دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

رویکرد تغییراتی برای وجود بی‌نهایت جواب معادلات تفاضلی

محسن خالقی مقدم*[1]، استفان ترزین[2]، مصطفی اوسی[3]

(۱) استادیار، گروه علوم پایه، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری، ساری، ایران
(۲) استاد، گروه ریاضی، دانشگاه روز، روز، بلغارستان
(۳) دانشیار، گروه علوم، کالج منطقه‌ای گراند پریری، گراند پریری، کانادا

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۶/۱۳.   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۶/۲۷

چکیده

در این مقاله وجود بی‌نهایت جواب برای مساله گسسته غیر خطی ناهمسانگر با نمای متغیر متناظر با عملگر $p(k)-$ لاپلاسین با شرط مرزی دیریکله تحت رفتارهای مناسب تابع غیر خطی بررسی شده است. روش تغییراتی برای تابعک‌های مشتق پذیر به‌عنوان تکنیک حل مساله است که بر مبنای قضیه مینیموم موضعی ریچری مورد استفاده قرار می‌گیرد. قضیه‌ای به‌عنوان یک نمونه از نتایج اصلی که در واقع بیان موضوع در یک حالت خاص است، ارائه می‌شود. با انتخاب دو تابعک غیر خطی مشتق پذیر و بنا نهادن چهارچوب تغییراتی، یک لم کاربردی ارائه می‌شود که در آن λ در یک بازه مشخص قرار دارد. با در نظر گرفتن این لم اساسی و استفاده از قضیه مینیموم ریچری، نتیجه اصلی بیان می‌شود که وجود یک دنباله از بی‌نهایت جواب همگرا به صفر بوده که تحت رفتارهای مناسب تابع غیر خطی در صفر است. به‌طوری‌که مساله گسسته غیر خطی ناهمسانگر در یک بازه‌ی دقیق از پارامتر λ، بی‌نهایت جواب می‌پذیرد که نرم این جواب‌ها به صفر میل می‌کند. در ادامه چند تبصره و گزاره و اثبات حالت خاص نتیجه اصلی مطرح می‌شود. در خاتمه برای توضیح نتایج اصلی چندین مثال به‌عنوان کاربردهایی از مساله ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: مساله مقدار مرزی غیر خطی گسسته؛ بی‌نهایت جواب؛ روش تغییراتی؛ تئوری نقطه بحرانی.

* عهده‌دار مکاتبات:
Email: m.khaleghi@sanru.ac.ir

۱- مقدمه

کاربردهای معادلات تفاضلی و مسائل تغییراتی همراه با عملگر $p(k)$ - لاپلاسین در شاخه‌های مختلف علوم مانند: مهندسی مکانیک، سیستم‌های کنترلی، اقتصاد، علوم اجتماعی، رایانه، فیزیک، شبکه‌های عصبی مصنوعی یا بیولوژیکی، سایبرنتیک[۱]، محیط زیست و غیره دیده می‌شود. بدلیل استفاده فراوان این نوع مسائل در علوم مختلف، مطالعه و تحقیق در این راستا رو به افزایش است. یکی از روش‌های که محققین در بررسی و مطالعه این گونه مسائل استفاده می‌کنند، قضایای نقطه ثابت در مخروط است، که نتایج این تحقیقات در منابع [۱]، [۲]،[۱۶] و [۱۷] آمده است. روش‌های تغییراتی و تئوری نقطه بحرانی و دیگر روش‌ها برای مطالعه وجود و چندگانگی جواب‌ها برای معادلات دیفرانسیل و تفاضلی در منابع [۳]، [۴]،[۵]،[۱۸] و [۱۹] بررسی شده است.
در این مقاله اثبات وجود بی‌نهایت جواب برای مسئله ناهمسانگر[۲] گسسته با شرط مرزی دیریکله:

$$\begin{cases} -\Delta\left(w(k-1)|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\right) \\ +q(k)|u(k)|^{p(k)-2}u(k)=\lambda f\left(k,u(k)\right), \\ u(0)=u(T+1)=0, \end{cases} \qquad (۱)$$

مورد بررسی قرار می‌گیرد. در اینجا $k\in[1,T]$، T عدد صحیح مثبت ثابت و $[1,T]$ منظور بازه گسسته $\{1,\dots,T\}$ می‌باشد. λ یک پارامتر مثبت می‌باشد. همچنین تابع $f:[1,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته، $\Delta u(k)=u(k+1)-u(k)$ عملگر تفاضل رو به جلو، $p:[0,T+1]\to[2,\infty)$ و $q:[0,T+1]\to[1,\infty)$ و $w:[0,T]\to[1,\infty)$ توابع کراندار در نظر گرفته می‌شوند. در این مقاله نمادهای زیر:

$$p^{+}:=\max_{k\in[0,T+1]}p(k),\quad p^{-}:=\min_{k\in[0,T+1]}p(k),$$
$$q^{+}:=\max_{k\in[1,T+1]}q(k),\quad w^{+}:=\max_{k\in[0,T]}w(k),$$

