دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

فرم رد جیکوبسن تعمیم‌یافته

امیر حسین نخودکار[۱*]

[۱] استادیار، گروه ریاضی محض (جبر)، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۶/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۰۲

چکیده

در این مقاله فرم رد جیکوبسن را به فرم‌های هرمیتی پادمتقارن روی جبرهای تقسیم کواترنیون با برگردان متعامد در مشخصه‌ی دلخواه تعمیم می‌دهیم. با استفاده از این فرم تعمیم‌یافته، یک رده‌بندی از فرم‌های هرمیتی مذکور ارائه می‌نمائیم. همچنین نشان می‌دهیم یک فرم هرمیتی ایزوتروپ (متابولیک) است اگر و تنها اگر فرم رد جیکوبسن تعمیم‌یافته‌ی آن ایزوتروپ (متابولیک) باشد.

واژه‌های کلیدی: فرم هرمیتی، فرم مربعی، فرم رد جیکوبسن، جبر کواترنیون با برگردان

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: a.nokhodkar@kashanu.ac.ir

۱- مقدمه

نظریه‌ی فرم‌های هرمیتی به عنوان تعمیمی طبیعی از نظریه‌ی فرم‌های مربعی، با جایگذاری میدان زمینه با یک جبر تقسیم مجهز به برگردان، ظاهر می‌شود.

با توجه به این مطلب، یک مسأله‌ی مهم در نظریه‌ی فرم‌های هرمیتی، نسبت دادن فرم‌های مربعی به این فرم‌هاست، به گونه‌ای که برخی از خواص آن را بازتاب دهد. نخستین گام در این راستا توسط جیکوبسن برداشته شد. در [5] وی به هر فرم هرمیتی متقارن روی یک جبر کواترنیون با برگردان کانونی در مشخصه‌ی مخالف دو، یک فرم مربعی روی میدان زمینه نسبت داد.

این فرم که به نام فرم رد جیکوبسن شناخته می‌شود، فرم‌های هرمیتی مذکور را به طور کامل رده‌بندی می‌کند. پس از آن، این فرم توسط ساه در [10] به مشخصه‌ی دو تعمیم داده شد. وی نشان داد خواص اساسی فرم رد جیکوبسن، در تعمیم به مشخصه‌ی دو نیز برقرارند. همچنین با استفاده از این فرم، ساه تجزیه‌ای برای فرم‌های هرمیتی روی یک جبر ساده‌ی مرکزی از درجه‌ی حداکثر چهار با u-ناوردای پایین به دست آورد. فرم رد جیکوبسن تاکنون در مقالات بسیاری به کار رفته که از آن جمله می‌توان به [1]، [2]، [3]، [8] و [9] اشاره کرد.

در این مقاله، فرم رد جیکوبسن را به فرم‌های هرمیتی پادمتقارن روی جبرهای تقسیم با برگردان متعامد در مشخصه‌ی دلخواه تعمیم می‌دهیم. همچنین ثابت می‌کنیم یک فرم هرمیتی ایزوتروپ (متابولیک) است اگر و تنها اگر فرم رد آن ایزوتروپ (متابولیک) باشد. به علاوه، نشان خواهیم داد فرم رد تعمیم‌یافته، رده‌ی طولپایی فرم‌های هرمیتی مذکور را به طور کامل مشخص می‌کند.

۲- فرم‌های مربعی و هرمیتی

فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F از مشخصه‌ی دلخواه باشد. یک *فرم مربعی* روی V نگاشتی است مانند $q:V\to F$ به‌طوریکه:

الف) برای هر $\alpha\in F$ و هر $v\in V$،

$$q(\alpha v)=\alpha^2 q(v).$$

ب) نگاشت $b_q:V\times V\to F$ با ضابطه‌ی

$$b_q(u,v)=q(u+v)-q(u)-q(v)$$

یک فرم دوخطی است. نگاشت b_q *فرم قطبی* q نامیده می‌شود. واضح است که فرم قطبی همواره متقارن است.

