دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

شاخص‌سازی فضاهای متری S-هاسدورف و قضایای جفت نقطه ثابت قوی برای نگاشتهای انقباضی جفتی

قربان خلیل‌زاده‌رنجبر[۱*]، محمداسماعیل سامعی[۱]

[۱] استاد گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی‌سینا، ۶۵۱۷۸ همدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۷/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۰۲

چکیده

در مطالعه نقاط ثابت یک نگاشت، مفاهیم کلی‌تر، یعنی جفت نقطه ثابت مفید است. در این مقاله ما با استفاده از مفهوم متر جزئی، یک فضای متریک S-هاسدورف روی مجموعه شامل زیرمجموعه‌های بسته و کراندار X را معرفی می‌کنیم. سپس نتایج نقطه ثابت نگاشتهای چند مقداری پیوسته و پوشا را ارائه می‌کنیم. علاوه بر آن اثباتی بر قضیه انقباضی نادلر برای نگاشتهای چندمقداری در این فضای متریک ارائه می‌دهیم. در ادامه، با بیان نگاشتهای نوع جفتی شبه باناخ، شرایط وجود جفت نقطه ثابت قوی منحصربفرد را در این نگاشتها بررسی می‌کنیم. نگاشت انقباضی چاترجا، Fاز $X\times X$ به X در نامساوی

$$d(F(x,y),F(u,v))\le k\ \max\{d(x,F(u,v)),d(F(x,y),u)\},$$

نسبت به زیرمجموعه‌های A و Bاز X صدق می‌کند که در آن x و v متعلق به A، y و u متعلق به B و k متعلق به $(0,\frac{1}{2})$ هستند. همچنین برخی نامساویهای انقباضی از نوع شبه باناخ و شبه چاترجا را تعریف می‌کنیم. بعلاوه قضایایی درباره جفت نقاط ثابت اثبات خواهیم کرد. سرانجام برای درک نتایج حاصل مثالهای متعددی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: فضای متریک، S-هاسدورف جزئی، جفت نقاط ثابت، جفت نقاط ثابت قوی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: gh_khalilzadeh@yahoo.com

۱- مقدمه

جفت نقطه ثابت اولین بار در سال ۱۹۸۷ توسط جیو[۲] [۸] معرفی گردید. سپس نتایج ان در کارهایی از برایند[۳]، بلیجیلی[۴]، شودهاری[۵] و لکشمیکانتهام[۶] استفاده شد [۳، ۴، ۵، ۶ و ۹]. در سال ۲۰۰۶، یکی از نکات مهم آن که به قضیه نگاشت انقباضی جفتی معروف است توسط بهاسکار[۷] ارائه شده است [۲].

۲- تعاریف و مقدمات

فرض کنیم (X,d) فضای متریک و $CB(X)$ نشان دهنده مجموعه تمام زیرمجموعه‌های بسته و کراندار X باشد. متریک هاسدورف القا شده به وسیله d روی $CB(X)$ به صورت زیر برای هر A و B متعلق به $CB(X)$ تعریف می‌شود:

$$H(A,B)=\max\left\{\sup_{a\in A}d(a,B),\sup_{b\in B}d(b,a)\right\},$$

که در آن

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a)\,|\,a\in A\}$$

نشان دهنده فاصله x از مجموعه A می‌باشد [۱].

تعریف ۲-۱: فرض کنیم X مجموعه غیرخالی باشد. عضو x متعلق به X را نقطه ثابت نگاشت مجموعه مقدار $T:X\to 2^X$ می‌نامیم هرگاه $x\in Tx$ باشد، که در آن 2^X نشان دهنده مجموعه تمام زیرمجموعه‌های X است.

نگاشت مجموعه مقدار $T:X\to CB(X)$ انقباضی نامیده می‌شود هرگاه برای x و y متعلق به X و k متعلق به $[0,1)$ داشته باشیم

$$H(Tx,Ty)\le kd(x,y).$$

مطالعه نقاط ثابت برای انقباض‌های مجموعه مقدار توسط نادلر[۸] در سال ۱۹۶۹ میلادی انجام گرفته است که قضیه آن به صورت زیر است [۱۴].

قضیه ۲-۲: فرض کنیم (X,d) فضای متریک کامل و T نگاشت انقباضی مجموعه مقدار از X به $CB(X)$ باشد. آنگاه $x\in X$ وجود دارد بطوریکه $x\in Tx$.

تعریف ۲-۳: فرض کنیم X مجموعه غیرخالی باشد. تابع ρ از $X\times X$ به $\mathbb{R}^+$ متر جزئی روی X نامیده می‌شود هرگاه برای هر x، y و z متعلق به X شرایط زیر برقرار باشند.

(ρ_1) $x=y$ اگر و فقط اگر

$$\rho(x,x)=\rho(y,y)=\rho(x,y).$$

(ρ_2) $\rho(x,x)\le\rho(x,y)$.

(ρ_3) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

(ρ_4) $\rho(x,y)$. همواره کوچکتر یا مساوی

$$\rho(x,z)+\rho(z,y)-\rho(z,z)$$

باشد.

در این صورت (X,ρ) را فضای متری جزئی می‌گوییم.

مثال ۲-٤: فرض کنیم

$$X=\{[a,b]:a,b\in\mathbb{R},a\le b\},$$

آنگاه

$$\rho([a,b],[c,d])=\max\{b,d\}-\min\{a,c\}$$

یک فضای متری جزئی روی X خواهد بود.

ملاحظه ۲-٥: فرض کنیم ρ متر جزئی روی X باشد.

(۱) ρ روی X توپولوژی τ_ρ روی X تولید می‌کند بطوریکه اعضای مبنای آن، یک خانواده از ρ-گوی‌های باز

$$\mathcal{B}=\{B_\rho(x,\varepsilon):x\in X,\varepsilon>0\},$$

می‌باشد که در آن

$$B_\rho(x,\varepsilon)=\{y\in X:\rho(x,y)<\rho(x,x)+\varepsilon\}$$

(۲) گوییم دنباله $\{x_n\}$ در فضای متری جزئی (X,ρ) همگرا به عضو x متعلق به X می‌باشد اگر و فقط اگر

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x,x_n)=\rho(x,x).$$

(۳) اگر ρ یک فضای متری جزئی روی X باشد. تابع ρ^s که به صورت

$$\begin{cases}\rho^s:X\times X\to\mathbb{R}^+\\ \rho^s(x,y)=2\rho(x,y)-\rho(x,x)\\ -\rho(y,y)\end{cases}$$

تعریف می‌شود، یک متریک روی X است.

