|<f,F(\omega)>|^2\,d\mu(\omega) \le B\|f\|^2$$

هرگاه نامساوی سمت راست برقرار باشد نگاشت $F$ یک دنباله بسل پیوسته نامیده می‌شود. عملگر $T_F:H\to L^2(\Omega,\mu)$ که به‌صورت

$$T_F f(\omega) = <f,F(\omega)>,\ f\in H,\ \omega\in\Omega$$

تعریف می‌شود، عملگر آنالیز نامیده می‌شود و یک عملگر خطی کراندار است. این عملگر یک به یک و از پایین کراندار است اگر و تنها اگر $F$ یک قاب پیوسته باشد. در حالت کلی اگر یک قاب $K$ در رابطه

$$f=\int_{\Omega}<f,F(\omega)>K(\omega)\,d\nu(\omega),\ f\in H$$

صدق کند به عبارت دیگر $T_K T_F^* = I_H$، آنگاه $K$ یک دوگان غیر کانونی از $F$ نامیده می‌شود. قاب پیوسته $S^{-1}F$ دوگان استاندارد $F$ است که $S$ عملگر قاب $F$ می‌باشد که به‌صورت

$$Sf = \int_{\Omega} < f,\ F(\omega) > F(\omega)\, d\mu(\omega),\ f \in H$$

تعریف می‌شود.

فرض کنید $F : (\Omega, \mu) \to H$ یک قاب پیوسته باشد. اگر برای هر $f \in H$

$$\int_{\Omega} |< f, F(\omega) >|^2 d\mu(\omega) = \|f\|^2$$

و برای هر $\varphi \in L^2(\Omega, \mu)$

$$\left\| \int_{\Omega} \varphi(\omega) F(\omega) d\mu(\omega) \right\|^2 = \|\varphi\|^2$$

آنگاه $F$ را پایه متعامد یکه پیوسته می‌نامند. همچنین $F$ یک پایه ریس پیوسته نامیده می‌شود، هرگاه $A, B > 0$ وجود داشته باشند که برای هر مجموعه اندازه پذیر $E \subset \Omega$ که $0 < \mu < \infty$ و $\varphi \in L^2(\Omega, \mu)$ داشته باشیم

$$A \int_E |\varphi(\omega)|^2 d\mu(\omega) \le \left\| \int_E \varphi(\omega) F(\omega) d\mu(\omega) \right\|^2 \le \quad B \int_E |\varphi(\omega)|^2 d\mu(\omega)$$

برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی قاب‌های پیوسته مراجع [۱،۲،۴] را ببینید. گزاره زیر که گزاره ۳.۱، از مرجع [۳] می‌باشد، شرایط لازم برای این که قاب پیوسته یک پایه ریس پیوسته یا یک پایه متعامد یکه پیوسته باشد را بیان می‌کند.

**گزاره ۱-۱:** اگر $F$ یک پایه ریس پیوسته باشد، آنگاه عملگر آنالیز $T_F$ پوشا است. اگر $F$ یک پایه متعامد یکه پیوسته باشد، آنگاه $T_F$ یکانی است.

در ادامه این مقاله در بخش ۲ رابطه بین پایه ریس پیوسته و پایه متعامد را مورد بررسی قرار می‌دهیم، که این روابط در مورد قاب‌های گسسته شناخته شده است. در بخش ۳ نشان می‌دهیم که قاب‌های پیوسته شبیه به قاب‌های گسسته عمل می‌کنند. با در نظر گرفتن این نکته قاب‌های پیوسته دقیق را به کمک پایه‌های ریس پیوسته شناسایی می‌کنیم و در نهایت نشان می‌دهیم که چگونه مسائل قاب‌های پیوسته را با تبدیل به قاب‌های گسسته می‌توان حل کرد. به ویژه می‌توان دوگان قاب‌های پیوسته را با کمک دوگان قاب‌های گسسته مشخص کرد.

## ۲- شناسایی پایه‌های ریس پیوسته

در این بخش به کمک عملگر آنالیز به شناسایی پایه‌های ریس پیوسته می‌پردازیم و نتایج اساسی برای پایه‌های ریس پیوسته بدست می‌آوریم. در سراسر این مقاله H یک فضای هیلبرت است.

