دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

روش جدید تفاضلات متناهی ضمنی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری زمان- مکان دوطرفه

حمیدرضا خدابنده‌لو[۱*]، الیاس شیوانیان[۲]، شعبان مصطفائی[۳]

[۱و۲و۳] گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۴/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۱/۳۱

چکیده

معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری تعمیمی از معادلات دیفرانسیل جزئی کلاسیک می‌باشد. تاریخ حساب دیفرانسیل کسری، تقریباً هم قدمت حساب دیفرانسیل مرتبه‌ی صحیح است، حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری زمینه‌ای از مطالعات ریاضی است که از تعاریف اولیه، از عملگرهای مشتق و انتگرال حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی به وجود آمده است. هرچند بخاطر فقدان سابقه‌ی کاربردی، حساب دیفرانسیل کسری پیشرفت کمی داشته است. بعلاوه این مدل‌ها در موضوعاتی مثل جریانات سیال و... کاربرد دارد. در این مقاله، ما بعضی از روش‌های کاربردی را برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری زمانی با مقادیر اولیه و مرزی با ضرایب متغییر روی دامنه‌ی متناهی مورد استفاده قرار داده‌ایم. سازگاری، پایداری و در نتیجه همگرایی روش را اثبات کرده و نشان داده‌ایم که روش کرانک-نیکلسون کسری با تقریب گرانوالد انتقال یافته بدون شرط پایدار است. این پژوهش از هردوجنبه‌ی تئوری و عددی حائز اهمیت می‌باشد، که در اینجا ما با ساختمان و تحلیل همگرایی الگوهای گسسته‌سازی سروکار داریم و همچنین مثال‌های عددی ارائه و از نظر مرتبه همگرایی با جواب تحلیلی دقیق مقایسه گردیده است.

واژه‌های کلیدی: تقریب تفاضلات متناهی ضمنی، معادلات دیفرانسیل جزئی کسری عددی، معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری زمان- مکان دوطرفه، فرمول گرانوالد- لتینکوف انتقال یافته، تحلیل پایداری.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:khodabandelo.hamidreza@gmail.com

۱- مقدمه

تاریخ حساب دیفرانسیل کسری، تقریباً هم قدمت حساب دیفرانسیل مرتبه‌ی صحیح است، حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری زمینه‌ای از مطالعات ریاضی است که از تعاریف اولیه، از عملگرهای مشتق و انتگرال حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی به وجود آمده است. هرچند بخاطر فقدان سابقه‌ی کاربردی، حساب دیفرانسیل کسری پیشرفت کمی داشته است[۱۱]. از اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی این مطلب توجه بیشتری را به خود جلب کرده است. سپس به تدریج کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف علمی و مهندسی از آن به دست آمده است. حساب دیفرانسیل کسری، در زمینه الکترو مغناطیس، ربوتیک، آشفتگی و بسیاری از پدیده‌های فیزیکی مورد استفاده قرار گرفته است[۱۲].

به عنوان مثال کاربردهای بسیار گسترده حسابان کسری در فیزیک، شیمی، اقتصاد، سیستم‌های دینامیکی، مهندسی پزشکی، علوم زیستی و... نشان دهنده این واقعیت می‌باشد. زمینه بزرگ دیگری که نیاز به استفاده از مشتقات مرتبه غیر صحیح دارد نظریه فرکتال‌ها می‌باشد، که این موضوع واقعیت طبیعت را به شکل بهتری منتقل می‌نماید.

۲- پیشینه تحقیق

حسابان کسری زمینه‌ای از آنالیز عددی است که به بررسی و کاربردهای انتگرال‌ها و مشتقات از مرتبه‌ی کسری می‌پردازد.

معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری از معادلات دیفرانسیل جزئی کلاسیک بوجود می‌آید، بعلاوه این مدل‌ها در کاربردهایی از قبیل جریان سیال، علوم مالی و موارد دیگر استفاده می‌شود[۱و۵].

