دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نمای حاصل‌ضرب تانسوری سه‌تایی p ـ گروه‌ها

حلیمه هادی‌زاده[1*]، سید هادی جعفری[2]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۱/۰۸.   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۲۳

چکیده

حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها که در $k-$ نظریه جبری و توپولوژی جبری ریشه دارد نخستین بار در سال ۱۹۸۷ توسط براون و لودی معرفی شد. از آن پس به‌عنوان یک موضوع مستقل در نظریه گروه‌ها، مطالعات فراوانی بر روی آن صورت گرفت. به‌ویژه پاره‌ای تلاش‌ها در خصوص به‌دست آوردن رابطه‌ای معنادار بین نمای یک گروه و نمای مربع تانسوری ناآبلی آن، به انجام رسیده است.

اما در حالتی‌که تعداد دفعات تانسور یک گروه با خودش افزایش می‌یابد، به‌دلیل پیچیدگی و ازدیاد محاسبات، مطالعه چندانی صورت نگرفته است. در این مقاله ما برآنیم که در حالت تانسور سه‌تایی یک گروه، نتیجه بهتری نسبت به گذشته در مورد نمای آن ارائه کنیم.

فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان از رده پوچ توانی $k \geq 3$ و دارای نمای p^e باشد که p یک عدد اول و مخالف ۳ است. ما در این مقاله نشان می‌دهیم نمای حاصل‌ضرب تانسوری سه‌تایی G، یعنی $G \otimes (G \otimes G)$، عدد $p^{\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)e}$ را می‌شمارد که در آن $\left[\frac{k}{2}\right]$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{k}{2}$ می‌باشد. بدین ترتیب نمای ارائه شده توسط الیس در [۷]، بهبود می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی، گروه پوچ‌توان، رده پوچ‌توانی، نمای گروه.

*.عهده‌دار مکاتبات: Email: Halimeh.Hadizadeh@gmail.com

۱- معرفی

فرض کنید G و H دو گروه باشند که بر روی یکدیگر به‌صورت سازگار و بر روی خودشان با مزدوج عمل می‌کنند. عمل G بر روی H را با نماد ${}^{g}h$ و عمل H بر روی G را با ${}^{h}g$ نشان می‌دهیم که $g \in G$ و $h \in H$. همچنین عمل مزدوج در گروه G را به‌صورت ${}^{g}g' = gg'g^{-1}$، $g, g' \in G$ در نظر می‌گیریم.

حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی G و H گروه تولید شده توسط همه $g \otimes h$ هاست که در روابط زیر صدق می‌کند ($g, g' \in G$ و $h, h' \in H$):

$$gg' \otimes h = \left({}^{g}g' \otimes {}^{g}h\right)(g \otimes h)$$

و

$$g \otimes hh' = (g \otimes h)\left({}^{h}g \otimes {}^{h}h'\right)$$

این گروه که با نماد $G \otimes H$ نمایش داده می‌شود تعمیم حاصل‌ضرب تانسوری معمولی گروه‌های آبلی به‌عنوان $\mathbb{Z}$_ مدول می‌باشد که دارای کاربردهای توپولوژیکی نیز هست و توسط براون و لودی در سال ۱۹۸۷ معرفی شد. برای مطالعه بیشتر به [۲] مراجعه کنید.

در حالت خاص $G = H$ و با این فرض که همه عمل‌ها مزدوج باشند، گروه $G \otimes G$ را مربع تانسوری ناآبلی G می‌نامند. تاکنون مطالعات فراوانی در مورد خواص این گروه از جمله به‌دست آوردن کران‌هایی برای مرتبه و نمای آن، انجام شده است. به‌عنوان نمونه [۵, ۶, ۸, ۱۲] را ملاحظه کنید.