فرض کنید $(f_i)_{i\in I}$ و $(g_i)_{i\in I}$ دو پایه ریس گسسته در H باشند و عملگر $T{:}H \to H$ به صورت $T(\sum_{i\in I} c_i f_i) = \sum_{i\in I} c_i g_i$ تعریف شود. در [۶] نشان داده شده است که $T$ یک عملگر کراندار و معکوس پذیر است. در اینجا نتیجه مشابهی را برای پایه ریس (و متعامد یکه) پیوسته اثبات می‌کنیم. در ابتدا تعریف تساوی ضعیف برای عملگرها را یادآوری می‌کنیم.

**تعریف ۲-۱:** فرض کنید $F, G : (\Omega, \mu) \to H$ دو قاب پیوسته باشند و $T{:}H \to H$ یک عملگر خطی کراندار باشد. اگر برای هر $f \in H$ و $\omega \in \Omega$

$$< f, TF(\omega) > = < f, G(\omega) >$$

در این صورت می‌گوییم به‌طور ضعیف $TF = G$.

**گزاره ۲-۲:** فرض کنید $F, G : (\Omega, \mu) \to H$ دو پایه ریس (متعامد یکه) پیوسته باشند. در این

صورت یک عملگر معکوس‌پذیر (یکانی) $\mathrm{T}:\mathrm{H}\rightarrow\mathrm{H}$ وجود دارد که به‌طور ضعیف $TF=G$.

**برهان:** با استفاده از گزاره ۱.۱، عملگرهای $T_F$ و $T_G$ و بنابراین الحاق معکوس آن‌ها، عملگرهایی کراندار و معکوس پذیر (یکانی) می‌باشند. کافیست $\mathrm{T}=\mathrm{T}_G^*(T_F^*)^{-1}$ قرار دهیم.□

مشابه قاب‌های گسسته به سادگی می‌توان بررسی کرد که تصویر یک پایه متعامد یکه پیوسته تحت یک عملگر یکانی یک پایه متعامد یکه پیوسته است. همچنین تصویر یک پایه ریس گسسته تحت یک عملگر کراندار معکوس پذیر، پایه ریس گسسته می‌باشد. در گزاره زیر نشان می‌دهیم که این نتیجه برای پایه ریس پیوسته نیز برقرار است.

**گزاره ۲-۳:** فرض کنید $F:(\Omega,\mu)\rightarrow H$ یک پایه ریس پیوسته باشد و $\mathrm{T}:\mathrm{H}\rightarrow\mathrm{H}$ یک عملگر معکوس پذیر کراندار باشد، آنگاه $TF$ یک پایه ریس پیوسته است.

**برهان:** فرض کنید $F$ یک پایه ریس پیوسته باشد. به سادگی می‌توان دید که $TF$ یک قاب پیوسته است. همچنین چون $T$ معکوس پذیر است، $C,D>0$ وجود دارند به‌طوری که

$$\left\|\int_E \varphi TF d\mu\right\|^2=\left\|T\int_E \varphi F d\mu\right\|^2\geq C\int_E |\varphi|^2 d\mu$$

به طور مشابه

$$\left\|\int_E \varphi TF d\mu\right\|^2\leq D\int_E |\varphi|^2 d\mu$$

بنابراین $TF$ یک پایه ریس پیوسته است.□

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که هر پایه ریس پیوسته تصویر (ضعیف) یک پایه متعامد یکه پیوسته تحت یک عملگر کراندار معکوس پذیر است.

**قضیه ۲-۴:** فرض کنید $G:(\Omega,\mu)\rightarrow H$ یک پایه ریس پیوسته باشد آنگاه یک پایه متعامد یکه پیوسته $F:(\Omega,\mu)\rightarrow H$ و یک عملگر کراندار معکوس پذیر $\mathrm{T}:\mathrm{H}\rightarrow\mathrm{H}$ وجود دارند که به‌طور ضعیف $TF=G$.

**برهان:** عملگر قاب $S$ را برای قاب $G$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $F=S^{-\frac{1}{2}}G$ و $T=S^{\frac{1}{2}}$. به کمک گزاره ۳.۲، $F$ یک پایه ریس پیوسته است. بنابراین به کمک گزاره ۱.۱، $T_F$ پوشا است به سادگی می‌توان دید که $\|T_F f\|^2=\|f\|^2$، به عبارت دیگر $T_F$ یک ایزومتری است. همچنین

$$\left\|\int_\Omega \varphi F d\mu\right\|^2=\|T_F^*\varphi\|^2=\|\varphi\|^2$$

بنابراین $F$ یک پایه متعامد یکه پیوسته است. به وضوح به‌طور ضعیف $TF=G$.□

با استفاده از گزاره ۳.۲ و قضیه ۴.۲، تعریف معادلی برای یک پایه ریس پیوسته به‌صورت زیر داریم.