استفاده می‌شود. در اینجا متذکر می‌شویم که مساله (۱) حالت گسسته مساله ناهمسانگر متغیر نمایی:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(w_i(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\ +q(x)|u|^{p_i(x)-2}u=\lambda f(x,u), \quad x\in\Omega, \\ u=0, x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

است که در آن $\Omega\subset\mathbb{R}^N$، $N\geq 3$ دامنه کراندار با مرز هموار، $f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ تابعی با شرایط معین، $p_i(x)$، $w_i(x)\geq 1$ و $q(x)\geq 1$ توابع پیوسته روی $\overline{\Omega}$ با $2\leq p_i(x)$ برای هر $x\in\Omega$ و $i\in\{1,2,\cdots,N\}$ و $\lambda>0$ یک عدد حقیقی می‌باشند.
ما در جستجوی وجود بی‌نهایت جواب برای مساله (۱) به کمک قضیه مینیموم موضعی ریچری (قضیه۲) برگرفته از مرجع [19, Theorem 2.5] در چهار چوب روش تغییراتی هستیم. نسخه گسسته قضیه۲ در فضای بعد متناهی قضیه ۳،۴ در مرجع [6] است.
قبلاً در [۳] مساله (۱) توسط نویسنده و همکاران تحت شرایط متفاوت روی تابع غیر خطی $f:[1,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای اثبات وجود بی‌نهایت جواب با استفاده از نسخه گسسته قضیه نقطه بحرانی یا مینیموم موضعی بوننانو و همکاران بررسی شده است. این مساله (۱) توسط نویسنده و همکاران با اضافه نمودن جمله غیر خطی $h(u(t))$ با شرط لیپشیتس و همچنین تابع غیر خطی $g(t,u(t))$ با ضریب $\mu\geq 0$ به صورت مساله آشفتگی[۳] تحت دیگر شرایط متفاوت روی تابع $f(t,u(t))$ برای اثبات وجود بی‌نهایت جواب با استفاده از قضیه نقطه بحرانی یا مینیموم موضعی بوننانو و همکاران در [۱۲] بررسی شده است.
همچنین توسط نویسنده و همکار مساله (۱) همراه با تابع غیر خطی $g(t,u(t))$ با ضریب $\mu\geq 0$ به صورت مساله آشفتگی تحت دیگر شرایط متفاوت روی تابع غیر خطی $f:[1,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای اثبات وجود سه

۱. موضوع اصلی سایبرنتیک بررسی ماهیت کنترل در انسان، حیوان و ماشین است.

2. Anisotropic

3. perturbed

جواب با استفاده از دیگر قضیه مینیموم موضعی ریچری در [۱۳] و قضیه نقطه بحرانی بوننانو و همکاران در [۱۴] بررسی شده است. مساله (۱) توسط نویسنده و همکاران تحت شرایط متفاوت روی تابع غیر خطی $f:[1,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای اثبات وجود حداقل یک جواب غیر بدیهی در [۱۱] بررسی شده است. علاوه بر آن مساله (۱) هنگامی که تابع غیر خطی $f:[1,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در شرط لیپشیتس صدق کند برای اثبات یکتایی جواب در [۱۵] بررسی شده است.

در این مقاله، بعد از بیان ابزار اصلی یعنی قضیه۲ و بنا نهادن چهارچوب تغییراتی، لم ۲ را ارائه می‌نماییم که در آن λ در یک بازه مشخص قرار دارد. با در نظر گرفتن این لم اساسی، نتیجه کار را یعنی وجود یک دنباله از بی نهایت جواب همگرا به صفر در قضیه ۳ که تحت رفتارهای مناسب در صفر برای تابع غیر خطی می‌باشد، بیان می‌کنیم. سرانجام مطمئن می‌شویم که مساله (۱) در یک بازه‌ی دقیق از پارامتر λ، بی‌نهایت جواب می‌پذیرد.

اینک قضیه ذیل را به‌عنوان یک نمونه از نتایج اصلی – که در واقع بیان موضوع در یک حالت خاص می‌باشد– ارائه می‌دهیم:

قضیه۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته بوده در یک همسایگی مبدا تابع فرد و صعودی است و

$$\limsup_{s\to 0}\frac{\int_0^s f(t)dt}{|s|^3}=+\infty.$$

آن‌گاه برای هر $\lambda\in]0,+\infty[$، مساله:

$$\begin{cases}-\Delta\left(|\Delta u(k-1)|^{k}\Delta u(k-1)\right)+\\ |u(k)|^{k+1}u(k)=\lambda f(u(k)), \quad k\in[1,T],\\ \qquad u(0)=u(T+1)=0,\end{cases}$$

یک دنباله از بی‌نهایت جواب‌های u_n می‌پذیرد و

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{T+1}|\Delta u_n(k-1)|^3+|u_n(k)|^3\right\}^{1/3}=0.$$

این قضیه‌ی مینیموم موضعی ریچری (قضیه ۱) برای مسائل دو مقدار مرزی در منابع [۴]،[۶]،[۷]،[۱۲] و [۲۰] برای اثبات وجود بی‌نهایت جواب، با موفقیت به‌کار گرفته شده است.