اکنون به بررسی مسأله‌ی مقدار اولیه و مرزی معادله کسری زمان-مکان انتقال-پخش دوطرفه وابسته به زمان را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} + V(x)\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \Xi_D^\alpha u(x,t) + C(x,t)\,u(x,t) = s(x,t), \qquad (۱)$$

که

$$\Xi_D^\alpha u(x,t) = D_+(x)\,\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + D_-(x)\,\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}$$

روی دامنه متناهی $x_L < x < x_R$ و $0 \le t \le T$ و همچنین $V(x) > 0,\ D_-(x) > 0, D_+(x) > 0,$ و $C(x)$ توابع پیوسته در بازه $[x_L\ , x_R]$ می‌باشد. تابع $s(x,t)$ منبع یا زمان فرورفت می‌باشد. و روی $[x_L\ , x_R] \times [0,\ T]$ پیوسته است.

در اینجا $1 < \alpha < 2$ و $0 < \beta < 1$ در نظر می‌گیریم که α مرتبه کسری مشتق مکان و β مرتبه کسری مشتق زمان می‌باشد. ما همچنین شرایط اولیه $u(x,0) = u_0(x)$ را برای هر $x_L < x < x_R$ و مجموعه طبیعی شرایط مرزی برای این مسأله $u(x_L,t) = 0$ و $u(x_R,t) = 0$ برای همه $t \ge 0$ داریم.

علاوه‌براین، $\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta}$ مشتق کسری کاپوتو می‌باشد که[۱و۴و۵و۸]:

$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^T (t-\eta)^{-\beta}\, \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta}\, d\eta\ , \qquad (۲)$$

که $0 < \beta < 1$ و $\Gamma(.)$، تابع گاما می‌باشد. علامت (+) به معنی سمت چپ و علامت (-) به معنی سمت راست در مشتقات کسری ریمان - لیوویل از مرتبه α از تابع $f(x)$ برای $x \in [x_L\ , x_R]$ می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌گردد[۱و۲و۴و۵]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha f(x)}{\partial_+ x^\alpha} = \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \dfrac{d^2}{dx^2} \displaystyle\int_{x_L}^{x} \dfrac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-1}}\ , \\ \dfrac{\partial^\alpha f(x)}{\partial_- x^\alpha} = \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \dfrac{d^2}{dx^2} \displaystyle\int_{x}^{x_R} \dfrac{f(\xi)}{(\xi-x)^{\alpha-1}}\ , \end{cases} \qquad (۳)$$

که $1 < \alpha < 2$ می‌باشد.

اگر $\alpha = m$ و m عدد صحیح باشد آنگاه تعریف بالا مشتقات صحیح استاندارد را ارائه می‌کند که عبارتست از

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial_+ x^\alpha} = \frac{d^m f(x)}{d_+ x^m} \ , \\ \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial_- x^\alpha} = (-1)^m \frac{d^m f(x)}{d_- x^m} \ , \end{cases}$$

فرض کنیم این معادله کسری زمان–مکان انتقال– پخش دوطرفه دارای جواب یکتا و بطور کافی هموار داشته باشد. برای پایداری، از فرمول گرانوالد لتینکوف انتقال یافته برای تخمین مشتق کسری مکان استفاده می‌کنیم، تعریف گرانوالد–لتینکوف مشتق کسری از مرتبه α برای تابع $f(x)$ بطوریکه $x \in [x_L, x_R]$ که بطور خیلی محتمل بصورت محاسباتی شدنی است، بصورت زیر تعریف می‌شود[۶]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial_+ x^\alpha} = \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{[\frac{x-x_L}{h}]} g_k^{(\alpha)} f(x-kh) \ , \\ \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial_- x^\alpha} = \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{[\frac{x_R-x}{h}]} g_k^{(\alpha)} f(x-kh) \ , \end{cases} \qquad (۴)$$

که در آن h فاصله گام است و $g_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$ با $\binom{\alpha}{k}$ که ضریب دوجمله‌ای است.