فرض کنید $G:(\Omega,\mu)\rightarrow H$ یک قاب پیوسته باشد، اگر یک پایه متعامد یکه و یک عملگر کراندار معکوس پذیر $\mathrm{T}:\mathrm{H}\rightarrow\mathrm{H}$ وجود داشته باشند که به‌طور ضعیف $TF=G$، آنگاه $G$ را یک پایه ریس پیوسته می‌نامیم. گزاره زیر یک شرط کافی برای این که یک قاب پیوسته یک پایه ریس پیوسته باشد را نشان می‌دهد.

**گزاره ۲-۵:** فرض کنید $F:(\Omega,\mu)\rightarrow H$ یک قاب پیوسته باشد به‌طوری که $T_F$ پوشا باشد. آنگاه $F$ یک پایه ریس پیوسته است.

**برهان:** عملگر قاب $S$ از $F$ را در نظر می‌گیریم و $G=S^{-\frac{1}{2}}F$ قرار می‌دهیم. آنگاه $T_G=T_F S^{-\frac{1}{2}}$ و بنابراین $T_G$ یکانی است (می‌توان نشان داد که $\|T_G f\|^2=\|f\|^2$). همچنین

$$\left\|\int_\Omega \varphi G d\mu\right\|^2=\|T_G^*\varphi\|^2=\|\varphi\|^2$$

بنابراین $G$ یک پایه متعامد یکه پیوسته است. چون $F=S^{\frac{1}{2}}G$ و $S^{\frac{1}{2}}$ معکوس پذیر است، بنابراین به کمک گزاره ۳.۲، $F$ یک پایه ریس پیوسته است.□

گزاره‌های ۱.۱ و ۵.۲، یک شناسایی از پایه‌های ریس پیوسته را ارائه می‌دهند. در حقیقت نتیجه زیر را داریم.

**نتیجه ۲-۶**: یک قاب پیوسته $F:(\Omega,\mu)\to H$ یک پایه ریس پیوسته است اگر و تنها اگر عملگر آنالیز $T_F$ از $F$ پوشا باشد.

**مثال ۲-۷:** (۱) فرض کنید $(\pi,H)$ یک نمایش تحویل ناپذیر روی یک گروه موضعاً فشرده $G$ باشد. اگر $\psi\in H$ یک بردار سازگار (موجک) باشد به عبارت دیگر

$$C_\psi := \frac{1}{\|\psi\|^2}\int_G \left|\langle\psi,\pi(g)\psi\rangle\right|^2 d\lambda(g) < +\infty$$

آنگاه نگاشت $W_\psi : H\to L^2(G),$ که

$$(W_\psi f)(g) = C_\psi^{-\frac{1}{2}}\langle f,\pi(g)\psi\rangle,$$
$$(f\in H, g\in G)$$

یک تبدیل موجک پیوسته روی $G$ نامیده می‌شود. این تبدیل یک ایزومتری خطی بر روی بردش می‌باشد. یعنی، $\{\pi(g)\psi\}_{g\in G}$ یک قاب پیوسته چسبان با کران $C_\psi$ است.

اگر $F:=\{\pi(g)\psi\}_{g\in G}$، در این صورت $W_\psi$عملگر آنالیز است یعنی، $W_\psi=T_F$. چون $W_\psi$ پوشا نیست بنابراین با استفاده از نتیجه ۶.۲، $F$ پایه ریس پیوسته نیست.

(۲) فرض کنید:

$H=\left\{P(Z)=a_0+bZ+cZ^3, a_i\in\mathbb{C}, Z\in\mathbb{T}\right\}$ که $\|P\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

فرض کنید $\Omega=\mathbb{T}$، مجموعه اعداد مختلط با مدول یک باشد که $\mu$ اندازه لبگ نرمالیز شده از $\mathbb{T}$ باشد. آنگاه با فرض $F(\omega)=1+\overline{\omega}Z+\overline{\omega}^3Z^3$، $F$ یک $(\mathbb{T},\mu)$ قاب چسبان نرمال است (برای جزئیات بیشتر [۹] را ببینید). اما $F$ پایه ریس نیست چون به وضوح $T_F$ پوشا نیست.

