دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مروری بر معکوس تعمیم‌یافته‌ی ماتریس و ساختار بلوکی آن

فاطمه باباکردی*

استادیار، گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه و فنی و مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس، گنبدکاووس، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۱۵   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۱/۲۱

چکیده

هرگاه یک ماتریس، مربع و نامنفرد باشد یا به عبارت دیگر سطرها (یا ستون‌های) آن مستقل خطی باشد، گوییم ماتریس معکوس‌پذیر است. در سال‌های اخیر در زمینه‌های مختلف ریاضی کاربردی این نیاز احساس می‌شد که برای ماتریس‌های منفرد و مستطیلی نیز به محاسبه معکوس بپردازیم. اینجا بود که معکوس با این ویژگی‌ها که برای یک دسته بزرگتر از دسته ماتریس‌های نامنفرد وجود داشته باشند و برخی از ویژگی‌های معکوس معمول را داشته باشند و وقتی ماتریس نامنفرد باشد همان معکوس معمول را بدهد، تعریف شد که معکوس تعمیم‌یافته یا شبه معکوس نامیده شد، که در این مقاله به مرور متداول‌ترین آن‌ها می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: ماتریس منفرد، ماتریس نامنفرد، معکوس تعمیم یافته، نمایش بلوکی ماتریس.

*عهده‌دار مکاتبات: Email: babakordif@yahoo.com

۱- مقدمه

معکوس ماتریس ابزاری کلیدی در حل دستگاه معادلات خطی می‌باشد که تا کنون پژوهش‌های زیادی در این زمینه صورت گرفته است [۷-۱]. مفهوم معکوس تعمیم یافته برای ماتریس‌ها برای اولین بار توسط $R. Penrose$ مطرح گردید [۸]. در [۹] به بیان محاسبات و کاربردهای معکوس تعمیم یافته پرداخته شد. در سال ۲۰۰۹ معکوس برای تبدیلات خطی بیان شد [۱۰]. در ادامه از معکوس تعمیم یافته برای حل دستگاه خطی و دستگاه خطی فازی استفاده شد [۱۳-۱۱]. در [۱۴] نمایش بلوکی ماتریس‌های تعمیم یافته معرفی گردید.

در این مقاله به مروری بر معکوس تعمیم یافته و ساختار بلوکی آن‌ها که در [۱۷-۱۵] مطرح شده، خواهیم پرداخت. ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ معکوس تعمیم یافته را مرور می‌کنیم. در بخش ۳ به مرور نمایش بلوکی معکوس تعمیم یافته می‌پردازیم. مثال‌های عددی در بخش ۴ و سپس نتیجه گیری مطرح شده است.

۲- معکوس تعمیم‌یافته

فرض کنید، C^n مجموعه همه ماتریس‌های مختلط مربع $n\times n$ و $C^{n\times m}$ مجموعه همه ماتریس‌های مختلط $n\times m$ و I_n ماتریس همانی مرتبه n و O ماتریس پوچ مرتبه n و C_r^n زیرکلاس‌هایی از C^n که ماتریس‌هایی با رتبه $r\le n$ را شامل می‌شود، باشند، ابتدا سیستم ۴ معادله‌ای $Penrose$ را برای ماتریس $F\epsilon C^{m\times n}$، بیان می‌کنیم:

$$FGF = F, \tag{۱}$$

$$GFG = G, \tag{۲}$$

$$(FG)^* = FG, \tag{۳}$$

$$(GF)^* = GF, \tag{۴}$$

که ماتریس $G\epsilon C^{n\times m}$ مجهول می‌باشد. اندیس ماتریس F، با $ind(F)$ نمایش می‌دهیم که کوچکترین عدد صحیح نامنفی k می‌باشد، به طوری که $rank(F^{k+1}) = rank(F^k)$.

برای هر F، ماتریس حقیقی مرتبه n، $F^0 = I_n$ تعریف می‌کنیم. برای ماتریس نامنفرد F، $ind(F) = 0$ چون $rank(F) = rank(F^0)$.

برای ماتریس‌های مربع دو معادله زیر اضافه می‌شوند:

$$FG = GF, \tag{۵}$$

$$F^kGF = F^k \tag{۶}$$

تعریف ۲-۱: برای هر $F\epsilon C^{m\times n}$، فرض کنید $H\{i,j,\dots,h\}$ مجموعه ماتریس‌های $G\epsilon C^{n\times m}$ که در معادلات $(i),(j),\dots,(h)$ از معادلات (۱) تا (۶) صدق می‌کنند، باشد. ماتریس $G\epsilon H\{i,j,\dots,h\}$، $\{i,j,\dots,h\}-$ معکوس ماتریس F نامیده می‌شود و با $F^{(i,j,\dots,h)}$ نمایش داده می‌شود.