تقریب گرانوالد انتقال یافته به شکل گسسته در هر گره x به صورت زیر معرفی می‌شود[۷].

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial_+ x^\alpha} = \\ \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{[l_1]+1} g_k^{(\alpha)} f(x-(k-1)h) \\ \quad + a_1 \ \frac{\partial^{\alpha+1} f(x)}{\partial_+ x^{\alpha+1}} h + O(h^2) \ , \\ \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial_- x^\alpha} = \\ \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{[l_2]+1} g_k^{(\alpha)} f(x-(k-1)h) \\ \quad + b_1 \ \frac{\partial^{\alpha+1} f(x)}{\partial_- x^{\alpha+1}} h + O(h^2), \end{cases} \qquad (۵)$$

بطوریکه $l_1 = \frac{(x-x_L)}{h}$ و $l_2 = \frac{(x_R-x)}{h}$، $[l_1]$ و $[l_2]$ مقدار پایینی l_1 و l_2 هستند. a_1 و b_1، ثابت‌های مستقل می‌باشند و به x, h, f وابسته نیستند و $g_k^{(\alpha)}$ ضریبی است که بصورت بازگشتی به روش زیر قابل محاسبه است:

$$g_0^{(\alpha)} = 1, \qquad g_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) g_{k-1}^{(\alpha)} \qquad (۶)$$

توجه داریم که وزنهای هنجارشده فقط به مرتبه α و نشان k بستگی دارد.

تعریف تحلیلی بدست آمده از رابطه (۱) در قاعده‌سازی PDE کسری مورد استفاده قرار می‌گیرد، هرچند تعریف گرانوالد (۴) ممکن است برای گسسته سازی $FPDE$ به منظور بدست آوردن راه حل عددی استفاده شود. برای جزئیات بیشتر درمورد مفاهیم و تعاریف مشتق کسری می توان به منابع [۴و۵و۸] مراجعه کرد. منبع [۵] بطور خیلی مفصل رفتار مشتقات کسری راست را به اندازه رفتار اساسی مشتقات کسری چپ مورد بحث قرار می‌دهد[۵].

۳- روش حل معادله

برای پایداری روش تقریبی عددی، فرض کنیم:

$$t_k = k\Delta t, \ (k = 0,1,2, \dots, M),$$

بطوریکه $0 \le t_n \le T$ و $\Delta x = h > 0$ و $\Delta x = \frac{(x_R-x_L)}{N}$ اندازه گام در مسیر x با $x_i = x_L + ih$ برای $i = 0, \dots, N$ باشد.

بطور معمول، تقریب تفاضلات متناهی زیر را برای مشتق کسری زمانی ظاهر شده در معادله (۱) به کار می‌گیریم:

$$\frac{\partial^\beta u(x_i,t^{k+1})}{\partial t^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{j=0}^{k} \frac{u(x_i,t^{j+1}) - u(x_i,t^j)}{\Delta t} \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} \frac{d\xi}{(t^{k+1}-\xi)^\beta} . \qquad (۷)$$

بنابراین می‌نویسیم:

$$\frac{\partial^\beta u(x_i,t^{k+1})}{\partial t^\beta} = \frac{\Delta t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{j=0}^{k} \frac{u(x_i,t^{k-j+1}) - u(x_i,t^{k-j})}{\Delta t} \left[(j+1)^{(1-\beta)} - j^{(1-\beta)}\right] + O(\Delta t).$$

و از طرف دیگر داریم:

$$\frac{\partial\, u(x_i,t^{k+1})}{\partial x}=\frac{u(x_i,t^{k+1})-u(x_{i-1},t^{k+1})}{h}+O(h).$$