ادامه مقاله به این صورت مرتب شده است. در بخش ۲، ابزار اصلی (قضیه ۲) و چند مبحث پایه‌ای را بیان می‌کنیم. در بخش ۳، نتایج اصلی این مقاله را بیان و اثبات می‌کنیم که شامل چند قضیه و تبصره و اثبات حالت خاص نتیجه اصلی (قضیه ۱) است. در خاتمه نتایج را، با چندین مثال به‌عنوان کاربردهایی از مساله (۱) توضیح می‌دهیم.

۲- تعاریف و مفاهیم اولیه

در اینجا قضیه زیر را تحت عنوان قضیه بی‌نهایت نقطه بحرانی مطرح می‌کنیم که ابزار اصلی کار است.

قضیه۲. ([19, Theorem 2.5]) فرض کنید X فضای باناخ انعکاسی و $\Phi,\Psi:X\to\mathbb{R}$ دو تابعک به طور دنباله وار نیم پیوسته ضعیف پایینی و مشتق پذیر گاتو[1] است. فرض کنید Ψ پیوسته (قوی) و $lim_{\|x\|\to+\infty}\Psi(x)=+\infty$ باشد. برای هر $\rho>inf_X\Psi$، فرض کنید:

$$\varphi(\rho):=\inf_{x\in\Psi^{-1}(]-\infty,\rho[)}\frac{\Phi(x)-\inf_{\overline{\Psi^{-1}(]-\infty,\rho[)}_w}\Phi}{\rho-\Psi(x)},$$

و $\overline{\Psi^{-1}(]-\infty,\rho[)}_w$ بستار $\Psi^{-1}(]-\infty,\rho[)$ در توپولوژی ضعیف در نظر گرفته شود. به‌علاوه قرار دهید:

$$\delta=\liminf_{\rho\to\left(\inf_X\Psi\right)^+}\varphi(\rho).$$

آن‌گاه اگر $\delta<+\infty$، برای هر $\lambda>\delta$، یکی از نتایج زیر برقرار است.

الف) مینیموم سراسری Ψ وجود دارد که مینیموم موضعی $\Phi+\lambda\Psi$ است.

ب) یا یک دنباله‌ی نقطه وار از نقاط بحرانی مجزا برای $\Phi+\lambda\Psi$ وجود دارد که به‌طور ضعیف به یک مینیموم موضعی Ψ همگرا است.

1. Gâteaux

فرض کنید $T \geq 2$ عدد صحیح مثبت ثابت، $[1,T]$ بازه گسسته $\{1,\dots,T\}$ باشد. فضای تابعی $T-$ بعدی:

$$W:=\{u:[0,T+1]\to\mathbb{R} | u(0)=u(T+1)=0\},$$

را تعریف می‌کنیم که فضای هیلبرت با نرم:

$$\|u\| = \left\{\sum_{k=1}^{T+1} w(k-1)|\Delta u(k-1)|^{p^-} + q(k)|u(k)|^{p^-}\right\}^{1/p^-}$$

است. چون W با بعد متناهی است، می‌توان نرم معادل آن را روی W بصورت:

$$\|u\|_+ = \left\{\sum_{k=1}^{T+1} w(k-1)|\Delta u(k-1)|^{p^+} + q(k)|u(k)|^{p^+}\right\}^{1/p^+}.$$

تعریف نمود. اکنون، فرض کنید $\psi : W \to \mathbb{R}$ با رابطه‌ی:

$$\psi(u) := \sum_{k=1}^{T+1} [w(k-1)|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)} + q(k)|u(k)|^{p(k)}],$$

داده شده باشد. در ادامه یک لم را ارائه می‌دهیم که از نامساوی‌های آن استفاده خواهیم نمود.

لم ۱ .[13, Lemma 2.1-2.2] برای هر $u \in W$، اعداد ثابت مثبت C_1 و C_2 وجود دارد به‌طوری که:

$$\psi(u) < 1 \Rightarrow \|u\|_+^{p^+} \leq \psi(u) \leq \|u\|^{p^-}, \tag{۳}$$

$$\|u\| \geq 1 \Rightarrow \|u\|^{p^-} - C_1 \leq \psi(u) \leq \|u\|_+^{p^+} + C_1, \tag{۴}$$

$$C_2\|u\|^{p^+} \leq \|u\|_+^{p^+} \leq 2^{\frac{p^+-p^-}{p^-}} C_2\|u\|^{p^+}, \tag{۵}$$

$$\|u\|_\infty := \max_{k\in[1,T]} |u(k)| \leq (2T+2)^{\frac{p^--1}{p^-}} \|u\|, \tag{۶}$$

می‌باشد. در این روابط ثابت‌های:

$$C_1 = (T+1)(w^+ + q^+) \in]1,+\infty[,$$

$$C_2 = \{(2T+2)\max\{w^+,q^+\}\}^{\frac{p^- - p^+}{p^-}} \in]0,1].$$

در نظر گرفته می‌شوند. تابعک‌های Ψ و Φ را به صورت:

$$\Psi(u) := \sum_{k=1}^{T+1}\left[\frac{w(k-1)}{p(k-1)}|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)} + \frac{q(k)}{p(k)}|u(k)|^{p(k)}\right], \tag{۷}$$

$$\Phi(u) := -\sum_{k=1}^{T} F(k,u(k)), \tag{۸}$$

انتخاب می‌کنیم، که در آن $F(k,t) := \int_0^t f(k,\xi)\,d\xi$ برای هر $(k,t) \in [1,T]\times\mathbb{R}$ فرض می‌شود.