متداول‌ترین معکوس‌های تعمیم یافته یک ماتریس مربع را در تعریف زیر بیان می‌کنیم.

تعریف ۲-۲: فرض کنید $F\epsilon C^{m\times n}$.

الف) فرض کنید $G\epsilon C^{n\times m}$ ماتریسی باشد که در سیستم‌های معادلات ماتریسی (۱) تا (۴) صدق می‌کند، این ماتریس G، معکوس $Moore-penrose$ ماتریس F نامیده می‌شود و با F^τ یا $F^{(1,2,3,4)}$ نشان داده می‌شود.

ب) فرض کنید $ind(F) = k$ و $G\epsilon C^{n\times m}$ در سیستم سه معادله ماتریسی (۲) و (۵) و (۶) صدق می‌کند، ماتریس G معکوس $Drazin$ ماتریس F نامیده می‌شود و با $F^{\blacksquare}$ یا $F^{(2,5,6)}$ نمایش داده می‌شود.

ج) فرض کنید $ind(F)\le 1$ و $G\epsilon C^{n\times m}$ ماتریسی باشد که در سه معادله ماتریسی (۱) و (۲) و (۵) صدق کند، ماتریس G ماتریس گروهی F نامیده می‌شود و با $F^\#$ یا $F^{(1,2,5)}$ نمایش داده

می‌شود.

د) ماتریس $F\epsilon C^{n}$، ماتریس EP نامیده می‌شود هرگاه در $FF^{\tau} = F^{\tau}F$ صدق کند.

لم ۲-۱: برای هر ماتریس نامنفرد، معکوس‌های تعمیم یافته با معکوس معمولی برابراست.

لم ۲-۲: برای هر $F\epsilon C^{n}$، معکوس گروهی وجود دارد به طوری که $ind(F) \leq 1$ و $F^{\#} = F^{■}$ برقرار است، یعنی در این حالت معکوس گروهی ماتریس F با معکوس Drazin برابر است و هرگاه F ماتریس EP منفرد باشد آنگاه $ind(F) = 1$ و $F^{\#} = F^{■} = F^{\tau}$.

۳- محاسبه معکوس تعمیم‌یافته با استفاده از نمایش بلوکی ماتریس

در این قسمت نمایش بلوکی، برای معکوس گروهی و $\{1\}-$معکوس و معکوس $Moore - penrose$ را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳-۱: برای هر $F\epsilon C_r^{m\times n}$ که در برخی از ویژگی‌های (۱) تا (۴) و ویژگی (۴) و (۵) برای ماتریس‌های مربع صدق کند، نمایش بلوکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X = P.\begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}.Q \qquad (۳-۱)$$

که $X_0\epsilon C^{r\times r}$ و $X_1\epsilon C^{r\times(m-r)}$ و $X_2\epsilon C^{(n-r)\times r}$ و $X_3\epsilon C^{(n-r)\times(m-r)}$ زیر ماتریس‌های مناسب می‌باشند.

همان‌طورکه در [۱۴] بیان شد، برای هر $F\epsilon C_r^{m\times n}$، می‌توانیم ماتریس گسترش یافته $\begin{bmatrix} F & I_m \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ بسازیم که با اعمال روی سطرها و ستون‌ها به ماتریس هم‌ارز تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} F & I_m \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} E_r & Q \\ P & 0 \end{bmatrix}$$

که $E_r\epsilon C_r^{m\times n}$ ماتریسی با r یک روی اولین مکان روی r قطر اصلی و صفر روی همه درایه‌های دیگر است و $P\epsilon C^{n\times n}, Q\epsilon C^{m\times m}$ ماتریس‌های منظمی هستند که در تساوی زیر صدق می‌کنند:

$$QFP = E_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۳-۲)$$

قضیه ۳-۱: (معکوس گروهی) برای ماتریس مربع $F\epsilon C_r^{n\times n}$ با $ind(F) = 1$ فرض کنید ماتریس‌های منظم P,Q وجود دارد که در (۳,۲) صدق می‌کنند. فرض کنید تجزیه بلوکی.

$$Q.P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \qquad (۳-۳)$$

تحت این فرض که زیرماتریس $V_4\epsilon C^{(n-r)\times(n-r)}$ منظم است، برقرار است آنگاه جواب منحصربفرد سیستم معادلات ماتریسی (۱) و (۲) و (۳) به صورت زیر می‌باشد:

$$F^{\#} = P.\begin{bmatrix} I_r & -V_2V_4^{-1} \\ -V_4^{-1}.V_3 & V_4^{-1}.V_3.V_2.V_4^{-1} \end{bmatrix}.Q. \quad (۳,۴)$$

الگوریتم محاسبه‌ی معکوس گروهی ماتریس F (که F ماتریس منفرد با $ind(F) = 1$):

الف) ماتریس $n\times n$، F را وارد کنید.