## ۳- رابطه بین قاب‌های پیوسته و گسسته

در بخش قبل، چندین نتیجه را که برای قاب‌های گسسته برقرار بود نشان دادیم که برای قاب‌های پیوسته نیز برقرار است. این حقیقت سبب این انگیزه می‌شود که ما رابطه‌ی نزدیکی بین قاب‌های گسسته و پیوسته بیابیم.

توجه داریم که قاب‌های گسسته مثال خاصی از قاب‌های پیوسته هستند. ما به هر قاب پیوسته یک قاب گسسته را متناظر می‌کنیم به‌طوری که بسیاری از مسائل قاب‌های پیوسته را می‌توان به قاب گسسته متناظر آن انتقال داد و چون حل این مسائل برای حالت گسسته ساده‌تر است به راحتی می‌توان مسائل قاب‌های پیوسته را حل نمود.

فرض کنید $F$ یک قاب پیوسته و $(\varphi_i)_{i\in I}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2(\Omega,\mu)$ باشد. آنگاه $(T_F^*\varphi_i)_{i\in I}$ یک قاب گسسته است که آن را قاب گسسته متناظر با $F$ می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\psi(F)=(T_F^*\varphi_i)_{i\in I} \qquad (۱)$$

(فرض کنید $(\psi_i)_{i\in I}$ یک پایه متعامد یکه دیگر برای $L^2(\Omega,\mu)$ باشد. اگر $g_i=T_F^*\psi_i$ و $f_i=T_F^*\varphi_i$ به وضوح برای هر $f\in H$، داریم

$$\sum_i\left|<f,f_i>\right|^2=\sum_i\left|<f,g_i>\right|^2$$

به عبارت دیگر عملگرهای قاب متناظر $(g_i)_{i\in I}$ و $(f_i)_{i\in I}$ یکی هستند).

توجه داریم که در این مورد برای $f\in H$،

$$\int_{\Omega} |< f, F(\omega) >|^2 d\mu(\omega) = \sum_{i\in I} |< f, f_i >|^2, \quad (۲)$$

در قضیه زیر، روابط بین قاب‌های پیوسته و گسسته را بیان می‌کنیم. قبل از بیان قضیه، لم زیر نیاز است.

**لم ۳-۱:** فرض کنید $K$ و $H$ دو فضای هیلبرت باشند و $T: H \to K$ یک عملگر معکوس پذیر باشد. آنگاه $U: H \to K$ که $U = T(T^*T)^{-\frac{1}{2}}$ عملگر یکانی است.

**قضیه ۳-۲:** فرض کنید $F$ و $G$ دو قاب پیوسته باشند و $(\varphi_i)_{i\in I}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2(\Omega,\mu)$ باشد و همچنین $\psi$ مانند (۱) باشد. آنگاه

(۱) قاب پیوسته $F$ یک پایه ریس پیوسته (پایه متعامد یکه پیوسته ) است اگر و تنها اگر $\psi(F)$ یک پایه ریس گسسته (پایه متعامد گسسته) باشد.

(۲) قاب پیوسته $G$ یک دوگان از $F$ است اگر و تنها اگر $\psi(G)$ یک دوگان از $\psi(F)$ باشد. به‌ویژه، $G$ دوگان استاندارد $F$ است اگر و تنها اگر $\psi(G)$ دوگان استاندارد $\psi(F)$ باشد.

(۳) اگر $T: H \to H$ یک عملگر خطی کراندار باشد آنگاه به‌طور ضعیف $TF = G$ است اگر و تنها اگر $.T\psi(F) = \psi(G)$

**برهان:** فرض کنید $F$ یک پایه ریس پیوسته باشد. از گزاره ۱.۱، نتیجه می‌شود $T_F$ پوشا است. در حقیقت $T_F$ و $T_F^*$ عملگرهای کراندار معکوس پذیر هستند. به کمک لم ۱.۳، یک پایه متعامد یکه $(e_i)_{i\in I}$ برای $H$ و یک عملگر یکانی $U$ وجود دارد به‌طوری که $.T_F^*Ue_i = T_F^*\varphi_i$ چون $T_F^*U$ معکوس پذیر است، بنابراین $(T_F^*\varphi_i)_{i\in I}$ یک پایه ریس است. اگر $F$ یک پایه متعامد یکه پیوسته باشد آنگاه از گزاره ۱.۱ نتیجه می‌شود $T_F$ یک عملگر یکانی است. در نتیجه $(T_F^*\varphi_i)_{i\in I}$ یک پایه متعامد یکه برای $H$ است. بنابراین (۱) اثبات می‌شود.