حال فرض کنید گروه G بر روی گروه $G \otimes G$ با ${}^{g}(g_1 \otimes g_2) = \left({}^{g}g_1 \otimes {}^{g}g_2\right)$ و $G \otimes G$ بر روی G با ${}^{(g \otimes g_1)}g_2 = {}^{[g,g_1]}g_2$ عمل کند که در آن $[g,g_1] = gg_1g^{-1}g_1^{-1}$، جابجاگر g و g_1 می‌باشد و $g,g_1,g_2 \in G$ در این‌صورت حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌های $G \otimes G$ و G را با نماد $\otimes^3 G$ نمایش داده و آنرا حاصل‌ضرب تانسوری سه تایی G می‌نامیم، یعنی $\otimes^3 G = (G \otimes G) \otimes G$.

این گروه اولین بار توسط الیس در [۶] معرفی شد. وی همچنین در [۷، گزاره ۵] ثابت کرد اگر گروه پوچ‌توان G دارای نمای $exp(G) = p^e$ و رده پوچ‌توانی $cl(G) = k \geq 2$ باشد آن‌گاه

$$exp(\otimes^3 G) \mid p^{\left[\frac{k}{2}\right]e}$$

که در آن $\left[\frac{k}{2}\right]$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{k}{2}$ است.

در این مقاله برآنیم که کران فوق را در حالت $k \geq 3$ و به ازای $p \neq 3$ بهبود بخشیده و قضیه زیر را ثابت کنیم:

قضیه اصلی: اگر G گروهی پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی $k \geq 3$ و دارای نمای p^e باشد که $p \neq 3$، آن‌گاه

$$exp(\otimes^3 G) \mid p^{\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)e}$$

که در آن $\left[\frac{k}{2}\right]$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{k}{2}$ است.

۲- نتایج مقدماتی

در این بخش به جمع‌آوری برخی خواص و اثبات برخی نتایج مقدماتی می‌پردازیم که برای اثبات قضیه اصلی سودمند خواهد بود.

لم ۲-۱: فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی ۳ باشد. در این‌صورت به ازای هر $x,y \in G$ و هر $m,n \in \mathbb{N}$ داریم:

1) $(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{\binom{n}{2}} [y,x,x]^{\binom{n}{2}} [y,x,y]^{\binom{n}{2}+2\binom{n}{2}}$;

2) $[x^m,y^n] = [x,y]^{mn} [x,y,x]^{n\binom{m}{2}} [x,y,y]^{m\binom{n}{2}}$

برهان: به [۱] مراجعه کنید.

لم ۲-۲: فرض کنید G یک گروه باشد در این‌صورت به ازای هر $x,y,z,t \in G$ و $c \in Z(G)$ روابط زیر برقرارند:

1) $(x \otimes y)^{-1} = {}^{x}(x^{-1} \otimes y) = {}^{y}(x \otimes y^{-1})$;

2) $[x,y] \otimes z = (x \otimes y)^{z}(x \otimes y)^{-1}$

و

$x \otimes [y,z] = {}^{x}(y \otimes z)(y \otimes z)^{-1}$;

3) $[x,y] \otimes c = 1;$
4) $[x \otimes y, z \otimes t] = [x,y] \otimes [z,t]$

برهان: به [۳] مراجعه کنید.

لم۲-۳: فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی ۳ باشد و $x,y,z,t \in G$ در این‌صورت

1) $^{[z,t]}(x \otimes y) = (x \otimes y)(x \otimes [z,t,y])([z,t,x] \otimes y);$

2) $^{z}(x \otimes y) = (x \otimes [z,y])(x \otimes y)([z,x] \otimes [z,y])([z,x] \otimes y)(x \otimes [z,x,y])(x \otimes [z,y,y])([z,y,x] \otimes y)([z,x,x] \otimes y)$

برهان: ۱) با استفاده از روابط $G \otimes G$ و لم **۲-۲ (۳)** داریم:

$$^{[z,t]}(x \otimes y) = [z,t,x]x \otimes [z,t,y]y = (x \otimes [z,t,y])(x \otimes y)([z,t,x] \otimes y)$$

اکنون بنا بر لم **۲-۲ (۴)** نتیجه برقرار است.
۲) با استفاده از روابط $G \otimes G$ و لم **۲ -۲** و با کمک رابطه **(۱)** از همین لم به‌سادگی نتیجه می‌شود.