فرض کنید W زیرفضایی از V باشد. *مکمل متعامد* W که با $W^\perp$ نمایش داده می‌شود به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$W^\perp=\{v\in V\mid b_q(v,w)=0,\ \forall w\in W\}.$$

فرم q *منظم* نامیده می‌شود هرگاه $V^\perp=\{0\}$. در این حالت، (V,q) را یک *فضای مربعی* می‌نامیم. فضای مربعی (V,q) را *متابولیک* می‌نامیم هرگاه زیرفضای W از V وجود داشته باشد به طوریکه $\dim_F W=\frac{1}{2}\dim_F V$ و $q|_W=0$.

بردار ناصفر $v\in V$ را *ایزوتروپ* می‌نامیم هرگاه $q(v)=0$. فرم q *ایزوتروپ* خوانده می‌شود هرگاه یک بردار ایزوتروپ در V موجود باشد. در غیر این صورت آن را *آنیزوتروپ* می‌نامیم. دو فضای مربعی (V,q) و (V',q') را *طولپا* می‌نامیم هرگاه یکریختی فضاهای برداری $f:V\to V'$ وجود داشته باشد که برای هر $v\in V$، $q'(f(v))=q(v)$. *مجموع متعامد* دو فضای مربعی (V,q) و (V',q') که با $(V\perp V',q\perp q')$ نمایش داده می‌شود یک فضای مربعی است که در آن $V\perp V'=V\oplus V'$ و به‌ازای هر $v\in V$ و هر $v'\in V'$،

$$(q\perp q')((v,v'))=q(v)+q'(v').$$

فرض کنید A یک جبر ساده‌ی مرکزی روی میدان F باشد. منظور از یک *برگردان* روی A، نگاشتی جمعی مانند $\sigma:A\to A$ است به‌طوریکه

$$\sigma(xy)=\sigma(y)\sigma(x)$$

برای هر $x,y\in A$ و $\sigma^2=\mathrm{id}$ که در آن id نگاشت همانی است. تحدید σ به F یک خودریختی F از مرتبه‌ی حداکثر دو است. اگر $\sigma|_{\mathrm{F}}=\mathrm{id}$، برگردان σ از *نوع اول* و در غیر این صورت از *نوع*

دوم نامیده می‌شود. اگر K/F یک گسترش میدانی باشد، قرار می‌دهیم

$$(A_K,\sigma_K):=(A\otimes_F K,\sigma\otimes \mathrm{id}).$$

بنابر [۷, (۱.۲)]، اگر L یک میدان شکافنده برای A باشد، فضای برداری V روی L و فرم دوخطی متقارن یا پادمتقارن b روی V وجود دارد به‌طوریکه

$$(A_L,\sigma_L)\cong(\mathrm{End}_L(V),\mathrm{Ad}_b),$$

که در آن Ad_b برگردان الحاقی b است. برگردان σ از نوع اول، *همتافته* نامیده می‌شود هرگاه برای هر میدان شکافنده L و هر یکریختی

$$(A_L,\sigma_L)\cong(\mathrm{End}_L(V),\mathrm{Ad}_b),$$

فرم دوخطی b متناوب باشد، یعنی $b(v,v)=0$ برای هر $v\in V$. درغیر این صورت σ *متعامد* نامیده می‌شود. برای جبر با برگردان (A,σ) و عنصر $\lambda\in F$ با خاصیت $\lambda\sigma(\lambda)=1$، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Sym}_\lambda(A,\sigma)=\{x\in A\mid \lambda\sigma(x)=x\},$$
$$\mathrm{Symd}_\lambda(A,\sigma)=\{x+\lambda\sigma(x)\mid x\in A\}.$$