برهان (۲) مشابه (۱) است. برای برهان (۳) می‌دانیم که به‌طور ضعیف $TF = G$ اگر و تنها اگر

$$\langle T^* f, F(\omega)\rangle = \langle f, G(\omega)\rangle, f \in H, \omega \in \Omega$$

اگر و تنها اگر $f \in H, \omega \in \Omega$، $T_F T^* f(\omega) = T_G f(\omega)$ اگر و تنها اگر $TT_F^*\varphi_i = T_G^*\varphi_i, \quad i \in I$ به‌عبارت دیگر $.T\psi(F) = \psi(G)$ □

اکنون به کمک ایده $\psi(F)$، مسأله دقیق بودن قاب‌های پیوسته را بررسی می‌کنیم.

**تعریف ۳-۳:** یک قاب پیوسته $F$ دقیق نامیده می‌شود هرگاه برای هر پایه متعامد یکه $(\varphi_i)_{i\in I}$ از $L^2(\Omega,\mu)$ مجموعه $(T_F^*\varphi_i)_{i\in I}$ یک قاب دقیق در $H$ باشد. در گزاره زیر نشان می‌دهیم که قاب‌های دقیق پیوسته دقیقاً پایه‌های ریس پیوسته هستند. برهان گزاره زیر فوراً از قضیه ۱۶.۱.۳ از [۷] و قضیه ۲.۳ نتیجه می‌شود.

**گزاره ۳-۴:** فرض کنید $F: (\Omega,\mu) \to H$ یک قاب پیوسته باشد و $H$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر باشد آنگاه $F$ دقیق است اگر و تنها اگر یک پایه ریس پیوسته باشد.

**مثال ۳-۳:** فرض کنید $F, G: (\Omega,\mu) \to H$ دو نگاشت بسل پیوسته از فضای هیلبرت جدایی پذیر $H$ باشند. همچنین برای هر $f \in H$،

$$f = \int_{\Omega} < f, G(\omega) > F(\omega) d\mu(\omega)$$

آنگاه $F$ و $G$ قاب‌های پیوسته هستند. در حقیقت فرض کنید کران‌های نگاشت‌های بسل $F$ و $G$ به

ترتیب $B$ و $D$ باشند. فرض کنید $(\varphi_i)_{i\in I}$ یک پایه متعامد برای $L^2(\Omega,\mu)$ باشد و برای $i\in I$، $f_i=T_F^*\varphi_i,\quad g_i=T_G^*\varphi_i$. به وضوح $(f_i)_{i\in I}$ و $(g_i)_{i\in I}$ دنباله‌های بسل با کران‌های B و D هستند و $\sum_{i\in I}\langle f,g_i\rangle f_i=f$ بنابراین با استفاده از لم ۲.۶.۵ از [۸]، $(f_i)_{i\in I}$ و $(g_i)_{i\in I}$ قاب هستند و برای هر $g\in H$ داریم $g=\sum_{i\in I}\langle g,f_i\rangle g_i$. بنابراین با استفاده از (۲) $F$ و $G$ قاب‌های پیوسته هستند. با جایگذاری $f_i$ و $g_i$ با $T_F^*\varphi_i$ و $T_G^*\varphi_i$ به وضوح برای هر $g\in H$

$$g=\int_\Omega \langle g,F(\omega)\rangle G(\omega)d\mu(\omega)$$

فرض کنید $F$ قاب پیوسته و $\psi(F)$ قاب گسسته متناظر با آن باشد. دوگان قاب گسسته $\psi(F)$ مورد بررسی محققان زیادی قرار گرفت است [۶،۲]. اما در حالت پیوسته مسأله دوگان چندان بررسی نشده است. در مرجع [۴]، به کمک یک پایه ریس پیوسته یک شناسایی از دوگان قاب‌های پیوسته ارائه شده است. از آنجا که دوگان قاب‌های پیوسته حائض اهمیت است در ادامه با استفاده از ایده متناظر کردن قاب پیوسته با یک قاب گسسته مسأله دوگان قاب‌های پیوسته را بررسی می‌کنیم و یک شناسایی از دوگان قاب‌های پیوسته را معرفی می‌کنیم. قبل از بیان قضیه، به یادآوری دوگان قاب‌های گسسته قضیه ۱.۲ از [۲] می‌پردازیم.