ما مشتق کسری مکان از مرتبه α را بوسیله فرمول تفاضلات متناهی گرانوالد گسسته سازی می‌کنیم [۸]. بنا به تعریف ریمان – لیوویل و گرانوالد – لتینکوف که تحت شرایطی با هم، هم ارز می‌شوند، اگر $f(x)$ در فضای سوبولوف در بازه‌ی $[x_L,x_R]$ به ازای هر $1<\alpha\le 2$، دارای مشتق دوم باشد آنگاه مشتق ریمان – لیوویل و گرانوالد – لتینکوف در فاصله $[x_L,x_R]$ وجود دارد و یکی هستند. این هم ارزی به ما این امکان را می‌دهد که درگسسته‌سازی عددی، از تعریف گرانوالد که در محاسبات مناسب‌تر است، استفاده کنیم. ولی بطور کلی تقریب گرانوالد استاندارد، باعث منتج شدن معادلات تفاضلات متناهی غیر پایدار می‌شود صرف نظر از اینکه روش تفاضلات متناهی بدست آمده صریح یا ضمنی باشد.

برای مطالعه بیشتر می‌توان به منبع شماره[۲۸] مراجعه کرد [۲۸]. بنابراین ما از تقریب گرانوالد انتقال یافته مرتبه اول (۵) برای گسسته‌سازی حالت انتشار کسری استفاده خواهیم کرد[۷].

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{\alpha}u(x_i,t^{n+1})}{\partial_+x^{\alpha}}=\dfrac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{i+1}g_k^{(\alpha)}\,u(x_{i-k+1},t^{n+1})+R_+^{(2)}(x_i,t^{n+1}),\\[2mm] \dfrac{\partial^{\alpha}u(x_i,t^{n+1})}{\partial_-x^{\alpha}}=\dfrac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{N-i+1}g_k^{(\alpha)}\,u(x_{i+k-1},t^{n+1})+R_-^{(2)}(x_i,t^{n+1}),\end{cases}$$

که $R_-^{(2)}(x_i,t^{n+1}),R_+^{(2)}(x_i,t^{n+1})$ جملات خطای عمومی از مرتبه $O(h)$ می‌باشند که بصورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\begin{cases}R_+^{(2)}(x_i,t^{n+1})=a_1\dfrac{\partial^{\alpha+1}u(x_i,t^{n+1})}{\partial_+x^{\alpha+1}}h+O(h^2),\\[2mm] R_-^{(2)}(x_i,t^{n+1})=b_1\dfrac{\partial^{\alpha+1}u(x_i,t^{n+1})}{\partial_-x^{\alpha+1}}h+O(h^2),\end{cases}$$

اگر تقریب گرانوالد– لتینکوف انتقال یافته را برای بدست آوردن تقریب عددی در معادله (۱) جایگذاری کنیم، معادلات تفاضلات متناهی نتیجه شده عبارتست از:

$$\frac{\Delta t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{j=0}^{k}\frac{u(x_i,t^{k-j+1})-u(x_i,t^{k-j})}{\Delta t}=-V(x_i)\frac{u(x_i,t^{k+1})-u(x_{i-1},t^{k+1})}{h}+\frac{D_+(x_i)}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{i+1}g_j^{(\alpha)}\,u(x_{i-j+1},t^{k+1})+\frac{D_-(x_i)}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{N-i+1}g_j^{(\alpha)}\,u(x_{i+j-1},t^{k+1})-C(x_i)u(x_i,t^{k+1})+s_i^{k+1}+O(\Delta t+h).$$

و همچنین تعریف می‌کنیم:

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}\coloneqq u(x_i,t^n),V_i\coloneqq V(x_i),$$
$$D_{+i}\coloneqq D_+(x_i),D_{-i}\coloneqq D_-(x_i),$$
$$s_i^{n+1}\coloneqq s(x_i,t^{n+1}),C_i\coloneqq C(x_i),$$
$$p_i\coloneqq\frac{V_i\Delta t^{\beta}}{h}\Gamma(2-\beta),$$
$$r_i\coloneqq\frac{D_{+i}\Delta t^{\beta}}{h^{\alpha}}\Gamma(2-\beta),$$
$$q_i\coloneqq\frac{D_{-i}\Delta t^{\beta}}{h^{\alpha}}\Gamma(2-\beta),$$
$$c_i\coloneqq C_i\Delta t^{\beta}\Gamma(2-\beta),$$