ب) ماتریس‌های P,Q را از(۳,۲) محاسبه کنید.

ج) زیرماتریس‌های V_1, V_2, V_3, V_4 را با استفاده از (۳,۳) محاسبه کنید.

د) معکوس گروهی را با استفاده از (۳,۴) محاسبه کنید.

قضیه ۳-۲: ($\{1\}$–معکوس) فرض کنید $F\epsilon C_r^{m\times n}$ که $r < min\{m,n\}$، برای محاسبه $\{1\}-$معکوس ماتریس F، $F^{(1)} = F^{(1)}(t_1, t_2, \dots t_k)$ که $k = m\times n - r^2$، پس از محاسبه ماتریس‌های منظم P,Q از (۳,۲)، ماتریس بلوکی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$F^{(1)} = F^{(1)}(t_1, t_2, \dots t_k) = \qquad (۳-۵)$$

$$P.\begin{bmatrix} I_r & Z_1 \\ Z_2 & Z_3 \end{bmatrix}.Q$$

که I_r ماتریس همانی از مرتبه r می‌باشد و
$Z_1\epsilon C^{r\times(m-r)}, Z_2\epsilon C^{(n-r)\times r},$
$Z_3\epsilon C^{(n-r)\times(m-r)}$

ماتریس‌های انتخابی دلخواه می‌باشند.

هرگاه $m=r$ باشد، ماتریس F با رتبه کامل سطری است و Z_1 , Z_3 ناپدید می‌شوند و داریم:

$$F^{(1)} = P.\begin{bmatrix} I_r \\ Z_2 \end{bmatrix}.Q$$

هرگاه $n=r$ باشد، ماتریس F با رتبه کامل ستونی است و Z_2, Z_3 ناپدید می‌شوند و داریم:

$$F^{(1)} = P.[I_r \quad Z_1].Q$$

قضیه ۳-۳: (معکوس $Moore-penrose$) برای هر $F\epsilon C_r^{m\times n}$، $r<min\{m,n\}$، ماتریس‌های P,Q از (۳،۲)، بدست آمده‌اند و

$$Q.Q^* = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}, P^*.P = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}, \quad (۳-۶)$$

که در آن

$S_1\epsilon C^{r\times r},\ S_2\epsilon C^{r\times(m-r)},$
$S_3\epsilon C^{(m-r)\times r},\quad S_4\epsilon C^{(m-r)\times(m-r)}$

$T_1\epsilon C^{r\times r},\ T_2\epsilon C^{r\times(n-r)},$
$T_3\epsilon C^{(n-r)\times r},\quad T_4\epsilon C^{(n-r)\times(n-r)}$

را در نظر بگیرید. معکوس $Moore-penrose$ ماتریس F است به صورت زیر است:

$$F^{\tau} = P.\begin{bmatrix} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ -T_4^{-1}T_3 & T_4^{-1}T_3S_2S_4^{-1} \end{bmatrix}.Q \quad (۷-۳)$$

هرگاه $m=r$ باشد، ماتریس F با رتبه کامل سطری است و S_2 , S_4 ناپدید می‌شوند و داریم:

$$F^{\tau} = P.\begin{bmatrix} I_r \\ -T_4^{-1}T_3 \end{bmatrix}.Q$$

هرگاه $n=r$ باشد، ماتریس F با رتبه کامل ستونی است و T_3, T_4 ناپدید می‌شوند و داریم:

$$F^{\tau} = P.[I_r \quad -S_2S_4^{-1}].Q.$$

۴- مثال‌های عددی

مثال ۴-۱: برای ماتریس‌های منفرد $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B=|A|=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ معکوس گروهی و معکوس $Drazin$ و معکوس $Moore-penrose$ و $\{1\}-$ معکوس تعمیم یافته دلخواه این ماتریس‌ها به صورت جدول ۱ و جدول ۲ تعریف می‌شود.