(۴) گوییم دنباله $\{x_n\}$ در (X,ρ^s) همگرا به عضو x از X هست اگر و فقط اگر

---

[۲] Gue
[۳] Berinde
[۴] Bilgili
[۵] Choudhury
[۶] Lakshmikantham
[۷] Bahaskar
[۸] Nadler

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_m)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)$$
$$=\rho(x,x).$$

تعریف۲-٦: [۱۵]

(۱) دنباله $\{x_n\}$ در X، دنباله کوشی نامیده می‌شود هرگاه $\lim_{n,m\to\infty}\rho(x_n,x_m)$ موجود و متناهی باشد.

(۲) (X,ρ) را فضای متریک کامل گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد. بدین معنی که $\lim_{n\to\infty}(\rho,x_n)=\rho(x,x)$.

لم۲-۷: [۱۵] فرض کنیم (X,ρ) یک فضای متریک جزئی باشد.

(۱) $\{x_n\}$ دنباله کوشی در (X,ρ) است اگر و فقط اگر $\{x_n\}$ دنباله کوشی در (X,ρ^s) باشد.

(۲) فضای متری جزئی (X,ρ) کامل است اگر و تنها اگر فضای متری (X,ρ^s) کامل باشد.

تعریف۲-۸: فرض کنیم (X,ρ) یک فضای متری جزئی و $CB^\rho(X)$ خانواده‌ای از تمام زیرمجموعه‌های بسته و کراندار X باشد. مجموعه A در (X,ρ)را کراندار گوییم اگر x_0 متعلق به X و $M\geq 0$ وجود داشته باشند بطوریکه برای هر a متعلق به A داشته باشیم $a\in B_\rho(x_0,M)$. بدین معنی که

$$\rho(x_0,a)<\rho(a,a)+M.$$

تعریف۲-۹: فرض کنیم A و B متعلق به $CB^\rho(X)$ و x نیز متعلق به مجموعه X باشد. $\rho(x,A)$، $\delta_\rho(A,B)$ و $\delta_\rho(B,A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(x,A)=\inf\{\rho(x,a):a\in A\},$$
$$\delta_\rho(A,B)=\sup\{\rho(a,B):a\in A\},$$
$$\delta_\rho(B,A)=\sup\{\rho(b,A):b\in B\}.$$

ملاحظه۲-۱۰: فرض کنیم (X,ρ) فضای متری جزئی و A هر زیرمجموعه خالی در (X,ρ) باشد. آنگاه a متعلق به $\overline{A}$ نشان دهنده بستار مجموعه A نسبت به متر جزئی ρ است.

گزاره۲-۱۱: فرض کنیم (X,ρ) یک فضای متری جزئی باشد. برای هر A، B و C متعلق به $CB^\rho(X)$ احکام زیر برقرارند:

(۱) $\delta_\rho(A,A)=\sup\{\rho(a,a):a\in A\}$؛

(۲) $\delta_\rho(A,A)\leq\delta_\rho(A,B)$؛

(۳) $\delta_\rho(A,B)=0$، آنگاه $A\subseteq B$؛

(۴)
$$\delta_\rho(A,B)\leq\delta_\rho(A,C)+\delta_\rho(C,B)-\inf_{c\in C}\rho(c,c).$$

گزاره۲-۱۲: [۱۵] فرض کنیم (X,ρ) یک فضای متری جزئی باشد. برای هر A، B و C متعلق به $CB^\rho(X)$ احکام زیر برقرارند:

(h۱) $H_\rho(A,A)\leq H_\rho(A,B)$؛

(h۲) $H_\rho(A,B)=H_\rho(B,A)$؛

(h۳)
$$H_\rho(A,B)\leq H_\rho(A,C)+H_\rho(C,B)-\inf_{c\in C}\rho(c,c).$$

نتیجه۲-۱۳: [۱۵] فرض کنیم (X,ρ) یک فضای متری جزئی باشد. برای هر A و B متعلق به $CB^\rho(X)$، اگر $H_\rho(A,B)$ برابر صفر باشد، آنگاه $A=B$.

توجه داشته باشید که عکس نتیجه در حالت کلی برقرار نیست.

مثال۲-۱٤: فرض کنیم $X=[0,1]$ و

$$\begin{cases}\rho:X\times X\to\mathbb{R}^+\\ \rho(x,y)=\max\{x,y\}\end{cases}$$

تعریف شده باشد. آنگاه

$$H_\rho(x,x)=\delta_\rho(x,x)$$
$$=\sup\{x:0\leq x\leq 1\}$$
$$=1\neq 0.$$

لم۲-۱۵: [۱۵] فرض کنیم (X,ρ) یک فضای متری جزئی باشد، A و B متعلق به $CB^\rho(X)$ و $h>1$ باشد. برای هر $a\in A$، $b=b(a)\in B$ وجود دارد بطوریکه $\rho(a,b)\leq hH\rho(A,B)$.

قضیه۲-۱۶: [۱۵] فرض کنیم (X,ρ) فضای متری کامل باشد. اگر $T:X\to CB^{\rho}(X)$ نگاشت مجموعه مقداری باشد بطوریکه برای هر x و y داشته باشیم

$$H_{\rho}(Tx,Ty)\le k\,\rho(x,y).$$

که در آن $k\in[0,1)$. در این صورت T دارای نقطه ثابت است.

۳- نتایج در فضاهای متریک جزئی

تعریف۳-۱: فرض کنیم (X,ρ) فضای متری جزئی و A، B و C متعلق به $CB^{\rho}(X)$ باشند. $\delta_{\rho}(A,B,C)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\delta_{\rho}(A,B,C) = \max\{\delta_{\rho}(A,B),\delta_{\rho}(A,C),\delta_{\rho}(B,C)\},$$
$$\delta_{\rho}(A,C,B) = \max\{\delta_{\rho}(A,C),\delta_{\rho}(A,B),\delta_{\rho}(C,B)\}$$

و

$$\delta_{\rho}(B,A,C)=\max\{\delta_{\rho}(B,A),\delta_{\rho}(B,C),\delta_{\rho}(A,C)\}.$$

گزاره۳-۲: فرض کنیم (X,ρ) فضای متری جزئی و A، B و C متعلق به $CB^{\rho}(X)$ باشند. در این صورت احکام زیر برقرارند.

(۱)

$$\delta_{\rho}(A,A,A)=\delta_{\rho}(A,A) =\sup\{\rho(a,a):a\in A\};$$

(۲)

$$\delta_{\rho}(A,A,A)\le\delta_{\rho}(A,B,B),$$
$$\delta_{\rho}(A,A,A)\le\delta_{\rho}(A,C,B);$$

(۳) اگر $\delta_{\rho}(A,B,C)=0$ آنگاه $A\subseteq B\subseteq C$.