فرض کنید (D,σ) یک جبر تقسیم با برگردان روی میدان F و $\lambda\in F$ عنصری با خاصیت $\lambda\sigma(\lambda)=1$ باشد. فرض کنید V یک فضای برداری راست با بعد متناهی روی D است. منظور از یک *فرم λ-هرمیتی* روی V نگاشتی دوجمعی مانند $h:V\times V\to D$ است که برای هر $u,v\in V$ و هر $\alpha,\beta\in D$ در روابط

$$h(u\alpha,v\beta)=\sigma(\alpha)h(u,v)\beta$$

و $h(v,u)=\lambda\sigma(h(u,v))$ صدق می‌کند. توجه کنید که برای هر $v\in V$ داریم $h(v,v)\in\mathrm{Sym}_\lambda(D,\sigma)$. فرم هرمیتی h *زوج* نامیده می‌شود اگر برای هر $v\in V$، $h(v,v)\in\mathrm{Symd}_\lambda(D,\sigma)$.

فرم h *ایزوتروپ* نامیده می‌شود اگر بردار ناصفر $v\in V$ وجود داشته باشد که $h(v,v)=0$. در غیر این صورت h را *آنیزوتروپ* می‌نامیم. فرض کنید W زیرفضایی از V باشد. *مکمل متعامد* W به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$W^{\perp_h}=\{v\in V\mid h(v,w)=0,\ \forall w\in W\}.$$

فرم h را *منظم* می‌نامیم اگر $V^{\perp_h}=0$. در این حالت، زوج (V,h) را یک *فضای λ-هرمیتی* روی (D,σ) می‌نامیم. فضای (V,h) *متابولیک* نامیده می‌شود اگر زیرفضای $L\subseteq V$ وجود داشته باشد که $L=L^{\perp_h}$. دقت کنید که در این حالت بعد راست L روی D برابر با نصف بعد راست V روی D است. دو فضای λ-هرمیتی (V,h) و (V',h') روی (D,σ) را *طولپا* می‌نامیم هرگاه یکریختی فضاهای برداری راست $f:V\to V'$ وجود داشته باشد که برای هر $u,v\in V$،

$$h'(f(u),f(v))=h(u,v).$$

مجموع متعامد دو فضای λ-هرمیتی (V,h) و (V',h') که با $(V\perp V',h\perp h')$ نمایش داده می‌شود یک فضای λ-هرمیتی است که در آن $V\perp V'=V\oplus V'$ و به‌ازای هر $u,v\in V$ و $u',v'\in V'$،

$$(h\perp h')((u,u'),(v,v'))=h(u,v)+h'(u',v').$$

برای مطالعه‌ی فرم‌های مربعی و هرمیتی در مشخصه‌ی دلخواه، می‌توانید به مراجع [۴] و [۶] مراجعه نمایید.

۳- فرم رد جیکوبسن تعمیم‌یافته

در اینجا چند نماد را معرفی و برای ادامه‌ی این مقاله آنها را ثابت در نظر می‌گیریم. فرض کنید F یک میدان و Q یک جبر تقسیم کواترنیون روی F است، یعنی Q یک جبر تقسیم ساده‌ی مرکزی از بعد چهار روی F است. فرض کنید σ یک برگردان نوع اول روی Q است. قرار می‌دهیم $\lambda=1$ اگر σ همتافته باشد و $\lambda=-1$ اگر σ متعامد باشد. دراین‌صورت طبق [۷, (۷.۲)]، $\mathrm{Symd}_\lambda(Q,\sigma)$ یک فضای برداری یک بعدی روی F است. عنصر ناصفر s را در $\mathrm{Symd}_\lambda(Q,\sigma)$ در نظر بگیرید. بنابر [۷, (۸.۲)]، این عنصر لزوما وارون‌پذیر است. فرض کنید (V,h) یک فضای λ-هرمیتی زوج روی (Q,σ) باشد. از آنجا که $\mathrm{Symd}_\lambda(Q,\sigma)=Fs$، برای هر $v\in V$ داریم $s^{-1}h(v,v)\in F$. نگاشت $q_{h,s}:V\to F$