لم ۲-۴: فرض کنید G یک گروه باشد و $x,y,z \in G$. در این‌صورت
۱) نگاشت‌های

$$\begin{cases} \lambda: (G \otimes G) \otimes G \longrightarrow G \otimes G \\ (x \otimes y) \otimes z \longmapsto (x \otimes y)^z (x \otimes z)^{-1} \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} \lambda': (G \otimes G) \otimes G \longrightarrow G \\ (x \otimes y) \otimes z \longmapsto [x,y,z] \end{cases}$$

همریختی‌هایی هستند به‌طوری‌که G بر روی $Ker\lambda'$ و $G \otimes G$ بر روی $Ker\lambda$ به‌صورت بدیهی عمل می‌کنند. علاوه بر این $Ker\lambda$ و $Ker\lambda'$ زیرمجموعه مرکز $(G \otimes G) \otimes G$ هستند.
۲) چنان‌چه $[x,y] \otimes z = 1$، آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح n،

$$(x \otimes y) \otimes z^n = \left((x \otimes y) \otimes z\right)^n$$

و

$$(x \otimes y)^n \otimes z = \left((x \otimes y) \otimes z\right)^n$$

در حالتی‌که $[x,y,z] \in Z(G)$ آن‌گاه

$$x \otimes [y,z]^n = (x \otimes [y,z])^n$$

۳) به ازای هر $a,b,c \in G$ داریم:

$$^{(a \otimes b) \otimes c}\left((x \otimes y) \otimes z\right) = {}^{[a,b] \otimes c}\left((x \otimes y) \otimes z\right) = {}^{[a,b,c]}\left((x \otimes y) \otimes z\right)$$

در حالت خاص اگر G پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی ۳ باشد آن‌گاه گروه $\otimes^3 G$ آبلی است.

برهان: ۱) به [۳] مراجعه شود.
۲) با استفاده از بخش **(۱)** از همین لم به‌سادگی نتیجه می‌شود.
۳) به [۳] مراجعه شود.

۳- اثبات قضیه اصلی

در این بخش مقدمات اثبات قضیه اصلی را فراهم آورده و در نهایت قضیه اصلی را با استقراء بر روی رده پوچ‌توانی گروه اثبات می‌کنیم. نخست به گزاره زیر در خصوص گروه‌های پوچ‌توان از رده ۳ توجه کنید. به‌منظور سهولت در محاسبات از این پس از نماد $x \otimes y \otimes z$ به‌جای $(x \otimes y) \otimes z$ استفاده می‌کنیم.

گزاره۳-۱: فرض کنید G گروهی پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی ۳ باشد و $x,y,z \in G$ در این‌صورت به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 3$ داریم:

$$x \otimes y \otimes z^n = (x \otimes y \otimes z)^n (x \otimes [z,y,y] \otimes z)^{\binom{n}{2}} (x \otimes [z,x,y] \otimes z)^{\binom{n}{2}} ([z,x,x] \otimes y \otimes z)^{\binom{n}{2}} ([z,y,x] \otimes y \otimes z)^{\binom{n}{2}} (x \otimes [z,y] \otimes z)^{\binom{n}{2}} ([z,x] \otimes [z,y] \otimes z)^{\binom{n}{2}+2\binom{n}{2}}$$

$([z,x] \otimes y \otimes z)^{\binom{n}{2}}$
$\left(x \otimes [z,[z,y]] \otimes z\right)^{\binom{n}{2}}$
$\left([z,[z,x]] \otimes y \otimes z\right)^{\binom{n}{2}}$