و $\theta_j=(j+1)^{(1-\beta)}-j^{(1-\beta)}$ برای هر $j=0,1,2,\dots,M$، در این صورت داریم:

$$\sum_{j=0}^{k}\theta_j\left(u_i^{k+1-j}-u_i^{k-j}\right)=-p_i\left(u_i^{k+1}-u_{i-1}^{k+1}\right)+r_i\sum_{j=0}^{i+1}g_j^{(\alpha)}u_{i-j+1}^{k+1}+q_i\sum_{j=0}^{N-i+1}g_j^{(\alpha)}u_{i+j-1}^{k+1}+c_iu_i^{k+1}+\Delta t^{\beta}s_i^{k+1}.$$

از آنجایی که خطای برشی عمومی برابر $O(\Delta t + h)$ می‌باشد بنابراین روش سازگار است[۹].
می‌توانیم الگوی بالا را بصورت زیر بازنویسی کنیم:
اگر $k = 0$ آنگاه

$$\begin{aligned} &-\left(r_i + q_i g_2^{(\alpha)}\right) u_{i+1}^1 \\ &+\left(1 + p_i - r_i g_1^{(\alpha)} - q_i g_1^{(\alpha)} + c_i\right) u_i^1 \\ &-\left(p_i + q_i + r_i g_2^{(\alpha)}\right) u_{i-1}^1 \\ &-r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j^{(\alpha)} u_{i-j+1}^1 \\ &-q_i \sum_{j=3}^{N-i+1} g_j^{(\alpha)} u_{i+j-1}^1 = \\ &u_i^0 + \Delta t^\beta \Gamma(2-\beta) s_i^1, \end{aligned} \tag{۹}$$

و اگر $k > 0$ برای $i = 1, \dots, N-1,$ $k = 1,2, \dots, M-1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &-\left(r_i + q_i g_2^{(\alpha)}\right) u_{i+1}^{k+1} \\ &+u_i^{k+1} \\ &\left(1 + p_i - r_i g_1^{(\alpha)} - q_i g_1^{(\alpha)} + c_i\right) \\ &-\left(p_i + q_i + r_i g_2^{(\alpha)}\right) u_{i-1}^{k+1} \\ &-r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j^{(\alpha)} u_{i-j+1}^{k+1} \\ &-q_i \sum_{j=3}^{N-i+1} g_j^{(\alpha)} u_{i+j-1}^{k+1} \\ &= u_i^k - \sum_{j=1}^{k} \theta_j (u_i^{k+1-j} - u_i^{k-j}) \\ &+\Delta t^\beta \Gamma(2-\beta) s_i^{k+1} \\ &= (2 - 2^{1-\beta}) u_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} u_i^{k-j} \\ &[2(j+1)^{1-\beta} - (j+2)^{1-\beta} - j^{1-\beta}] \\ &+\theta_k u_i^0 + \Delta t^\beta \Gamma(2-\beta) s_i^{k+1}. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که به فرم ماتریسی داریم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^1 = \boldsymbol{U}^0 + \Delta t^\beta \Gamma(2-\beta)\, \boldsymbol{S}^1, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{k+1} = d_1 \boldsymbol{U}^k + d_2 \boldsymbol{U}^{k-1} + \dots + d_k \boldsymbol{U}^1 \\ \quad +\theta_k \boldsymbol{U}^0 + \Delta t^\beta \Gamma(2-\beta)\, \boldsymbol{S}^{k+1}, \\ \boldsymbol{U}^0 = \boldsymbol{u}_0, \end{cases}$$

که

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{U}^k = \left[u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k\right]^{\boldsymbol{T}}, \\ &\boldsymbol{u}_0 = [u_1(0), u_2(0), \dots, u_{N-1}(0)]^{\boldsymbol{T}}, \\ &\boldsymbol{S}^{k+1} = \left[s_1^{k+1}, \dots, s_{N-1}^{k+1}\right]^T, \\ &d_j = 2j^{1-\beta} - (j+1)^{1-\beta} - (j-1)^{1-\beta}, \end{aligned}$$