(۴)

$$\delta_{\rho}(A,B,C)\le\delta_{\rho}(A,B,D) +\delta_{\rho}(A,D,C)+\delta_{\rho}(D,B,C).$$

اثبات: با توجه به گزاره ۲-۱۱ اثبات احکام بدیهی است.

تعریف۳-۳: فرض کنیم (X,ρ) فضای متری جزئی و A، B و C متعلق به $CB^{\rho}(X)$ باشند. متر S- هاسدورف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H_{\rho}(A,B,C)=\max\{H_{\rho}(A,B), H_{\rho}(A,B),H_{\rho}(B,C)\}.$$

ملاحظه می شود که

(۱)

$$H_{\rho}(B,A,C)=H_{\rho}(A,B,C) =H_{\rho}(A,C,B) =H_{\rho}(C,B,A);$$

(۲)

$$H_{\rho}(A,C)\le H_{\rho}(A,B,C),$$
$$H_{\rho}(A,B)\le H_{\rho}(A,B,C)$$

و

$$H_{\rho}(B,C)\le H_{\rho}(A,B,C);$$

(۳)

$$H_{\rho}(A,A,B)=H_{\rho}(A,B)$$
$$H_{\rho}(A,A,A)=H_{\rho}(A,A)$$

و

$$H_{\rho}(A,A,B)=H_{\rho}(A,B);$$

(۴) برای هر A، B، C و D متعلق به $CB^{\rho}(X)$ داریم

$$H_{\rho}(A,B,C)\le H_{\rho}(A,B,D) +H_{\rho}(D,B,C)+H_{\rho}(A,D,C).$$

نتیجه۳-۴: فرض کنیم (X,ρ) فضای متری جزئی و A، B و C متعلق به $CB^{\rho}(X)$ باشند. اگر $H_{\rho}(A,B,C)=0$ باشد، آنگاه $A=B=C$.

لم۳-۵: فرض کنیم (X,ρ) فضای متری جزئی، A، B و C متعلق به $CB^{\rho}(X)$ و نیز $h>1$ باشند. برای هر a متعلق به A، $b=b(a)\in B$ و

$$c=C(a,b)\in C$$

وجود دارد بطوریکه

$$\max\{\rho(a,b),\rho(a,c),\rho(b,c)\} \le hH_{\rho}(A,B,C).$$

اثبات. بنابر لم ۲-۱۵ داریم

$$\rho(a,b)\le hH_{\rho}(A,B)\le hH_{\rho}(A,B,C),$$
$$\rho(a,c)\le hH_{\rho}(A,C)\le hH_{\rho}(A,B,C),$$
$$\rho(c,b)\le hH_{\rho}(C,B)\le hH_{\rho}(A,B,C).$$

لذا

$$\max\{\rho(a,b),\rho(a,c),\rho(b,c)\}$$

نابیشتر از $hH_\rho(A,B,C)$ خواهد بود.

قضیه۳-٦: فرض کنیم (X,ρ) فضای متری جزئی کامل و $CB^\rho(X)$ فضای متری کامل نسبت به S-- متریک هاسدورف باشد. اگر

$$T:X\to CB^\rho(X)$$

نگاشت مجموعه مقدار پوشا و پیوسته باشد، بطوریکه برای هر x، y و z متعلق به X و $k\in(0,1)$ داشته باشیم

$$H_\rho(Tx,Ty,Tz)\le k\max\{\rho(x,y),\rho(x,z),\rho(y,z)\}.$$

آنگاه T دارای نقطه ثابت است.

اثبات. فرض کنیم $x_0\in X$، $x_1\in Tx_0$، x_2 متعلق به Tx_1 و x_3 نیز متعلق به Tx_2 باشند. در این صورت داریم

$$H_\rho(Tx_1,Tx_2,Tx_3)\le k\max\{\rho(x_1,x_2),\rho(x_2,x_3),\rho(x_1,x_3)\}.$$

با استفاده از لم ۲-۱۵ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&H_\rho(Tx_1,Tx_2,Tx_3)\\
&\le k\max\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{k}H_\rho(Tx_0,Tx_1),\frac{1}{k}H_\rho(Tx_1,Tx_2),\\ \frac{1}{k}H_\rho(Tx_0,Tx_2)\end{array}\right\}\\
&=\sqrt{k}\max\{H_\rho(Tx_0,Tx_1),H_\rho(Tx_1,Tx_2),\\
&H_\rho(Tx_0,Tx_2)\}\\
&=\sqrt{k}H_\rho(Tx_0,Tx_1,Tx_2).
\end{aligned}$$

به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
&H_\rho(Tx_3,Tx_4,Tx_5)\le\sqrt{k}H_\rho(Tx_2,Tx_3,Tx_4)\\
&\le\left(\sqrt{k}\right)^2H_\rho(Tx_1,Tx_2,Tx_3)\\
&\le\left(\sqrt{k}\right)^3H_\rho(Tx_0,Tx_1,Tx_2).
\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از استقرای ریاضی داریم:

$$H_\rho(Tx_n,Tx_{n+1},Tx_{n+2})\le\left(\sqrt{k}\right)^nH_\rho(Tx_0,Tx_1,Tx_2).$$

حال نشان می دهیم دنباله $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله کوشی در

$$(CB^\rho(X),H_\rho)$$

می باشد .برای هر m و n متعلق به □ داریم:

$$\begin{aligned}
&H_\rho(Tx_n,Tx_n,Tx_m)\\
&\le H_\rho(Tx_n,Tx_m)\\
&\le H_\rho(Tx_n,Tx_{n+1})+H_\rho(Tx_{n+1},Tx_m)\\
&-\inf_{a_1\in Tx_{n+1}}\rho(a_1,a_2)\\
&\le H_\rho(Tx_n,Tx_{n+1})+H_\rho(Tx_{n+1},Tx_m)\\
&\le H_\rho(Tx_n,Tx_{n+1})+H_\rho(Tx_{n+1},Tx_{n+2})\\
&+H_\rho(Tx_{n+2},Tx_m)-\inf_{a_2\in Tx_{n+2}}\rho(a_2,a_2)\\
&\le H_\rho(Tx_n,Tx_{n+1})+H_\rho(Tx_{n+1},Tx_{n+2})\\
&+\cdots+H_\rho(Tx_{m-1},Tx_m).
\end{aligned}$$