به منظور مطالعه مساله (۱)، تابعک $I_\lambda : W \to \mathbb{R}$ را بصورت

$$I_\lambda(u) = -\sum_{k=1}^{T} F(k,u(k)) + \lambda\sum_{k=1}^{T+1}\left[\frac{w(k-1)}{p(k-1)}|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)} + \frac{q(k)}{p(k)}|u(k)|^{p(k)}\right],$$

تعریف می‌کنیم. چون مساله (۱) در فضای هیلبرت W با بعد متناهی مورد بررسی قرار می‌گیرد، اثبات خواص منظم تابعک I_λ مشکل نیست. بنابر این I_λ از کلاس C^1 روی W است با مشتق:

$$\begin{aligned} I'_\lambda(u)(v) = &-\sum_{k=1}^{T}\left[f(k,u(k))\right]v(k) \\ &+\lambda\sum_{k=1}^{T+1}\left[w(k-1)|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\Delta v(k-1)\right] \\ &+\lambda\sum_{k=1}^{T} q(k)|u(k)|^{p(k)-2}u(k)v(k), \end{aligned} \tag{۹}$$

برای هر $u,v \in W$ بیان می‌شود (بعنوان مثال [۱۵] را ببینید.)

واضح است که نقاط بحرانی I_λ برای λ و جواب‌های مساله (۱) برای λ^{-1} با هم یکسان هستند.

اکنون دو لم زیر را بیان می‌کنیم. در ابتدا برای سهولت قرار می‌دهیم:

$$A := \left(w(0) + w(T) + \sum_{k=1}^{T} q(k) \right),$$

$$B^0 := \limsup_{s\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{T} F(k,s)}{|s|^{p^-}}.$$

لم ۲. اگر $B^0 > 0$، آن‌گاه I_λ برای هر $\lambda \in]0, \frac{p^- B^0}{A}[$ در صفر مینیموم موضعی ندارد.

اثبات: نشان می‌دهیم که برای هر $r > 0$ یک $u_0 \in B_r(0) = \{u \in W, \|u\| < r\} \subset W$ وجود دارد به طوری که $I_\lambda(u_0) < I_\lambda(0) = 0$ است.

برای این منظور، عدد ثابت l با فرض $B^0 > l > \frac{A\lambda}{p^-}$ را انتخاب می‌کنیم. با در نظر گرفتن

$$\limsup_{s\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{T} F(k,s)}{|s|^{p^-}} > l,$$

می‌توان نتیجه گرفت که: دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت $\{b_n\}$ همگرا به صفر وجود دارد به‌طوری‌که عدد طبیعی ν وجود دارد که برای هر $n > \nu$، نتیجه می‌شود $\sum_{k=1}^{T} F(k, b_n) > l |b_n|^{p^-}$ یعنی:

$$\exists \nu \in \mathbb{N}, \forall n > \nu, \sum_{k=1}^{T} F(k, b_n) > l |b_n|^{p^-}. \quad (۱۰)$$

اکنون نشان می‌دهیم که برای هر $r > 0$ یک $u_0 \in W$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|u_0\| < r$:

برای این منظور می‌دانیم $n_0 > \nu$ وجود دارد به‌طوری که $b_{n_0} < \min\left\{ \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{p^-}} r, 1 \right\}$، چون $A > T + 2 \ge 4$ از اینرو واضح است $0 < b_{n_0} < r$. تابع $u_0(k)$ را بصورت زیر فرض کنید:

$$u_0(k) = \begin{cases} b_{n_0}, & k \in [1,T]; \\ 0, & k = 0, T+1, \end{cases}$$

است که $\|u_0\| = b_{n_0} A^{\frac{1}{p^-}}$ و چون $b_{n_0} < \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{p^-}} r$ از اینرو $\|u_0\| < r$.

اینک نشان می‌دهیم $I_\lambda(u_0) < I_\lambda(0) = 0$. برای این منظور با در نظر گرفتن $b_{n_0} < 1$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\Psi(u_0(k)) \le \frac{1}{p^-} \psi(u_0(k)) \le \frac{1}{p^-} \|u_0\|^{p^-}$$

$$= \frac{1}{p^-} \left(w(0) b_{n_0}^{p^-} + w(T) b_{n_0}^{p^-} + \sum_{k=1}^{T} q(k) b_{n_0}^{p^-} \right)$$

$$= \frac{b_{n_0}^{p^-}}{p^-} \left(w(0) + w(T) + \sum_{k=1}^{T} q(k) \right) = \frac{b_{n_0}^{p^-} A}{p^-}$$

در نتیجه $\Psi(u_0) \le \frac{b_{n_0}^{p^-} A}{p^-}$.