**قضیه ۳-۶:** فرض کنیم $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $H$ با عملگر ترکیب $T$ باشد. همچنین فرض کنید $(\delta_i)_{i\in I}$ یک پایه متعامد از $\ell^2$ باشد. آنگاه $(g_i)_{i=1}^{\infty}$ یک دوگان برای $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ است اگر و تنها اگر $g_i=S^{-1}f_i+\Theta^*\delta_i$ برای یک عملگر $\Theta\in B(H,\ell^2)$ به‌طوری که $T\Theta=0$.

فرض کنیم $(\varphi_i)_{i\in I}$ یک پایه متعامد برای $L^2(\Omega,\mu)$ باشد قضیه زیر دوگان قاب‌های پیوسته را روی $L^2(\Omega,\mu)$ معرفی می‌کند.

**قضیه ۳-۷:** فرض کنید $F$ یک قاب پیوسته باشد و $S$ عملگر قاب $\psi(F)$ باشد اگر $G:\Omega\to H$ به‌صورت

(۳)
$$\langle f,G(\omega)\rangle=(T_FS^{-1}f)(\omega)+\sum_{i\in T}(\Theta f)_i\varphi_i(\omega)$$

تعریف شود، که $\Theta\in B(H,\ell^2)$ و $T^*_{\psi(F)}\Theta=0$ آنگاه $G$ یک دوگان از $F$ است.

**برهان:** فرض کنید $(f_i)_{i\in I}$ و $(g_i)_{i\in I}$ به‌ترتیب قاب‌های گسسته متناظر با $F$ و $G$ باشند، یعنی $f_i=T_F^*\varphi_i,\quad g_i=T_G^*\varphi_i$. به کمک قضیه ۲.۳ کافیست نشان دهیم $(g_i)_{i\in I}$ دوگان $(f_i)_{i\in I}$ است. برای این منظور با استفاده از (۳) داریم.

$$\begin{aligned}\langle g_i,f\rangle &=\langle T_G^*\varphi_i,f\rangle\\ &=\langle \varphi_i,T_Gf\rangle\\ &=\langle \varphi_i,T_FS^{-1}f+\sum_{j\in I}(\Theta f)_j\varphi_j\rangle\\ &=\langle T_F^*\varphi_i,S^{-1}\rangle+\sum_{j\in I}(\overline{\Theta f})_j\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle\\ &=\langle S^{-1}f_i,f\rangle+(\overline{\Theta f})_i\\ &=\langle S^{-1}f_i,f\rangle+\langle\delta_i,\Theta f\rangle\\ &=\langle S^{-1}f_i+\Theta^*\delta_i,f\rangle\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از قضیه ۶.۳، $(g_i)_{i\in I}$ دوگان $(f_i)_{i\in I}$ است که این برهان را کامل می‌کند. □

## فهرست منابع

[1] S. T. Ali, J. -P. Antoine, J. -P. Gazeau, Continuous frames in Hilbert spaces. Ann. Physics, 222 (1993).

[2] A. A. Arefijamaal and E. Zekaee, Signal processing by alternate dual Gabor frames, Appl. Comput. Harmon. Anal, 35 (2013).

[3] A. A. Arefijamaal, R. A. Kamyabi Gol, R. Raisi Tousi, N. Tavallayi, A new approach to continuous Riesz bases, J. Sci. I. R. Iran, 24 (2013).

[4] A. A. Arefijamaal, A. Razghandi, Characterization of alternate duals of continuous frames and representation frames, Results Math, (2019).

[5] S. H. Avazzadeh, R. A. Kamyabi-Gol and R. Raisi Tousi, Continuous frames and g-frames, Bull. Iranian Math. Soc, 40 (2014).

[6] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz bases, Birkh¨auser, Boston, (2003).

[7] O. Christensen and K. J. Torben, An Introduction to the Theory of Bases, Frames, and Wavelets, Citeseer, (1999).

[8] M. A. Dehghan and M. A. Hasankhani Fard, G-continuous frames and coorbit spaces. Acta. Math. Acad. Paedagog Nyh´azi (N.S.), 24 (2008).

[9] J. P. Gabardo and D. Han, Frames associated with measurable spaces, Adv. Comput. Math, 18 (2003)

[10] A. Razghandi, R. Raisi Tousi, Using tensor product dual frames for phase retrieval problems, J.Pseudo_Differ.oper. Appl, 12 (2021).