حال با استفاده از قضیه ۲-۱۶ داریم:

$$\begin{aligned}
H_\rho(Tx_n,Tx_n,Tx_m)\le{}&k\,\rho(x_n,x_{n+1})\\
&+k\,\rho(x_{n+1},x_{n+2})\\
&+\cdots+k\,\rho(x_{m-1},x_m).
\end{aligned}$$

مجددا بنابر لم ۲-۱۵ داریم:

$$\begin{aligned}
&H_\rho(Tx_n,Tx_n,Tx_m)\\
&\le\frac{k}{\sqrt{k}}\left\{\begin{array}{l}H_\rho(Tx_{n-1},Tx_n)+H_\rho(Tx_n,Tx_{n+1})\\ +\cdots H_\rho(Tx_{m-2},Tx_{m-1})\end{array}\right\}\\
&=\sqrt{k}\left\{\begin{array}{l}H_\rho(Tx_{n-1},Tx_{n-1},Tx_n)\\ +H_\rho(Tx_n,Tx_n,Tx_{n+1})\\ +\cdots\\ +H_\rho(Tx_{m-2},Tx_{m-2},Tx_{m-1})\end{array}\right\}\\
&\le\sqrt{k}\times\left\{\begin{array}{l}\left(\sqrt{k}\right)^{n-1}H_\rho(Tx_0,Tx_0,Tx_1)\\ +\cdots\\ +\left(\sqrt{k}\right)^{m-2}H_\rho(Tx_0,Tx_0,Tx_1)\end{array}\right\}\\
&=\sqrt{k}\times\left\{\begin{array}{l}\left(\sqrt{k}\right)^{n-1}H_\rho(Tx_0,Tx_0,Tx_1)\\ \times\left(\begin{array}{l}1+\sqrt{k}+\left(\sqrt{k}\right)^2\\ +\cdots\\ +\left(\sqrt{k}\right)^{m-2-(n-1)}\end{array}\right)\end{array}\right\}\\
&=\left(\sqrt{k}\right)^nH_\rho(Tx_0,Tx_0,Tx_1)\\
&\times\left[\frac{\left(\sqrt{k}\right)^{n-m}-1}{\sqrt{k}-1}\right]\\
&=\left(\sqrt{k}\right)^nH_\rho(Tx_0,Tx_1)\\
&\times\left[\frac{\left(\sqrt{k}\right)^{n-m}-1}{\sqrt{k}-1}\right].
\end{aligned}$$

اگر $n,m\to\infty$ آنگاه:

$$\left(\sqrt{k}\right)^n H_\rho(Tx_0,Tx_1)\left[\frac{\left(\sqrt{k}\right)^{n-m}-1}{\sqrt{k}-1}\right]\to 0.$$

لذا دنباله $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی است. از طرفی چون $CB^\rho(X)$ کامل است $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست. فرض کنیم $Tx_n \to y$. در این صورت y متعلق به $CB^\rho(X)$ است. از طرفی T از X به $CB^\rho(X)$ پوشا است، لذا x متعلق به X وجود دارد بطوریکه $y=Tx'$ و $Tx_n \to Tx'$ وقتی که $n\to\infty$. بعلاوه T پیوسته است در نتیجه $x_n \to x'$ وقتی که $n\to\infty$ نسبت به متریک ρ^S. نشان می دهیم $x'\in Tx'$. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\rho^S(x_n,x')=0.$$

از طرفی

$$\rho(x',x')=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x') = \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_n)=0.$$

چون

$$H_\rho(\{x'\},\{x'\},Tx') \le k \times\max\left\{ \begin{array}{l} H_\rho(\{x'\},\{x'\}),\\ H_\rho(\{x'\},Tx') \end{array}\right\}$$

و

$$.H_\rho(\{x'\},\{x'\})=\rho(x',x')$$

لذا خواهیم داشت

$$H_\rho(\{x'\},Tx')\le k\max\{\rho(x',x'),H_\rho(\{x'\},Tx')\} = kH_\rho(\{x'\},Tx').$$

چون $0\le k<1$ لذا باید

$$.H_\rho(\{x'\},Tx')=0$$

یعنی $\{x'\}=Tx'$ و $x'\in Tx'$.

مثال۳-۷: فرض کنیم $X=\{0,1,3\}$ و

$$\begin{cases}\rho: X\times X\to \mathbb{R}^+\\ \rho(x,y)=\frac13|x-y|+\frac12\max\{x,y\}\end{cases}$$

تعریف شده باشد .آنگاه

$$\rho(1,1)=\frac12\neq0$$

و

$$\rho(3,3)=\frac32\neq0.$$

لذا ρ روی X متریک نمی‌باشد. با در نظر گرفتن

$$\rho^S(x,y)=|x-y|,$$

(X,ρ) فضای متری جزئی کامل است. مجموعه‌های $\{0\}$ و $\{0,1\}$ بسته و کراندار هستند .اگر $x\in\{0,1,3\}$ آنگاه $x\in\{0\}$ اگر و فقط اگر $x=0$، اگر و فقط اگر $\frac56 x=\frac12 x$، اگر و فقط اگر

$$x\in\overline{\{0\}}\Leftrightarrow \rho(x,\{0\})=\rho(x,x).$$

و

$$x\in\overline{\{0,1\}}\Leftrightarrow\rho(x,\{0\},1)=\rho(x,x)$$

اگر و فقط اگر

$$\min\left\{\frac56x,\frac13|x-1|+\frac12\max\{x,1\}\right\}=\frac13x$$

اگر و فقط اگر $x\in\{0,1\}$. تابع چند مقداری $T:X\to CB^\rho(X)$ را با ضابطه

$$T(x)=\begin{cases}\{0\}, & x=0,\\ \{0\}, & x=1,\\ \{0,1\}, & x=3.\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم .حالتهای مختلف را در نظر می‌گیریم.

(۱) فرض کنیم $x=y=z$ آنگاه

$$\begin{aligned}H_\rho(Tx,Ty,Tz)&=H_\rho(\{0\},\{0\},\{0\})\\ &= H_\rho(\{0\},\{0\})\\ &= \delta_\rho(\{0\},\{0\})\\ &= \rho(0,\{0\})=0.\end{aligned}$$

لذا

$$H_\rho(\{0\},\{0\},\{0\})\le k\,\rho(0,0),$$

برای $0<k<1$.

(۲) فرض کنیم $x=0$ و $y=z=1$. داریم

$$H_\rho(\{0\},\{0\},\{0\})=0$$

و

$$\max\{\rho(0,1),\rho(0,1),\rho(1,1)\}=\frac{5}{6}.$$

لذا $0\le\frac{5}{6}k$.