از طرفی از (۱۰) با در نظر گرفتن $n_0 > \nu$ نتیجه می‌گیریم: $\sum_{k=1}^{T} F(k, u_0(k)) \ge l |u_0(k)|^{p^-}$ و از آنجا $\Phi(u_0) = -\sum_{k=1}^{T} F(k, u_0(k)) \le -l |u_0(k)|^{p^-} = -l b_{n_0}^{p^-}$ ایجاب می‌شود. اینک با در نظر گرفتن $l > \frac{A\lambda}{p^-}$ داریم

$$I_\lambda(u_0) = \Phi(u_0) + \lambda \Psi(u_0) \le -l b_{n_0}^{p^-} + \lambda \frac{b_{n_0}^{p^-} A}{p^-}$$

$$= b_{n_0}^{p^-} \left(\lambda \frac{A}{p^-} - l\right) < 0 = \Phi(0) + \lambda \Psi(0).$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای هر $\lambda \in]0, \frac{p^- B^0}{A}[$ صفر مینیموم موضعی I_λ نیست.

۳- نتایج اصلی

قبل از بیان نتایج اصلی ابتدا فرض می‌کنیم:

$$B_0 := \liminf_{s\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{T} \min_{|\xi| \le |s|} F(k,\xi)}{|s|^{p^+}}.$$

قضیه ۳. فرض کنید $B^0=+\infty$ و $B_0<\infty$ و $f:[1,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع پیوسته باشد. آن‌گاه برای هر

$$\lambda\in\Lambda:=\left]0,\frac{1}{p^+B_0}\right[,$$

مساله (۱) یک دنباله بی‌کران از جواب‌ها را می‌پذیرد.

برهان: هدف، به‌کار گیری قضیه ۲ در این برهان است. برای این منظور ابتدا مشاهده می‌کنیم که $B_0<\infty$ ایجاب می‌کند که بازه Λ ناتهی است، لذا $\bar{\lambda}$ در Λ انتخاب و پس از آن ثابت در نظر گرفته می‌شود. برای ساختن چهار چوب تغییراتی برای حل مساله (۱)، ابتدا X را برابر با W قرار داده و تابع Ψ,Φ را نیز به ترتیب همان تابعک‌های تعریف شده در (۷) و (۸) برای هر $u\in W$ در نظر می‌گیریم. چون W با بعد متناهی است لذا با محاسبات ساده این اطمینان حاصل می‌شود که Ψ و Φ روی W از کلاس C^1 بوده که مشتق آنها برای هر $u,v\in W$ بصورت زیر است:

$$\Psi'(u)(v)=\sum_{k=1}^{T+1}w(k-1)|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\Delta v(k-1)$$
$$+\sum_{k=1}^{T}q(k)|u(k)|^{p(k)-2}u(k)v(k)$$
$$=-\sum_{k=1}^{T}\Delta(w(k-1)|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1))v(k)$$
$$+\sum_{k=1}^{T}q(k)|u(k)|^{p(k)-2}u(k)v(k),$$

$$\Phi'(u)(v)=-\sum_{k=1}^{T}f\left(k,u(k)\right)v(k).$$

همچنین Ψ اجباری[1] است یعنی وقتی که $\|u\|$ به سمت بی‌نهایت می‌رود $\Psi(u)$ نیز به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. در واقع، با فرض $u\in W$ به ازای $\|u\|>1$ و در نظر گرفتن (۴)، داریم:

$$\Psi(u)\geq\frac{1}{p^+}\psi(u)\geq\frac{\|u\|^{p^-}}{p^+}-\frac{C_1}{p^+}.$$

از این رو وقتی که $\|u\|$ به‌سمت بی‌نهایت می‌رود $\Psi(u)$ نیز به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. واضح است که $\inf_X\Psi=\Psi(0)=\Phi(0)=0$ است. بنابر این مفروضات منظم مورد نیاز در قضیه ۲ روی Ψ و Φ برقرار است. می‌دانیم که نقاط بحرانی درونی $I_{\bar{\lambda}}:=\Phi+\bar{\lambda}\Psi$ برای $\bar{\lambda}$ و جواب‌های مساله (۱) برای $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ دقیقاً با هم برابرند.

در ادامه $\delta<+\infty$ را ثابت می‌کنیم.

برای این منظور فرض می‌کنیم $\{b_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، $|b_n|$ به‌سمت صفر میل می‌کند. قرار می‌دهیم:

$$r_n:=\frac{|b_n|^{p^-}}{p^+}$$

در نظر می‌گیریم. واضح است که برای هر $n>\nu$، $\frac{1}{p^+}>r_n$ و r_n به‌سمت صفر می‌رود وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. با توجه به متناهی بودن بعد فضا $\overline{\Psi^{-1}(]-\infty,r_n[)}_W=\Psi^{-1}(]-\infty,r_n[)$ از این‌رو برای هر $u\in\overline{\Psi^{-1}(]-\infty,r_n[)}_W=\Psi^{-1}(]-\infty,r_n[)$ با $n>\nu$، داریم:

$$\frac{1}{p^+}>r_n>\Psi(u)\geq\frac{1}{p^+}\psi(u)\geq\frac{\|u\|_+^{p^+}}{p^+}\geq\frac{|u(k)|^{p^+}}{p^+},\quad\forall k\in[1,T],$$