$j = 1,2, \dots, k.$

گسسته‌سازی در نقطه داخلی شبکه‌ای x داخل ماتریس را معین می‌کند $A_{i,j}$ برای $i = 1, \dots, N-1$ و $j = 1, \dots, N-1$ بوسیله

$$A_{i,j} = \begin{cases} -p_i - \left(r_i g_2^{(\alpha)} + q_i g_0^{(\alpha)}\right), & for\ j = i-1 \\ 1 + p_i - r_i g_1^{(\alpha)} - q_i g_1^{(\alpha)} + c_i, & for\ j = i \\ -\left(r_i g_0^{(\alpha)} + q_i g_2^{(\alpha)}\right), & for\ j = i+1 \\ -r_i g_{i-j+1}^{(\alpha)}, & for\ j < i-1 \\ -q_i g_{j-i+1}^{(\alpha)}, & for\ j > i+1 \end{cases} \tag{۱۱}$$

۴- تجزیه و تحلیل سازگاری و همگرایی روش

در این بخش، رفتار سازگاری و همگرایی روش جدید تفاضلات متناهی ضمنی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری زمان- مکان دوطرفه را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم.
ما این بررسی را بوسیله تقریب آنالیز ماتریسی انجام خواهیم داد. برای این کار، ابتدا بعضی مفاهیم اساسی در تئوری آنالیز ماتریسی را یادآوری می‌کنیم.

لم ۴-۱: ضرایب $g_k^{(\alpha)}$ بدست آمده در (۶) با $1 < \alpha \le 2$ در ویژگی‌های زیر صادق می‌باشد.

$$\begin{cases} g_0^{(\alpha)} = 1, g_1^{(\alpha)} = -\alpha < 0, \\ 1 \ge g_2^{(\alpha)} \ge g_3^{(\alpha)} \ge \dots \ge 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha)} = 0, \\ \sum_{k=0}^{m} g_k^{(\alpha)} \le 0 \ (m \ge 1). \end{cases}$$

برای اثبات لم ۴-۱، کافی است به منبع [۱۰] مراجعه کنید.

قضیه۴-۱: دستگاه ضمنی تعریف شده بوسیله معادلات دیفرانسیل خطی روابط (۹) و (۱۰)، دارای جواب

منحصربفرد است و بدون قید و شرط برای هر $0 < \beta < 1$ و $1 < \alpha \le 2$ پایدار است.

اثبات: می خواهیم قضیه گرشگورین را برای استنتاج اینکه هر مقدار ویژه ماتریس $\boldsymbol{A}$، اندازه‌اش بطور اکید از یک بیشتر است، بکار ببریم.
طبق قضیه گرشگورین، مقادیر ویژه ماتریس $\boldsymbol{A}$ در قرص‌هایی به مرکز $A_{i,i} = 1 + p_i + c_i + \alpha(r_i + q_i)$ با شعاع زیر می‌باشد:

$$R_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N-1} |A_{i,j}| = \sum_{j=1}^{i-1} |A_{i,j}| + \sum_{j=i+1}^{N-1} |A_{i,j}| = \sum_{j=1}^{i-2} \left|-r_i g_{i-j+1}^{(\alpha)}\right| + \left|-p_i - r_i g_2^{(\alpha)} - q_i\right| + \sum_{j=i+2}^{N-1} \left|-q_i g_{j-i+1}^{(\alpha)}\right| + \left|-\left(r_i + q_i g_2^{(\alpha)}\right)\right| =$$
$$r_i \sum_{j=1, j\neq i}^{i+1} \left|g_{i-j+1}^{(\alpha)}\right| + q_i \sum_{j=1, j\neq i}^{N-i+1} \left|g_{j-i+1}^{(\alpha)}\right| + p_i \le p_i - r_i g_1^{(\alpha)} - q_i g_1^{(\alpha)} \le p_i + c_i + \alpha(r_i + q_i)\,,$$