(۳) فرض کنیم $x=0$، $y=1$ و $z=3$. داریم:

$$\begin{aligned}&H_\rho\left(\{0\},\{0,1\},\{0,1\}\right)\\&=H_\rho\left(\{0\},\{0,1\}\right)\\&=\max\left\{\begin{matrix}H_\rho\left(\{0\},\{0,1\}\right),\\H_\rho\left(\{0,1\},\{0,1\}\right)\end{matrix}\right\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&H_\rho\left(\{0,1\},\{0,1\}\right)\\&=\max\left\{\begin{matrix}\delta_\rho\left(\{0,1\},\{0,1\}\right),\\\delta_\rho\left(\{0,1\},\{0,1\}\right)\end{matrix}\right\}\\&=\delta_\rho\left(\{0,1\},\{0,1\}\right).\end{aligned}$$

اما

$$\begin{aligned}&\delta_\rho\left(\{0,1\},\{0,1\}\right)\\&=\max\left\{\rho\left(0,\{0,1\}\right),\rho\left(1,\{0,1\}\right)\right\}\\&=\max\left\{0,\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}&H_\rho\left(\{0\},\{0,1\}\right)\\&=\max\left\{\delta_\rho\left(\{0\},\{0,1\}\right),\delta_\rho\left(\{0,1\},\{0\}\right)\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\delta_\rho\left(\{0\},\{0,1\}\right)\\&=\rho\left(0,\{0,1\}\right)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\delta_\rho\left(\{0,1\},\{0\}\right)\\&=\max\left\{\rho\left(0,\{0\}\right),\rho\left(1,\{0\}\right)\right\}\\&=\max\left\{0,\frac{5}{6}\right\}=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

پس

$$H_\rho\left(\{0\},\{0,1\},\{0,1\}\right)=\frac{5}{6}.$$

از طرفی $\rho(0,1)=\frac{5}{6}$ ، $\rho(0,3)=\frac{5}{2}$ ، $\rho(1,3)=\frac{13}{6}$

و

$$\max\left\{\frac{5}{6},\frac{5}{2},\frac{13}{6}\right\}=\frac{5}{2}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}&H_\rho\left(\{0\},\{0,1\},\{0,1\}\right)\\&\le k\ \max\{\rho(0,1),\rho(0,3),\rho(1,3)\}.\end{aligned}$$

یعنی $\frac{5}{6}\le\frac{5}{2}k$ یا $\frac{1}{3}\le k\le 1$. بقیه حالتها به همین ترتیب برقرارند.

٤-شاخص سازی نوع جفتی شبه باناخ

٤-١ مفاهیم و تعاریف

در این بخش نوع جفتی شبه-باناخ را تعریف کرده و سپس قضیه جفتی نقطه ثابت منحصربفرد قوی را برای چنین جفتهایی را اثبات می‌کنیم.

قضیه٤-١: عضو $(x,y)\in X\times X$ را نقطه ثابت برای $F:X\times X\to X$ گوییم هرگاه $F(x,y)=x$ و $F(y,x)=y$.

تعریف٤-٢: عضو $(x,y)\in X\times X$ را جفت نقطه ثابت قوی برای نگاشت $F:X\times X\to X$ گوییم هرگاه (x,y) جفت نقطه ثابت باشد و $x=y$. بدین معنی که $F(x,x)=x$. X مجموعه غیرخالی است.

تعریف٤-٣: فرض کنیم (X,d) فضای متری باشد. نگاشت F از $X\times X$ به توی X را انقباضی جفتی باناخ گوییم هرگاه k متعلق به $(0,1)$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر (x,y) و (u,v) متعلق به $X\times X$ نامساوی

$$\begin{aligned}&d(F(x,y),(u,v))\\&\le\frac{k}{2}\left[d(x,u)+d(y,v)\right].\end{aligned}$$

برقرار باشد.

٤-١ نتایج اصلی

تعریف٤-٤: فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه غیرخالی از فضای متری کامل (X,d) باشند. نگاشت

$$F:X\times X\to X$$

را نوع جفتی شبه-باناخ نسبت به A و B گوئیم هرگاه برای هر x و v متعلق به A و y و u متعلق به B داشته باشیم:

$$d(F(x,y),F(u,v)) \le k \max\{d(x,u),d(y,v)\} \quad (۱)$$

که در آن $0<k<1$.

قضیه٤-٥: فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه غیرخالی از فضای متری کامل (X,d) باشند. همچنین F از $X\times X$ به X نوع جفتی شبه-باناخ نسبت به A و B باشد. در این صورت $A\cap B\neq\varnothing$ و F دارای جفت نقطه ثابت قوی منحصربفرد در $A\cap B$ هست.

اثبات. فرض کنیم $x_0\in A$ و $y_0\in B$ و دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به صورت

$$x_{n+1}=F(y_n,x_n),\quad y_{n+1}=F(x_n,y_n) \quad (۲)$$

برای هر $n\ge 0$ تعریف می شوند .حال با استفاده از (۱) و (۲) داریم:

$$d(x_1,y_1) = d(F(y_0,x_0),F(x_1,y_1)) \le k \max\{d(y_0,x_1),d(x_0,y_1)\}$$

و

$$d(y_1,x_2) = d(F(x_0,y_0),F(y_1,x_1)) \le k \max\{d(x_0,y_1),d(y_0,x_1)\}.$$

مجددا با بکار بردن (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d(x_2,y_3) &= d(F(y_1,x_1),F(x_2,y_2)) \\ &\le k \max\{d(y_1,x_2),d(x_1,y_2)\} \\ &\le k \max\left\{\begin{matrix} k\max\{d(y_0,x_1),d(y_1,x_0)\}, \\ k\max\{d(x_0,y_1),d(y_0,x_1)\} \end{matrix}\right\} \\ &\le k^2 \max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\}. \end{aligned}$$

به همین ترتیب با استفاده از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} d(x_2,y_3) &= d(F(x_1,y_1),F(y_2,x_2)) \\ &\le k \max\{d(x_1,y_2),d(y_1,x_2)\} \\ &\le k^2 \max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\}. \end{aligned}$$

حال با استفاده از استقرای ریاضی خواهیم داشت:

$$d(x_n,y_{n+1}) \le k^n \max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\}. \quad (۳)$$

حال بنابر (۱) و (۲) و هر $n\ge 1$ داریم:

$$d(y_n,x_{n+1}) \le k^n \max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\}.$$

دوباره با استفاده از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} d(x_1,y_1) &= d(F(y_1,x_1),F(x_1,y_1)) \\ &\le k \max\{d(y_1,x_1),d(x_1,y_1)\} \\ &= kd(x_1,y_1) \le k^2 d(x_0,y_0). \end{aligned}$$