که آن ایجاب می‌کند:

$$|u(k)|<(r_np^+)^{\frac{1}{p^+}}=|b_n|.$$

و از این رو:

$$\|u\|_\infty=\max_{k\in[1,T]}|u(k)|\leq|b_n|.$$

لذا:

$$-\inf_{\Psi^{-1}(]-\infty,r_n[)_W}\Phi(u)\leq$$

---

1. Coercive

$$-\inf_{\|u\|_\infty\le|b_n|}\Phi(u)\le\sum_{k=1}^{T}\min_{|\xi|\le|b_n|}F(k,\xi).$$

بنابراین داریم:

$$\varphi(r_n)=\inf_{x\in\Psi^{-1}(]-\infty,r_n[)}\frac{\Phi(x)-\inf_{\overline{\Psi^{-1}(]-\infty,r_n[)}_w}\Phi}{r_n-\Psi(x)}\le\frac{\Phi(0)-\inf_{\overline{\Psi^{-1}(]-\infty,r_n[)}_w}\Phi}{r_n-\Psi(0)}=\frac{-\inf_{u\in\Phi^{-1}]-\infty,r_n[}\Phi(u)}{\frac{|b_n|^{p^+}}{p^+}}$$

$$\le\frac{\sum_{k=1}^{T}\min_{|\xi|\le|b_n|}F(k,\xi)}{\frac{|b_n|^{p^+}}{p^+}}.$$

حال می‌توان نتیجه گرفت:

$$\delta=\liminf_{r\to(\inf_X\Psi)^+}\phi(r)=\liminf_{r\to0^+}\phi(r)$$

$$\le p^+\liminf_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{T}\min_{|\xi|\le|b_n|}F(k,\xi)}{|b_n|^{p^+}}\le p^+B_0.$$

که با در نظر گرفتن $B_0<\infty$، حکم $\delta<\infty$ نتیجه می‌شود.

چون $B^0=\infty$، لذا به کمک لم ۲ به ازای هر $\lambda\in]\delta,+\infty[\subset]0,\frac{p^-B^0}{A}[=]0,+\infty[$، برای مینیموم سراسری و یکتای صفر از Ψ تابعک I_λ در صفر مینیموم موضعی نمی‌تواند داشته باشد. بنابر این برای هر $\lambda\in]\delta,\infty[\subset]0,+\infty[$، مینیموم سراسری از Ψ وجود دارد که مینیموم موضعی $\Phi+\lambda\Psi$ نیست، ازاین‌رو نتیجه الف) قضیه ۲ برقرار نبوده و طبق نتیجه ب) قضیه ۲ تابعک $I_{\bar\lambda}:=\Phi+\bar\lambda\Psi$ برای هر $\bar\lambda$ در $]p^+B_0,+\infty[\subseteq]\delta,+\infty[$ بی‌نهایت نقاط بحرانی دارد، بنابراین مساله (۱) برای هر

$$\lambda\in\Lambda=\left]0,\frac{1}{p^+B_0}\right[\subset\left]0,\frac{1}{\delta}\right[,$$

یک دنباله بی‌کران از جواب‌های u_n می‌پذیرد و اثبات تمام می‌شود.

گزاره ۱. اگر u_n همان جواب‌های به‌دست آمده از قضیه ۳ باشند آن‌گاه $\lim_{n\to+\infty}\|u_n\|=0$ و برای هر $k\in[0,T+1]$، $\lim_{n\to+\infty}u_n(k)=0$.

اثبات: چون $u_n\in\overline{\Psi^{-1}(]-\infty,r_n[)}$ می‌باشد، با در نظر گرفتن (۲)، (۳) و (۵)، داریم

$$\frac{1}{p^+}>r_n>\Psi(u_n)\ge\frac{1}{p^+}\psi(u_n)\ge\frac{\|u_n\|_+^{p^+}}{p^+}\ge\frac{C_2\|u_n\|^{p^+}}{p^+}$$

از این‌رو:

$$\|u_n\|<\frac{|b_n|}{(2T+2)^{\frac{p^--1}{p^-}}},$$

همچنین طبق (۶) داریم:

$$0<|u_n(k)|<(2T+2)^{\frac{p^--1}{p^-}}\|u_n\|<|b_n|$$

حال با در نظر گرفتن حد b_n در بی‌نهایت که صفر می‌شود، حکم نتیجه می‌شود.