را با ضابطه‌ی $q_{h,s}(v) = s^{-1}h(v,v)$ تعریف کنید. با توجه به اینکه $\mathrm{Symd}_\lambda(Q,\sigma)$ یک بعدی است، $q_{h,s}$ با تقریب ضرب در یک اسکالر یکتاست، یعنی اگر $s' \in \mathrm{Symd}_\lambda(Q,\sigma)$ عنصر ناصفر دیگری باشد، آنگاه $\alpha \in F$ وجود دارد که $q_{h,s'} = \alpha q_{h,s}$. با توجه به اینکه عنصر $s \in \mathrm{Symd}_\lambda(Q,\sigma)$ را ثابت در نظر گرفته‌ایم، تا جایی که ابهامی پیش نیاید، به جای $q_{h,s}$ می‌نویسیم q_h.

لم ۳.۱ *با در نظر گرفتن V به عنوان یک فضای برداری روی F، نگاشت q_h یک فرم مربعی روی V با فرم قطبی*

$$b_h(u,v) = s^{-1}(h(u,v) + h(v,u))$$

است. به‌علاوه اگر h منظم باشد، آنگاه q_h نیز منظم است.

اثبات. برای هر $\alpha \in F$ و $v \in V$ داریم

$$\begin{aligned} q_h(\alpha v) &= s^{-1}h(\alpha v, \alpha v) \\ &= \alpha^2 s^{-1}h(v,v) = \alpha^2 q_h(v). \end{aligned}$$

نگاشت $b_h : V \times V \to F$ با ضابطه‌ی

$$\begin{aligned} b_h(u,v) &= q_h(u+v) - q_h(u) - q_h(v) \\ &= s^{-1}(h(u,v) + h(v,u)), \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان دید b_h یک فرم دوخطی متقارن روی V است. پس q_h یک فرم مربعی است.

برای اثبات منظم بودن q_h بردار دلخواه $v \in V$ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه h منظم است، بردار $w \in V$ وجود دارد که $h(v,w) = 1$. حال فرض کنید $s = \alpha + \lambda\sigma(\alpha)$، که در آن $\alpha \in D$. در این صورت

$$\begin{aligned} b_h(v,w) &= s^{-1}(h(v, w\alpha) + h(w\alpha, v)) \\ &= s^{-1}(h(v,w)\alpha + \sigma(\alpha)h(w,v)) \\ &= s^{-1}(\alpha + \lambda\sigma(\alpha)) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

بنابراین q_h منظم است.

واضح است که اگر (V,h) و (V',h') دو فرم λ- هرمیتی روی (D,σ) باشند آنگاه $q_{h\perp h',s} \simeq q_{h,s} \perp q_{h',s}$. به‌علاوه توجه کنید که اگر σ همتافته باشد، $\lambda = 1$ و $s = 1$ فرم q_h همان فرم رد جیکوبسن است که در [۵] تعریف شد. با توجه به این نکته، فرم q_h را *فرم رد جیکوبسن تعمیم‌یافته‌ی* h می‌نامیم.

قضیه‌ی زیر تعمیمی است از [۳, (۲.۴)].

قضیه ۳.۲ *فضای λ-هرمیتی (V,h) روی (Q,σ) ایزوتروپ (متابولیک) است اگر و تنها اگر q_h ایزوتروپ (متابولیک) باشد.*

اثبات. حکم در مورد ایزوتروپ بودن واضح است. فرض کنید زیرفضای $L \subseteq V$ وجود داشته باشد که $L = L^{\perp_h}$. داریم $\dim_D L = \frac{1}{2}\dim_D V$ و $h|_{L\times L} = 0$. بنابراین $\dim_F L = \frac{1}{2}\dim_F V$ و $q_h|_L = 0$، یعنی q_h متابولیک است.