حال با استفاده از استقرای ریاضی خواهیم داشت:

$$d(x_n,y_n) \le k^n d(x_0,y_0). \quad (۴)$$

بنابراین از (۳) و (۴) داریم:

$$\begin{aligned} & d(x_n,x_{n+1})+d(y_n,y_{n+1}) \\ &\le d(x_n,y_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+1}) \\ &\quad +d(y_n,x_n)+d(x_n,y_{n+1}) \\ &\le k^n \max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\} \\ &\quad +k^{n+1}d(x_0,y_0)+k^{n+1}d(x_0,y_0) \\ &\quad +k^n \max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\} \\ &= 2k^n \max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\} \\ &\quad +k^{n+1}d(x_0,y_0)+k^{n+1}d(x_0,y_0). \end{aligned}$$

چون $0<k<1$. این ننیجه می دهد که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[d(x_n,x_{n+1})+d(y_n,y_{n+1})\right]<\infty.$$

لذا $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌های کوشی می‌باشند. فرض کنیم به ترتیب x و y همگرا باشند. چون A و B زیرمجموعه‌های بسته‌اند و $\{x_n\}\subset A$ و $\{y_n\}\subset B$. لذا نتیجه می‌گیریم $x_n\to x\in A$ و $y_n\to y\in B$ وقتی که $n\to\infty$. دوباره با استفاده از (۴) داریم:

$$d(x_n,y_n)\to 0. \quad (۵)$$

وقتی که $n\to\infty$. بنابراین از (۵) خواهیم داشت:

$$d(x,y)\le d(x,x_n)+ d(x_n,y_n)+d(y_n,y)\to 0$$

وقتی که $n\to\infty$. این نتیجه می دهد که

$$x=y\in A\cap B. \quad (۶)$$

$$\begin{aligned} &d(x,F(x,y))\\ &\le d(x,x_{n+1})+d(x_{n+1},F(x,y))\\ &=d(x,x_{n+1})+d(F(y_n,x_n),F(x,y))\\ &\le d(x,x_{n+1})\\ &\quad +k\max\{d(y_n,x)+d(x_n,y)\}. \end{aligned}$$

با گرفتن حد از طرفین نامساوی وقتی که $n\to\infty$ و همچنین با بکار بردن (۵) و (۶) خواهیم داشت: $d(x,F(x,y))=0$. یعنی $x=F(x,y)$. پس x نقطه ثابت جفت شده قوی برای F می‌باشد. حال برای اثبات اینکه x منحصربفرد است، فرض کنیم که دو جفت نقطه ثابت برای F داشته باشیم. بدین معنی که $F(x,x)=x$ و $F(y,y)=y$ بطوریکه x و y متعلق به $A\cap B$ هستند .در این صورت بنابه (۱) داریم:

$$\begin{aligned} d(x,y)k &= d(F(x,x),F(y,y))\\ &\le k\max\{d(x,y),d(y,x)\}\\ &=kd(x,y). \end{aligned}$$

چون $0<k<1$. لذا باید $x=y$.

مثال۴-۶: فرض کنیم X همان مجموعه □، $A=[0,\infty)$، $B=(-\infty,0]$ و

$$d(x,y)=|x-y|$$

باشد. نگاشت F از $X\times X$ به X را با ضابطه

$$F(x,y)=-\frac{x-y}{3}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$d(F(x,y),F(u,v))\le k\max\{d(x,u),\}$$

یعنی

$$\begin{aligned} &\left|-\frac{x-y}{3}+\frac{u-v}{3}\right|\\ &=\frac{1}{3}|u-x+y-v|\\ &\le\frac{1}{3}\left(|u-v|+|y-v|\right)\\ &=\begin{cases}\frac{2}{3}|u-x|, & |u-x|\ge|y-v|,\\ \frac{2}{3}|y-v|, & |u-x|\le|y-v|.\end{cases} \end{aligned}$$

لذا $(0,0)$ تنها نقطه ثابت جفت شده قوی F می‌باشد.

۵- مشخصه‌سازی نگاشت نوع جفتی شبه-چاترجا

۵-۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش نوع جفتی شبه-چاترجا را تعریف کرده و سپس نشان می‌دهیم اینگونه جفتی‌ها دارای نقاط ثابت قوی منحصربفرد در فضاهای متری می‌باشند.

تعریف۵-۱: فرض کنیم (X,d) فضای متری باشد. نگاشت $T:X\to X$ را انقباضی چاترجا[۹] گوییم اگر

$$k\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

وجود داشته باشد بطوریکه براي هر x و y متعلق به X داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty)\le k[d(x,Ty)+d(y,Tx)].$$

۵-۲ نتایج اصلی

تعریف۵-۲: فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های غیر خالی از فضای متری کامل (X,d) باشند. جفتی $F:X\in X\to X$، نوع جفتی شبه-چاترجا نسبت به A و B گوییم اگر در شرط زیر صدق کند

$$\begin{aligned} &d(F(x,y),F(u,v))\\ &\le k\max\{d(x,F(u,v)),\\ &d(F(x,y),u)\} \end{aligned}\qquad(۷)$$

بطوریکه x و v متعلق به A، y و u متعلق به B و

$$0<k<\frac{1}{2}$$

باشند.

قضیه۵-۳: فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های بسته غیرخالی از فضای متری باشند (X,d) و $F:X\in X\to X$ نوع جفتی شبه-چاترجا نسبت به A و B باشد. در این صورت $A\cap B\neq\varnothing$ و F دارای جفت نقطه ثابت قوی در $A\cap B$ می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم $x_0\in A$، $y_0\in B$، $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله باشند که به صورت

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=F(y_n,x_n),\\ y_{n+1}&=F(x_n,y_n) \end{aligned}\qquad(۸)$$

تعریف شده‌اند بطوریکه $x_n\in A$ و $y_n\in B$. با استفاده از (۷) و (۸) داریم:

---

[۹] Chatterjae

$$\begin{aligned} d(x_1,y_2) &= d(F(y_0,x_0),F(x_1,y_1)) \\ &\le k\max\{d(y_0,F(x_1,y_1)),d(F(y_0,x_0),x_1)\} \\ &= k\max\{d(y_0,y_2),d(x_1,x_1)\} \\ &= kd(y_0,y_2) \\ &\le k[d(y_0,x_1),d(x_1,y_2)]. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$d(x_1,y_2)\le \frac{k}{1-k}d(y_0,x_1).$$