تبصره ۱. اگر f در یک همسایگی صفر، نامثبت باشد، آن‌گاه طبق اصل مقایسه قوی [4, Theorem 2.2]، جز تعداد متناهی، از بی‌نهایت جواب $u_n\in W$ به‌دست آمده از قضیه ۳ برای مساله (۱)، بقیه آنها صفر و یا منفی هستند. در واقع، مشابه اثبات صورت گرفته در مرجع [8, Lemma 2.3]، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\Delta u_n(k-1)\Delta u_n^+(k-1)\ge0,\ \forall k\in[1,T+1],$$

$$u(k)u_n^+(k)\ge0,\ \ \forall k\in[1,T+1],$$

که در آن برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $k\in[0,T+1]$

$$u_n^+(k):=\max\{0,u_n(k)\},$$

$$u_n^-(k):=\max\{0,-u_n(k)\}$$

می‌باشد. چون $u_n \in W$ جواب مساله (۱) است طبق (۹) و با قرار دادن $v = u_n^+$ در معادله $I'_\lambda(u_n)(v) = 0$ یعنی

$$0=-\sum_{k=1}^{T}\left[f\left(k,u_n(k)\right)\right]u_n^+(k)$$
$$+\lambda\sum_{k=1}^{T+1}\left[w(k-1)|\Delta u_n(k-1)|^{p(k-1)-2}\Delta u_n(k-1)\Delta u_n^+(k-1)\right]$$
$$+\lambda\sum_{k=1}^{T}q(k)\,|u_n(k)|^{p(k)-2}\,u_n(k)u_n^+(k), \qquad (۱۱)$$

طبق گزاره ۱ چون برای هر $k \in [0, T+1]$، $\lim_{n\to+\infty} u_n(k) = 0$ از این‌رو برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، عدد طبیعی ν وجود دارد که برای هر $n > \nu$ و $k \in [0, T+1]$، $|u_n(k)| < \varepsilon$ لذا $f(k,u_n(k)) \le 0$ و به دلیل اینکه مجموع همه‌ی جملات معادله (۱۱) باید برابر صفر شود، نتیجه می‌گیریم که برای هر $k \in [1,T]$، $u_n^+(k) = 0$ است. آن‌گاه $u_n = -u_n^- \le 0$. بنابر این برای هر $n > \nu$، u_n جواب‌های نامثبت مساله (۱) است.

همچنین در قضیه ۳ اگر برای هر $k \in [0,T]$، $f(k,0) = 0$ باشد، جواب‌های به‌دست آمده منفی است. ([4, Remark 2.1] را ببینید).

در واقع، به‌روش برهان خلف، فرض کنید u_n منفی نباشد، بنابر این یک $k \in [1,T]$ وجود دارد به‌طوری‌که $u_n(k) = 0$ و $u_n(k-1), u_n(k+1) < 0$. آن‌گاه، طبق (۱) و مثبت بودن $w(k)$ و $w(k-1)$، نتیجه می‌شود:

$$-w(k)\,|u_n(k+1)|^{p(k)-2}\,u_n(k+1)$$
$$-w(k-1)\,|u_n(k-1)|^{p(k-1)-2}\,u_n(k-1) = \lambda f(k,0),$$

که یک تناقض است زیرا جمله سمت چپ مثبت در حالی که جمله سمت راست صفر است. بنابر این جواب‌های به دست آمده باید منفی باشند.

تبصره ۲. اگر در قضیه ۳، $B_0 = 0$ فرض شود آن‌گاه برای هر $\lambda > 0$، مساله (۱) بی‌نهایت جواب در W می‌پذیرد.

به‌عنوان مثال، اگر $f(k,x)$ در یک همسایگی مبدا تابع فرد و صعودی باشد آن‌گاه $F(k,x)$ زوج بوده و با توجه به این‌که $F(k,0) = 0$ نتیجه می‌شود، $\min_{-\varepsilon\le x\le\varepsilon} F(k,x) = F(k,0) = 0$.

از این رو

$$\min_{|\xi|\le|b_n|} F(k,\xi) = \min_{-|b_n|\le\xi\le|b_n|} F(k,\xi) = F(k,0) = 0$$

لذا $B_0 = 0$.

مثال ۱. فرض کنید $T \ge 2$ یک عدد صحیح زوج و ثابت است و $p(k)$ چنان باشد که $p^+ = T+4$ و $p^- = T+2$ است همچنین $F(k,s)$ تابع پیوسته است به‌طوری که

$$F(k,s) = \begin{cases} s^T(\sin^2(\ln|s|)), & s \ne 0 \\ 0 & s = 0 \end{cases}$$

است. از این رو

$$B_0 := \liminf_{s\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{T}\min_{|\xi|\le|s|} F(k,\xi)}{|s|^{p^+}}$$
$$= \liminf_{s\to 0} \frac{Ts^T(\sin^2(\ln|s|))}{|s|^{T+4}}$$
$$= \liminf_{s\to 0} \frac{T\sin^2(\ln|s|)}{|s|^4} = 0$$

در واقع با انتخاب دنباله $s_n = e^{-n\pi}$ که $s_n \to 0$ نتیجه می‌شود:

$$B_0 = \lim_{n\to+\infty} T.e^{4n\pi}.0 = 0.$$

همچنین $B^\infty = +\infty$ زیرا

$$B^0 := \limsup_{s\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{T} F(k,s)}{|s|^{p^-}}$$
$$= \limsup_{s\to 0} \frac{Ts^T(\sin^2(\ln|s|))}{|s|^{T+2}} = +\infty$$

در واقع با انتخاب دنباله $s_n = e^{-\frac{(2n+1)\pi}{2}}$ که $s_n \to 0$ نتیجه می‌شود:

$$B^0 = \lim_{n\to+\infty} T.e^{(2n+1)\pi}.1 = +\infty.$$

اینک از قضیه ۳ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر:

$$\lambda \in \left]0, \frac{1}{p^+ B_0}\right[=]0,+\infty[,$$

مساله (۱) یک دنباله بی‌کران از جواب‌های u_n می‌پذیرد و $\lim_{n\to+\infty}\|u_n\| = 0$ است.