برهان. در ابتدا توجه کنید که

$$x \otimes y \otimes z^2 = (x \otimes y \otimes z)\ {}^{z}(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y \otimes z)(\ {}^{z}(x \otimes y) \otimes z)$$

حال با استفاده از لم **۲-۳ (۲)** و همچنین لم **۲-۴ (۱)** داریم:

$$x \otimes y \otimes z^2 = (x \otimes y \otimes z)^2 (x \otimes [z,y,y] \otimes z) (x \otimes [z,x,y] \otimes z) ([z,x,x] \otimes y \otimes z) ([z,y,x] \otimes y \otimes z) (x \otimes [z,y] \otimes z) ([z,x] \otimes [z,y] \otimes z) ([z,x] \otimes y \otimes z)$$

در حالت $n = 3$ و با استفاده از رابطه اخیر داریم:

$$x \otimes y \otimes z^3 = (x \otimes y \otimes z)\ {}^{z}(x \otimes y \otimes z^2) = (x \otimes y \otimes z)^3 (x \otimes [z,y,y] \otimes z)^2 (x \otimes [z,x,y] \otimes z)^2 ([z,x,x] \otimes y \otimes z) ([z,y,x] \otimes y \otimes z)^2 (x \otimes [z,y] \otimes z)^2 ([z,x] \otimes [z,y] \otimes z)^2 ([z,x] \otimes y \otimes z) (x \otimes [z,y,y] \otimes z)(x \otimes [z,x,y] \otimes z) ([z,x,x] \otimes y \otimes z)([z,y,x] \otimes y \otimes z)\ {}^{z}(x \otimes [z,y] \otimes z) ([z,x] \otimes [z,y] \otimes z)\ {}^{z}([z,x] \otimes y \otimes z)$$

که با استفاده از لم **۲-۳ (۲)** و با مرتب کردن جملات نتیجه می‌شود:

$$x \otimes y \otimes z^3 = (x \otimes y \otimes z)^3 (x \otimes [z,y,y] \otimes z)^3 (x \otimes [z,x,y] \otimes z)^3 ([z,x,x] \otimes y \otimes z)^3 ([z,y,x] \otimes y \otimes z)^3 (x \otimes [z,y] \otimes z)^3 ([z,x] \otimes [z,y] \otimes z)^5 ([z,x] \otimes y \otimes z)^3\left(x \otimes [z,[z,y]] \otimes z\right) \left([z,[z,x]] \otimes y \otimes z\right)$$

بنابراین با استقراء بر روی n، حکم به‌سادگی به‌دست می‌آید.

گزاره ۳-۲: فرض کنید G گروهی پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی ۳ باشد و $\exp(G) = p^e$ که $p \neq 3$ در این‌صورت

$$exp(\otimes^3 G) \mid exp(G)$$

برهان: فرض کنید $p = 2$ و $n = 2^e$ در این‌صورت با توجه به لم **۲-۱ (۱)**، به ازای هر $x,y \in G$ داریم:

$$[y,x]^{\binom{n}{2}}[y,x,y]^{\binom{n}{2}} = 1$$

از طرفی بنا بر لم **۲- ۱ (۲)** داریم:

$$[x,y,x]^{\binom{n}{2}} = 1$$

بنابراین $[y.x]^{\binom{n}{2}} = 1$ لذا با استفاده از لم **۲- ۴ (۲)** و باتوجه به این‌که $\binom{n}{3} \mid n$ و با به‌کارگیری گزاره **۳- ۱**، داریم:

$$(x \otimes y \otimes z)^n = 1$$

چنان‌چه $p > 3$ و $n = p^e$، با توجه به لم **۲- ۴ (۲)** و گزاره **۳- ۱** واضح است‌که

$$(x \otimes y \otimes z)^n = 1$$

برهان قضیه اصلی: فرض کنید G پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی $k \geq 3$ باشد. بنا بر گزاره **۳- ۲**، حکم برای $k = 3$ برقرار است. حال با استقراء بر روی k اثبات را کامل می‌کنیم. بنا بر گزاره ۵ از [۷] دنباله زیر دقیق است:

$$(\gamma_{k-1}(G) \otimes G) \otimes G \longrightarrow \otimes^3 (G) \longrightarrow \otimes^3 \frac{G}{\gamma_{k-1}(G)} \longrightarrow 1$$