مجددا با بکار بردن (۷) و (۸) داریم:

$$\begin{aligned} d(y_1,x_2) &= d(F(x_0,y_0),F(y_1,x_1)) \\ &\le k\max\{d(x_0,F(y_1,x_1)),d(F(x_0,y_0),y_1)\} \\ &= k\max\{d(x_0,x_2),d(y_1,y_1)\} \\ &= kd(x_0,x_2) \\ &\le k[d(x_0,y_1),d(y_1,x_2)]. \end{aligned}$$

از اینرو

$$d(y_1,x_2)\le \frac{k}{1-k}d(x_0,y_1).$$

دوباره با بکار بردن (۷) و (۸) داریم:

$$\begin{aligned} &d(x_2,y_3) \\ &= d(F(y_1,x_1),F(x_2,y_2)) \\ &\le k\max\{d(y_1,F(x_2,y_2)), \\ &\quad d(F(y_1,x_1),x_2)\} \\ &= k\max\{d(y_1,y_3),d(x_2,x_2)\} \\ &= kd(y_1,y_3) \\ &\le k[d(y_1,x_2),d(x_2,y_3)]. \end{aligned}$$

نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} d(x_2,y_3) &\le \frac{k}{1-k}d(y_1,x_2) \\ &= \left(\frac{k}{1-k}\right)^2 d(x_0,y_1). \end{aligned}$$

دوباره با بکار بردن (۷) و (۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &d(y_2,x_3) \\ &= d(F(x_1,y_1),F(y_2,x_2)) \\ &\le k\max\{d(x_1,F(y_2,x_2)), \\ &\quad d(F(x_1,y_1),y_2)\} \\ &= kd(x_1,x_3) \\ &\le k[d(x_1,y_2),d(y_2,x_3)]. \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} d(y_2,x_3) &\le \frac{k}{1-k}d(x_1,y_2) \\ &= \left(\frac{k}{1-k}\right)^2 d(y_0,x_1). \end{aligned}$$

دوباره با استفاده از (۷) و (۸) داریم:

$$d(x_3,y_4)\le \left(\frac{k}{1-k}\right)^3 d(y_0,x_1)$$

$$d(x_4,y_3)\le \left(\frac{k}{1-k}\right)^3 d(x_0,y_1)$$

حال فرض کنیم n عدد طبیعی دلخواهی باشد. اگر n فرد باشد با استفاده از استقرای ریاضی خواهیم داشت:

$$d(x_n,y_{n+1})\le \left(\frac{k}{1-k}\right)^n d(x_1,y_0) \qquad (۹)$$

و

$$d(y_n,x_{n+1})\le \left(\frac{k}{1-k}\right)^n d(x_1,y_1). \qquad (۱۰)$$

اگر n زوج باشد خواهیم داشت:

$$d(x_n,y_{n+1})\le \left(\frac{k}{1-k}\right)^n d(x_0,y_1) \qquad (۱۱)$$

و

$$d(y_n,x_{n+1})\le \left(\frac{k}{1-k}\right)^n d(y_0,x_1). \qquad (۱۲)$$

دوباره با استفاده از (۷) و (۸) داریم:

$$\begin{aligned} &d(x_2,y_2) \\ &= d(F(y_1,x_1),F(x_1,y_1)) \\ &\le k\max\{d(y_1,F(x_1,y_1)), \\ &\quad d(F(y_1,x_1),x_1)\} \\ &= k\max\{d(y_1,y_2),d(x_2,x_1)\}. \end{aligned}$$

اما

$$\begin{aligned} d(y_1,y_2) &\le d(y_1,x_2)+d(x_2,y_2), \\ d(x_1,x_2) &\le d(x_1,y_2)+d(y_2,x_2). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &d(x_2,y_2)\le k \\ &\times\max\{d(y_1,x_2)+d(x_2,y_2), \\ &\quad d(x_1,y_2)+d(x_2,y_2)\}. \end{aligned}$$

اگر

$$\begin{aligned}&\max\{d(y_1,x_2)+d(x_2,y_2),\\&d(x_1,y_2)+d(x_2,y_2)\}\\&=d(y_1,x_2)+d(x_2,y_2)\end{aligned}$$

آنگاه

$$d(x_2,y_2)\le k[d(y_1,x_2)+d(x_2,y_2)].$$

نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}d(x_2,y_2)&\le\frac{k}{1-k}d(y_1,x_2)\\&\le\left(\frac{k}{1-k}\right)^2 d(y_0,y_1).\end{aligned}\qquad(۱۳)$$

اگر

$$\begin{aligned}&\max\{d(y_1,x_2)+d(x_2,y_2),\\&d(x_1,y_2)+d(x_2,y_2)\}\\&=d(x_1,y_2)+d(x_2,y_2)\end{aligned}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$d(x_2,y_2)\le k[d(x_1,y_2)+d(x_2,y_2)].$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}d(x_2,y_2)&\le\frac{k}{1-k}d(x_1,y_2)\\&\le\left(\frac{k}{1-k}\right)^2 d(x_1,y_0).\end{aligned}\qquad(۱۴)$$

از (۱۳) و (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned}&d(x_2,y_2)\le\left(\frac{k}{1-k}\right)^2\\&\times\max\{d(x_0,y_1),d(x_1,y_0)\}.\end{aligned}$$

به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}&d(x_3,y_3)\le\left(\frac{k}{1-k}\right)^3\\&\times\max\{d(x_0,y_1),d(x_1,y_0)\}.\end{aligned}$$

حال با استفاده از استقرای ریاضی داریم:

$$\begin{aligned}&d(x_n,y_n)\le\left(\frac{k}{1-k}\right)\\&\times\max\{d(x_0,y_1),d(x_1,y_0)\}.\end{aligned}\qquad(۱۵)$$

از (۹) و (۱۱) به ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$\begin{aligned}&d(x_n,y_{n+1})\le\left(\frac{k}{1-k}\right)^n\\&\times\max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\}.\end{aligned}$$

همچنین از (۱۰) و (۱۲) به ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$\begin{aligned}&d(y_n,x_{n+1})\le\left(\frac{k}{1-k}\right)^n\\&\times\max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\}.\end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}d(x_n,x_{n+1})+\sum_{n=1}^{\infty}d(y_n,y_{n+1})\\&\le\sum_{n=1}^{\infty}(d(x_n,y_n)+d(y_n,x_{n+1}))\\&+\sum_{n=1}^{\infty}(d(y_n,x_n)+d(x_n,y_{n+1}))\\&\le\max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\}\\&\times\left(\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{1-k}\right)^n+\left(\frac{k}{1-k}\right)^n\\&+\left(\frac{k}{1-k}\right)^n+\left(\frac{k}{1-k}\right)^n\end{aligned}\right)\\&=\max\{d(x_1,y_0),d(x_0,y_1)\}\\&\times\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{k}{1-k}\right)^n.\end{aligned}$$