جدول ۱: معکوس تعمیم یافته برای ماتریس A مثال ۴،۱.

F	$F^{\#}$	$F^{■}$	F^{τ}	$F^{(1)}$
$A, ind(A)=2$	--	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1-a+b+c & a \\ b & c \end{bmatrix}$ $a,b,c\epsilon R$

جدول ۲: معکوس تعمیم یافته برای ماتریس B مثال ۴،۱.

F	$F^{\#}$	$F^{■}$	F^{τ}	$F^{(1)}$
$B, ind(B)=1$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1-a-b-c & a \\ b & c \end{bmatrix}$ $a,b,c\epsilon R$

به وضوح، B ماتریس منفرد با $ind(B)=1$ و متقارن است، بنابراین $B^{\#}=B^{\tau}$ و یک ماتریس EP می‌باشد. از طرف دیگر A یک ماتریس پوچ است که در $A^2=O$ صدق می‌کند و اندیس آن برابر ۲ می‌باشد.

مثال ۴-۲: ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. A منفرد است و $ind(A)=1$، با استفاده از تبدیلات مقدماتی روی ماتریس، ماتریس‌های منظم Q,P را بطوریکه $QFP=E_2$ تعیین می‌کنیم:

$$P=\begin{bmatrix}1&0&-3\\-2&1&6\\\frac{4}{3}&0&-3\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}5&-2&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

برای محاسبه معکوس گروهی ماتریس A، ابتدا از (۳-۳) داریم:

$$Q.P=\begin{bmatrix}V_1&V_2\\V_3&V_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&-2&-27\\-4&1&12\\-\frac{19}{3}&-2&-18\end{bmatrix}$$

سرانجام از (۴،۳) بدست می‌آوریم:

$$A^{\#}=\begin{bmatrix}-\frac{23}{36}&-\frac{1}{6}&\frac{11}{36}\\-\frac{1}{18}&0&\frac{1}{18}\\\frac{19}{36}&\frac{1}{6}&-\frac{7}{36}\end{bmatrix}$$

حال برای محاسبه $\{1\}-$معکوس A، داریم:

$$k=3^2-2^2=5$$

از (۳-۵) بدست می‌آوریم:

$$F^{(1)}(t_1,t_2,\dots t_k)=$$
$$\begin{bmatrix}1&0&-3\\-2&1&6\\\frac{4}{3}&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&t_1\\0&1&t_2\\t_3&t_4&t_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}(t_1-15t_3+6t_4-3t_5+5)&(-2t_1+6t_3-3t_4+6t_5-2)&(t_1-3t_5)\\(-2t_1+t_2+30t_3-12t_4+6t_5-12)&(4t_1-2t_2-12t_3+6t_4-12t_5+5)&(-2t_1+t_2+6t_5)\\\left(\frac{4}{3}t_1-15t_3+6t_4-3t_5+\frac{20}{3}\right)&\left(-\frac{8}{3}t_1+6t_3-3t_4+6t_5-\frac{8}{3}\right)&\left(\frac{4}{3}t_1-3t_5\right)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}5&-2&0\\-12&5&0\\\frac{20}{3}&-\frac{8}{3}&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\\frac{4}{3}&-\frac{8}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}t_1$$
$$+\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}t_2+\begin{bmatrix}-15&6&0\\30&-12&0\\-15&6&0\end{bmatrix}t_3$$
$$+\begin{bmatrix}6&-3&0\\-12&6&0\\6&-3&0\end{bmatrix}t_4+\begin{bmatrix}-3&6&-3\\6&-12&6\\-3&6&-3\end{bmatrix}t_5$$
$$=C+B_1t_1+B_2t_2+B_3t_3+B_4t_4+B_5t_5.$$

سرانجام به محاسبه معکوس $Moore-penrose$ به صورت زیر می‌پردازیم:

$$Q.Q^T=\begin{bmatrix}29&-12&9\\-12&5&-4\\9&-4&6\end{bmatrix},=\begin{bmatrix}S_1&S_2\\S_3&S_4\end{bmatrix}^T.P$$
$$P$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{61}{9}&-2&-19\\-2&1&6\\-19&6&54\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_1&T_2\\T_3&T_4\end{bmatrix}$$

داریم:

$$A^{\tau}=$$
$$\begin{bmatrix}1&0&-3\\-2&1&6\\\frac{4}{3}&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&\frac{2}{3}\\\frac{19}{54}&-\frac{1}{9}&-\frac{65}{108}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-\frac{23}{36}&-\frac{1}{6}&\frac{11}{36}\\-\frac{1}{18}&0&\frac{1}{18}\\\frac{19}{36}&\frac{1}{6}&-\frac{7}{36}\end{bmatrix}$$