از طرفی بنا بر لم **۲- ۴ (۲)** می‌دانیم:

$$exp\left((\gamma_{k-1}(G) \otimes G) \otimes G\right)|$$

$exp(\gamma_{k-1}(G) \otimes G) \mid exp(G)$

بنابراین با توجه به دنباله دقیق فوق و بنابر فرض استقراء، به‌دست می‌آوریم:

$exp(\otimes^3 G) \mid p^{([\frac{k-2}{2}]-1)e} \times p^e = p^{([\frac{k}{2}]-1)e}$

و این اثبات را کامل می‌کند.

حدس: اگر G گروهی پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی $k \geq c$ و دارای نمای p^e باشد، آن‌گاه

$exp(\otimes^c G) \mid p^{([\frac{k}{2}]-c+2)e}$

که در آن $\otimes^c G$ حاصل‌ضرب تانسوری c–تایی گروه G است.

۴- کاربردها

در این بخش به ارائه نتایج و مثالی از کاربرد نتیجه اصلی مقاله می‌پردازیم.

فرض کنیم G و M و N سه گروه باشند و $\mu: M \to G$ و $\vartheta: N \to G$ دو مدول متقاطع شده باشند. بنا به تعریف مدول متقاطع شده در [۲] گروه G بر روی M و N به‌ترتیب با $^g m$ و $^g n$ عمل می‌کند که $g \in G$ و $m \in M$ و $n \in N$. عمل M بر روی N را با نماد $^m n = {}^{\mu m} n$ و عمل N بر روی M را با $^n m = {}^{\vartheta n} m$ تعریف می‌کنند که $m \in M$ و $n \in N$. همچنین M (و N) بر روی خودش با مزدوج عمل می‌کند. حاصل‌ضرب بیرونی $M \wedge N$ در [۲] به‌عنوان گروه تولید شده توسط همه $m \otimes n$ها تعریف شده است، که در روابط زیر صدق می‌کند ($m, m' \in M$ و $n, n' \in N$):

$mm' \otimes n = ({}^m m' \otimes {}^m n)(m \otimes n),$
$m \otimes nn' = (m \otimes n)({}^n m \otimes {}^n n'),$

اگر $\mu m = \vartheta n$ آن‌گاه $m \otimes n = 1$.

به‌وضوح همریختی همانی $G \to G$ یک مدول متقاطع شده می‌باشد که درآن گروه G بر روی G با مزدوج عمل می‌کند. همریختی $\sigma: G\wedge G \to G$ با ضابطه $\sigma(g_1 \otimes g_2) = [g_1, g_2]$ نیز مدول متقاطع شده است که $g_1, g_2 \in G$. بنا به تعریف $M \wedge N$، حاصل‌ضرب بیرونی گروه‌های $G \wedge G$ و G را با نماد $\wedge^3 G = (G \wedge G) \wedge G$ نشان می‌دهیم و آن‌را حاصل‌ضرب بیرونی سه‌تایی G می‌نامیم. همریختی $\partial: (G\wedge G)\wedge G \to G$ که ∂ نگاشت جابجاگر است، نیز مدول متقاطع شده است.