چون $0<k<\frac{1}{2}$ لذا

$$\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{1-k}\right)^n\le\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{k^n}{1-k}.$$

که در آن

$$\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{k^n}{1-k}.$$

یک سری هندسی همگراست. لذا دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کوشی هستند. فرض کنیم $x_n\to x$ و $y_n\to y$ وقتی که $n\to\infty$. چون $\{x_n\}\subset A$ و $\{y_n\}\subset B$ و A و B زیرمجموعه‌های بسته می‌باشند. لذا

$$\begin{aligned}&x_n\to x\in A,\\&y_n\to y\in B.\end{aligned}\qquad(۱۶)$$

حال از (۱۵) و $0<k<\frac{1}{2}$ داریم

$$d(x_n,y_n)\to 0$$

وقتی که $n \to \infty$. بنابراین از (۱۶) خواهیم داشت $x = y$. لذا نتیجه می‌گیریم $x \in A \cap B$ و $A \cap B \neq \emptyset$. حال از (۷) و (۸) داریم:

$$\begin{aligned}
& d(x, F(x,y)) \\
& \leq d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F(x,y)) \\
& = d(x, x_{n+1}) \\
& \quad + d(F(y_n, x_n), F(x,y)) \\
& \leq d(x, x_{n+1}) \\
& \quad + k \max\{d(y_n, F(x,y)), \\
& d(F(y_n, x_n), x)\} \\
& = d(x, x_{n+1}) \\
& \quad + k \max\{d(y_n, F(x,y)), \\
& d(x_{n+1}, x)\}.
\end{aligned}$$

از طرفین نامساوی حد می‌گیریم و $n \to \infty$. آنگاه خواهیم داشت

$$d(x, F(x,x)) \leq kd(x, F(x,x)).$$

در نتیجه

$$d(x, F(x,x)) = 0.$$

یعنی $F(x,x) = x$. این بدین معنی است که x نقطه ثابت جفت شده قوی از F است. برای اثبات یکتایی x، فرض کنیم دو نقطه ثابت جفت شده قوی برای F داشته باشیم. یعنی

$$F(x,x) = x$$

و

$$F(y,y) = y.$$

با استفاده از (۷) داریم:

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= d(F(x,x), F(y,y)) \\
&\leq k \max\{d(x, F(y,y)), d(F(x,x), y)\} \\
&= kd(x, F(y,y)) = kd(x,y).
\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم $d(x,y) = 0$. یعنی $x = y$.

مثال۵-٤: فرض کنیم X همان مجموعه □، $A = (-\pi^2, 0]$، $B = [0, \pi^2]$ و

$$d(x,y) = |x - y|$$

باشند. همچنین فرض کنیم نگاشت F از $X \times X$ به X برای $(x,y) \in B \times A$، برابر

$$-\frac{1}{4}\left|\sqrt{y}\sin\frac{1}{\sqrt{y}}\right|,$$

برای $(x,y) \in A \times B$، برابر صفر و در غیر این صورت برابر یک باشد. در این صورت F، یک جفتی است و $k = \frac{1}{4}$. تمام شرایط قضیه ۵-۳ برقرار است و $(0,0)$ جفت نقطه ثابت قوی منحصربفرد برای F می‌باشد.

نتیجه گیری

در این مقاله ما با استفاده از مفهوم متر جزئی، یک فضای متریک S-هاسدورف روی مجموعه شامل زیرمجموعه‌های بسته و کراندار X را معرفی کرده‌ایم. سپس نتایج نقطه ثابت نگاشتهای چند مقداری پیوسته و پوشا را ارائه دادیم. علاوه بر آن اثباتی بر قضیه انقباضی نادلر برای نگاشتهای چندمقداری در این فضای متریک ارائه کردیم. در ادامه، با بیان نگاشتهای نوع جفتی شبه باناخ، شرایط وجود جفت نقطه ثابت قوی منحصربفرد را در این نگاشتها بررسی نموده و جفتی شبه-باناخ را تعریف کرده و سپس قضیه جفتی نقطه ثابت منحصربفرد قوی را برای چنین جفتهایی را اثبات کردیم.

فهرست منابع

[1] R.P. Agarwal and D. O'Regan and D.R. Sahu, Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, Springer 2009

[2] T. Gnana Bahaskar, V. Lakshmikantham, Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications, Nonlin. Anal. ۶۵:۱۳۷۹–۱۳۹۳ (۲۰۰۶)

[3] V. Berinde, Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotons mappings in partially ordered metric spaces, Nanlin. Anal. 74: 7347–7355 (2011)

[4] N. Bilgili, I.M. Erhan, E. Karapinar, D. Turkoglu, A note on the coupled fixed point theorems for mixed g-monotone mappings in partially ordered metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2014: 120, 6 pp.(2014)

[5] B.S. Choudhury, A. Kundu, A coupled concidence point result in partially ordered metric spaces for compatible mappings, Nonlin. Anal. 73: 2524–2531 (2010)

[6] B.S. Choudhury, A. Kundu, Two coupled weak contraction theorems in partially ordered metric spaces, Revista de la Real Academia de ciencias Exactas., Fisicasy Naturales. Serie A. Mathematicas. 108: 335–351 (2014)

[7] P. Maity, Coupled fixed point results in generalized metric spaces, Math. Comput. Modeling. 54:73–79 (2011)

[8] D. Gue, V. Lakshmikantham, Coupled fixed point of nonlinear operators with applications, Nonlin. Anal. 11: 623–632 (1987)

[9] V. Lakshmikantham, L. Ćirić, Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces, Nonlin. Anal. 70: 4341–4349 (2009)

[10] N.V. Luong, N.X. Thuan, Coupled fixed point in partially ordered metric spaces and application, Nonlin. Anal. 74: 983–992 (2011)

[11] B. Samet, C. Vetro, Coupled fixed point theorems for multi-values nonlinear contraction mappings in partially ordered metric spaces, Nonlin. Anal. 74: 4260–4268 (2011)

[12] I. Altun, H. Simsek, Some fixed point theorems and dualistic partial metric spaces, J. Adv. Math. Stud. 1: 1–8 (2008)

[13] S.G. Matthews, Partial metric topology, in: Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, in: Ann New York Acad. Sci., 728: 183–197 (1994)

[14] S.B. Nadler, Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math. 30: 475–599 (1969)

[15] H. Aydi, M. Abbas, C. Vetro, Partial Hausdorff metric and Nadleres fixed point theorem on partial metric spaces, Topology and its Applications 159: 3234–3242 (2012)