۴- نتیجه‌گیری

ماتریس‌ها و به ویژه معکوس ماتریس کاربردهای زیادی در علوم مختلف به ویژه در حسابداری و اقتصاد و... دارند، اما از آنجایی که بسیاری از ماتریس‌هایی که با آن‌ها سر و کار داریم منفرد و مستطیلی می‌باشند، در این مقاله به مروری بر معکوس‌های تعمیم یافته نظیر معکوس گروهی و $\{1\}-$معکوس و معکوس $Moore-penrose$ و ... پرداختیم و نمایش بلوکی آن‌ها را مرور کردیم و

در پایان مثال‌های عددی از معکوس‌های تعمیم یافته بیان کردیم. در پژوهش بعدی با توجه به این که تا کنون هیچ پژوهشی در زمینه معکوس تعمیم یافته برای ماتریس‌های فازی مردد صورت نگرفته است، به معرفی و بحث روی آن‌ها و حل دستگاه فازی مردد با استفاده از معکوس تعمیم یافته، خواهیم پرداخت.

فهرست منابع

[1] Y. Akatsuka and T. Matsuo, Optimal control of linear discrete systems using the generalized inverse of a matrix, Techn Rept. 13, Institute of Automatic Control, Nagoya Univ., Nagoya, Japan (1965)

[2] V. Aleksi´c and V. Rakoˇcevi´c, Approximate properties of the Moore-Penrose inverse, VIII Conference on Applied Mathematics (Tivat, 1993), Univ. Montenegro, Podgorica 1–14 (1994)

[3] E. Arghiriade and A. Dragomir, Une nouvelle definition de l'inverseg ´en´ eralise´ed' unematrice, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat.Natur 8: 158–165 (1963)

[4] R. B. Bapat, Generalized inverses with proportional minors, Linear Algebra and its Applications 211:27-33(1994)

[5] C. Badea and M. Mbekhta, Generalized inversesand the maximal radius of regularity of a Fredholm operator, Integral Equations Operator Theory 28: 133–146(1997)

[6] N. Castro Gonz´alez, J. J. Koliha, and YiminWeiPerturbation of the Drazin inverse for matrices with equal eigenprojections at zero, Linear Algebra and its Applications 312:181-19 (2000)

[7] V. Miler Jerkovi´c, B. Maleševi´c, Block representation of generalized inverses of matrices, in: Proceedings of the fifth Symposium "Mathematics and applications", Faculty of Mathematics, University of Belgrade and Serbian Academy of Sciences and Arts 1:176-185(2014)

[8] R. Penrose. A generalized invers for matrices. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 15:406-413(1955)

[9] C.A. Rhode. Contribution to the theory, computation and application of generalized inverses (PhD dissertation). University of North Carolina at Releigh (1964)

[10] S.L. Cambell, C.D. Meyer. Inverses of Linear Transformations. Siam, Philadelphia (2009)

[11] M. Nikuie, Singular fuzzy linear systems, Appl. Math. Comput. Intell 2: 157-168(2013)

[12] B. Radičić, B. Malešević. Some considerations in Relation to the Matrix Equation AXB=C. The Mediterranean Journal of Mathematics 11:841-856 (2014)

[13] V. Miler Jerkovi´c, B. Mihailovi´c, B. Maleševi´c, a new method for solving square fuzzy linear systems, in: J. Kacprzyk, E. Szmidt, S. Zadrozny, K. Atanassov, M. Krawczak (Eds.), Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. IWIFSGN 2017, EUSFLAT 2017, in: Adv. Intell. Syst. Comput., vol. 642, Springer, Cham 278-280(2017)

[14] V. Miler Jerkovi´c, B. Maleševi´c, Block representation of generalized inverses of matrices, in: Proceedings of the fifth Symposium "Mathematics and applications", vol. 1, Faculty of Mathematics, University of Belgrade and Serbian Academy of Sciences and Arts 176-185(2014)

[15] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, Generalized Inverses, Theory and Applications, Springer, New York (2003)

[16] B. J. Maleševi´c, Grup nafunkcionalnajednaˇ cina, Magister thesis, University of Belgrade (1998)

[17] B. Mihailovic, Vera Miler Jerkovic, Branko Maleševic, solving fuzzy linear systems using a block representation of generalized inverses: The group inverse, Fuzzy Sets and Systems 353:66-85(2018)