برعکس، فرض کنید q_h متابولیک باشد. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۶ از فصل اول [۶] تجزیه‌ای به شکل $h \simeq h_{\mathrm{an}} \perp h_{\mathrm{met}}$ از h وجود دارد که در آن h_{an} آنیزوتروپ و h_{met} متابولیک است. بنابراین $q_h \simeq q_{h_{\mathrm{an}}} \perp q_{h_{\mathrm{met}}}$. اگر h_{an} نابدیهی باشد، آنگاه طبق آنچه گفته شد $q_{h_{\mathrm{an}}}$ آنیزوتروپ است. به علاوه طبق آنچه اثبات شد، $q_{h_{\mathrm{met}}}$ متابولیک است. اما مجموع متعامد یک فرم مربعی متابولیک و آنیزوتروپ نمی‌تواند متابولیک باشد. این با متابولیک بودن q_h در تناقض است.

قضیه‌ی زیر نیز تعمیمی است از [۳, (۳.۴)].

قضیه ۳.۳ *فرض کنید (V',h') یک فضای λ- هرمیتی زوج روی (Q,σ) باشد. در این صورت $(V,h) \simeq (V',h')$ اگر و تنها اگر $q_{h,s} \simeq q_{h',s}$.*

اثبات. فرض کنید $\phi : (V,h) \simeq (V',h')$ یک طولپایی باشد. با در نظر گرفتن ϕ به عنوان یکریختی فضاهای برداری روی میدان F، برای هر $v \in V$ داریم

$$\begin{aligned} q_{h',s}(\phi(v)) &= s^{-1}h'(\phi(v), \phi(v)) \\ &= s^{-1}h(v,v) = q_{h,s}(v). \end{aligned}$$

بنابراین $q_{h,s} \simeq q_{h',s}$. برعکس، فرض کنید

$$(V, q_{h,s}) \simeq (V', q_{h',s}).$$

در این صورت $q_{h\perp(-h'),s} \simeq q_{h,s} \perp (-q_{h',s})$ متابولیک است. پس طبق قضیه‌ی ۳.۲، $h \perp (-h')$ نیز متابولیک است. با توجه به اینکه h و h' فرم‌های هرمیتی زوج هستند، قضیه ۵.۴.۶ از فصل اول [۶] نتیجه می‌دهد $h \simeq h'$.

تشکر و قدردانی

نویسنده‌ی مقاله مراتب تشکر خود را از داوران محترم به خاطر پیشنهادات ارزشمندشان ابراز می‌دارد.

فهرست منابع

[1] V. Astier, T. Unger, Signatures of hermitian forms and the Knebusch trace formula. *Math. Ann.* **358** (2014), no. 3-4, 925–947.

[2] D. M. Cohen, H. L. Resnikoff, Hermitian quadratic forms and Hermitian modular forms. *Pacific J. Math.* **76** (1978), no. 2, 329–337.

[3] A. Dolphin, Totally decomposable symplectic and unitary involutions. *Manuscripta Math.* **153** (2017), no. 3-4, 523–534.

[4] R. Elman, N. Karpenko, A. Merkurjev, *The algebraic and geometric theory of quadratic forms.* American Mathematical Society Colloquium Publications, **56**. *American Mathematical Society, Providence, RI,* 2008.

[5] N. Jacobson, A note on hermitian forms. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (1940). 264–268.

[6] M.-A. Knus, *Quadratic and Hermitian Forms Over Rings*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. **294**, Springer-Verlag, 1991.

[7] M.-A. Knus, A. S. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The book of involutions*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 44. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[8] D. W. Lewis, The isometry classification of Hermitian forms over division algebras. *Linear Algebra Appl.* **43** (1982), 245–272.

[9] A.-H. Nokhodkar, Hermitian forms and systems of quadratic forms. *Doc. Math.* **23** (2018), 747--758.

[10] C.-H. Sah, A note on Hermitian forms over fields of characteristic 2. *Amer. J. Math.* **86** (1964) 262–270.