فرض کنید G یک گروه دلخواه با نمایش آزاد $G = \frac{F}{R}$ باشد، در این‌صورت تعریف می‌کنیم $\gamma_1(R, F) = R$ و $\gamma_{k+1}(R, F) = [\gamma_k(R, F), F]$، همچنین $\gamma_k(F) = \gamma_k(F, F)$ برای هر $k \geq 1$. به ازای عدد صحیح مثبت c، ضربگر $c-$ پوچ‌توان از گروه G که با $\mu^{(c)}(G)$ نشان می‌دهیم یک گروه آبلی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$\mu^{(c)}(G) = \frac{R \cap \gamma_{c+1}(F)}{\gamma_{c+1}(R,F)}\ ;\ c \geq 1$

می‌دانیم $\mu^{(1)}(G)$ همان ضربگر شور معمولی و $\mu^{(2)}(G) = \frac{R \cap \gamma_3(F)}{[R,F,F]}$ ضربگر ۲- پوچ‌توان از G است.

گزاره ۴-۱: فرض کنید G یک $p-$ گروه متناهی از رده پوچ‌توانی $k \geq 3$ باشد $(p \neq 3)$. در این‌صورت

1) $\exp(\wedge^3 G) \mid \exp(G)^{[\frac{k}{2}]-1}$;

2) $\exp\left(\mu^{(2)}(G)\right) \mid \exp(G)^{[\frac{k}{2}]-1}$

برهان: با استفاده از نتیجه‌ای از [۴، قضیه ۲۶]، $\mu^{(2)}(G)$ تصویر همریخت از گروه $\ker(\partial: \wedge^3 (G) \to G)$ است که ∂ نگاشت جابجاگر است. بوضوح $\wedge^3 (G)$ نیز تصویر همریخت از $\otimes^3 (G)$ تحت نگاشت طبیعی می‌باشد. لذا حکم به‌راحتی به‌دست می‌آید.

در مثال زیر، نشان می‌دهیم که اگر برای $p-$ گروه متناهی G، مرتبه گروه $\otimes^3 (G)$ در دست باشد با استفاده از قضیه اصلی مقاله، تا حدودی می‌توان ساختار $\otimes^3 (G)$ را معین کرد.

مثال ۴-۲: فرض کنید G یک $p-$ گروه از مرتبه p^4 با نمایش زیر باشد $(p > 3)$:

$$G =< \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid [\alpha_1, \alpha] = \alpha_2, [\alpha_2, \alpha] = \alpha^p = \alpha_3, \alpha_1^p = \alpha_2^p = \alpha_3^p = 1 >$$

این گروه در دسته‌بندی $p-$ گروه‌ها تا مرتبه p^6 در مرجع [۱۰] معرفی شده است و می‌دانیم

$$\gamma_2(G) \cong C_p \times C_p, \gamma_3(G) = Z(G) \cong C_p, \exp(G) = p^2, G^{ab} = \frac{G}{\gamma_2(G)} \cong C_p \times C_p, \frac{G}{\gamma_3(G)} \cong E_1, d(G) = 2$$

که در آن E_1 یک $p-$ گروه بسیار ویژه از مرتبه p^3 و نمای p می‌باشد و $d(G)$ تعداد مولدهای کمین گروه G است.

با استفاده از [۹] می‌دانیم $E_1 \otimes E_1 \cong (C_p)^6$. از طرفی چون $\mu(G) \cong C_p$ ([۱۱]) و $\mu(G^{ab}) \cong C_p$، بنا بر [۹] نتیجه می‌شود $|G \otimes G| = p^6$.

بنابراین با توجه به برویختی طبیعی $G \otimes G \to \frac{G}{\gamma_3(G)} \otimes \frac{G}{\gamma_3(G)}$ خواهیم داشت، $G \otimes G \cong (C_p)^6$.