تبصره ۴. اثبات قضیه ۱ را می‌توان بر مبنای اثبات قضیه ۳ و گزاره ۱ و با انتخاب $q(k) = w(k) = 1$ و $p(k) = k + 3$ ارائه نمود.

در اینجا یک مثال برای توضیح نتیجه قضیه ۱ ارائه می‌دهیم.

مثال ۲. فرض کنید $T \geq 2$ یک عدد طبیعی است و $f(t) = t$ بنابر این

$$\int_0^s f(t)dt = \frac{s^2}{2},$$

و

$$\limsup_{s\to 0}\frac{\int_0^s f(t)dt}{|s|^3} = \limsup_{s\to 0}\frac{1}{2|s|} = +\infty.$$

از این‌رو طبق قضیه ۱، مساله:

$$\begin{cases} -\Delta(|\Delta u(k-1)|^k \Delta u(k-1)) + |u(k)|^{k+1} u(k) \\ = \lambda u(k), \quad k \in [1,T], \\ u(0) = u(T+1) = 0, \end{cases}$$

برای هر $\lambda \in]0,+\infty[$ یک دنباله بی‌کران از جواب‌های u_n می‌پذیرد و

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{T+1}|\Delta u_n(k-1)|^3 + |u_n(k)|^3\right\}^{1/3} = 0.$$

تشکر و قدردانی

از جناب آقای پروفسور ریچری بابت راهنمایی ایشان در نگارش این مقاله نهایت قدردانی و تشکر را داریم. از داوران محترم بابت داوری این مقاله کمال تشکر و قدردانی را داریم. این پروژه توسط دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری با شماره گرنت 04-1395-05 حمایت شده است.

فهرست منابع

[1] M Avci (2016). Existence results for anisotropic discrete boundary value problems, Electronic J. Diff. Eq.

[2] M Avci, A Pankov (2015) Nontrivial solutions of discrete nonlinear equations with variable exponent, J. Math. Anal. Appl.

[3] L-H Bian, H-R Sun and Q-G Zhang, (2012) Solutions for discrete p-Laplacian periodic boundary value problems via critical point theory, J. Differ. Equ. Appl.

[4] G Bonanno, P Candito (2009) Infinitely many solutions for a class of discrete non-linear boundary value problems, Appl. Anal.

[5] G Bonanno, P Candito (2009) Nonlinear difference equations investigated via critical points methods, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.

[6] G Bonanno, P Candito and G D'Agu'i (2014) Variational methods on finite dimensional Banach spaces and discrete problems, Adv. Nonlinear Stud.

[7] G Bonanno, G Molica Bisci (2009) Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities, Bound. Value Probl.

[8] M Galewski, S Glab and R Wieteska (2013) Positive solutions for anisotropic discrete boundary-value problems, Electronic Journal of Differential Equations.

[9] L Jiang, Z Zhou (2008) Three solutions to Dirichlet boundary value problems for p-Laplacian difference equations, Adv. Diff. Equ.

[10] M Khaleghi Moghadam (2018) Existence of infinitely many solutions for a class of difference equations with boundary value conditions involving p(k)-Laplacian operator, Cogent Mathematics & Statistics

[11] M Khaleghi Moghadam, M Avci (2017) Existence results to a nonlinear $p(k)$-Laplacian difference equation, J. Difference Equ. Appl.

[12] M Khaleghi Moghadam, S Heidarkhani and J. Henderson (2014) Infinitely many solutions for perturbed difference equations, J. Difference Equ. Appl.

[13] M Khaleghi Moghadam, J Henderson (2017) Triple solutions for a dirichlet boundary value problem involving a perturbed discrete $p(k)$-laplacian operator, Open Mathematics J.

[14] M Khaleghi Moghadam, L Li and S Tersian (2018) Existence of three solutions for a discrete anisotropic boundary value problem, Bull. Iranian Math. Sco.

[15] M Khaleghi Moghadam, R Wieteska (2018) Existence and uniqueness of positive solution for nonlinear difference equations involving p(k)- Laplacian operator, An. Stiint. Univ. Ovidius Constant a Ser. Mat.

[16] Y Liu, W Ge (2003) Twin positive solutions of boundary value problems for finite difference equations with p-Laplacian operator, J. Math. Anal. Appl.

[17] Y Li, L Lu (2006) Existence of positive solutions of p-Laplacian difference equations, Appl. Math. Lett.

[18] M Mih$\breve{a}$ilescu, V R$\breve{a}$dulescu and S

Tersian (2009) Eigenvalue problems for anisotropic discrete boundary value problems, J. Difference Equ. Appl.

[19] B Ricceri (2000) A general variational principle and some of its applications, J. Comput. Appl. Math.

[20] A Salari, G Caristi, D Barilla and A Puglisi (2016) A variational approach to perturbed discrete anisotropic equations, Abstr. Appl. Anal.