حال برویختی $G \otimes G \to \gamma_2(G)$ با ضابطه $x \otimes y \longmapsto [x, y]$ و با هسته $J_2(G)$ را در نظر بگیرید. طبق محاسبات فوق، واضح است که $J_2(G) \cong (C_p)^4$. دنباله دقیق زیر در [۶] معرفی شده است:

$$J_2(G) \otimes G \to \otimes^3 G \to \gamma_2(G) \otimes G \to 1,$$

طبق همان مرجع می‌دانیم $|\gamma_2(G) \otimes G| \leq p^4$. از طرف دیگر چون گروه‌های G و $J_2(G)$ بر روی یکدیگر به‌صورت بدیهی عمل می‌کنند، پس داریم:

$$|J_2(G) \otimes G| \cong |J_2(G) \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}| = p^8$$

از این‌رو با توجه به دنباله فوق نتیجه می‌شود $| \otimes^3 G| \leq p^{12}$.

اکنون با توجه به برویختی‌های $\otimes^3 G \to \otimes^3 \frac{G}{\gamma_3(G)}$ و

$$\otimes^3 \frac{G}{\gamma_3(G)} \to \left(\frac{G}{\gamma_3(G)} \otimes \frac{G}{\gamma_3(G)}\right)^{ab} \otimes \left(\frac{G}{\gamma_3(G)}\right)^{ab}$$

داریم

$$|\otimes^3 G| \geq \left|\left(\frac{G}{\gamma_3(G)} \otimes \frac{G}{\gamma_3(G)}\right)^{ab} \otimes \left(\frac{G}{\gamma_3(G)}\right)^{ab}\right| = p^{12}$$

بدین ترتیب خواهیم داشت $|\otimes^3 G| = p^{12}$.

حال برای به‌دست آوردن ساختار گروه $\otimes^3 G$ با توجه به این‌که می‌دانیم یک گروه آبلی است، کافی است از قضیه اصلی مقاله استفاده کنیم. چون G از رده پوچ توانی ۳ می‌باشد بنا بر گزاره **۳-۲** می‌دانیم $\exp(\otimes^3 G) \mid \exp(G) = p^2$. بنابراین گروه $\otimes^3 G$ یا از نمای p یا از نمای p^2 می‌باشد. با دقت در دنباله دقیق و برویختی‌های فوق، معلوم می‌شود که $exp(\otimes^3 G) = p$ بنابراین $\otimes^3 G \cong (C_p)^{12}$.

فهرست منابع

[1] B. Ahmadi, H. Doostie, On the 2-generator p-groups with non-cyclic commutator subgroup, Math. 4: 73-78 (2014).

[2] R. Brown, J. L. Loday, Van Kampen theorems for diagrams of spaces, Topology. 26: 311-335 (1987).

[3] R. Brown, D. L. Johnson, E. F. Robertson, Some computations of nonabelian tensor products of groups, J. Algebra. 111: 177-202 (1987).

[4] J. Burns, G. Ellis, On the nilpotent multipliers of a group, Math. z. 226: 405-428 (1997).

[5] G. Ellis, On the tensor square of a prime power group, Arch. Math. 66: 467-469 (1996).

[6] G. Ellis, A. Mcdermott, Tensor products of prime-power groups, J. Pure. Appl. Algebra. 132: 119-128 (1998).

[7] G. Ellis, On the relation between upper central quotients and lower central series of a group, Trans. Amer. Math. Soc. 353: 4219-4234 (2001).

[8] S. H. Jafari, A bound on the order of non-abelian tensor square of a prime-power group, Comm. Algebra. 40: 528-530 (2012).

[9] S. H. Jafari, F. Saeedi, E. Khamseh, Characterization of finite p −groups by their non-abelian tensor square, Comm. Algebra. 41: 1954-1963 (2013).

[10] R. James, The groups of order p^6 (p an odd prime), Math. Comp. 34: 613-637 (1980).

[11] E. Khamseh, M. R. R. Moghaddam, F. Saeedi, Characterization of finite p-groups by their schur multiplier, J. Algebra. Appl. 12: 1250035_1-1250035_9 (2013).

[12] P. Moravec, The exponents of nonabelian tensor products of groups, J. Algebra. 212: 1840-1848 (2008).