از این رو هر مقدار ویژه λ از ماتریس $\boldsymbol{A}$ دارای قسمت حقیقی بزرگتر از **یک** می‌باشد. بنابراین اندازه‌اش بطور اکید از یک بیشتر است. بنابراین، شعاع طیفی ماتریس $\boldsymbol{A^{-1}}$ کمتر از یک خواهد بود. این اثبات کرد که الگو جواب منحصربفردی دارد.
برای اثبات پایداری بدون قید و شرط روابط (۹) و (۱۰)، فرض کنیم:

$$(i = 1, 2, \dots, N-1),$$
$$(k = 1, 2, \dots, M-1),$$

$u_i^k, \tilde{u}_i^k$ جواب (۹) و (۱۰) با مقدار اولیه u_i^0 و $\tilde{u}_i^0$ باشد و s_i^k محاسبه دقیق و عینی باشد. پس خطا $\varepsilon_i^k = \tilde{u}_i^k - u_i^k$ در معادلات صدق خواهد کرد اگر $k = 0$ آنگاه

$$-\left(r_i + q_i g_2^{(\alpha)}\right)\varepsilon_{i+1}^1 + \left(1 + p_i - r_i g_1^{(\alpha)} - q_i g_1^{(\alpha)} + c_i\right)\varepsilon_i^1 - \left(p_i + q_i + r_i g_2^{(\alpha)}\right)\varepsilon_{i-1}^1 - r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j^{(\alpha)} \varepsilon_{i-j+1}^1 - q_i \sum_{j=3}^{N-i+1} g_j^{(\alpha)} \varepsilon_{i+j-1}^1 = \varepsilon_i^0,$$

و اگر $k > 0$ برای $i = 1, \dots, N-1,$ $k = 1, 2, \dots, M-1$ خواهیم داشت:

$$-\left(r_i + q_i g_2^{(\alpha)}\right)\varepsilon_{i+1}^{k+1} + \left(1 + p_i - r_i g_1^{(\alpha)} - q_i g_1^{(\alpha)} + c_i\right)\varepsilon_i^{k+1} - \left(p_i + q_i + r_i g_2^{(\alpha)}\right)\varepsilon_{i-1}^{k+1} - r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j^{(\alpha)} \varepsilon_{i-j+1}^{k+1} - q_i \sum_{j=3}^{N-i+1} g_j^{(\alpha)} \varepsilon_{i+j-1}^{k+1} = d_1 \varepsilon_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} d_{j+1} \varepsilon_i^{k-j} + \theta_k \varepsilon_i^0.$$

که به فرم ماتریسی داریم:

$$\boldsymbol{AE^1} = \boldsymbol{E^0}\,,$$
$$\boldsymbol{AE^{k+1}} = d_1 \boldsymbol{E^k} + d_2 \boldsymbol{E^{k-1}} + \cdots + d_k \boldsymbol{E^1} + \theta_k \boldsymbol{E^0}, k > 0.$$

که

$$\boldsymbol{E^k} = \left[\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k, \dots, \varepsilon_{N-1}^k\right]^{\boldsymbol{T}}.$$

و طبق لم زیر اثبات کامل می‌شود.

لم ۴-۲: نامساوی زیر برقرار است:

$$\| E^k \|_\infty \le \| E^0 \|_\infty\,, k = 1, 2, \dots\,.$$

می‌خواهیم بوسیله استدلال استقرایی لم بالا را اثبات کنیم. در حقیقت، اگر $k = 1$: $|\varepsilon_l^1| = \max_{1\le i\le N-1} |\varepsilon_i^1|$ در نظر می‌گیریم، توجه داریم که $p_i, q_i, r_i > 0$ و از لم ۴-۱ داریم:

$$\|E^1\|_\infty = |\varepsilon_l^1| \le |\varepsilon_l^1| + p_l\left(|\varepsilon_l^1| - |\varepsilon_{l-1}^1|\right) + r_l\left(\sum_{j=0}^{l+1} g_j^{(\alpha)}\right)|\varepsilon_l^1| - q_l\left(\sum_{j=0}^{N-l+1} g_j^{(\alpha)}\right)|\varepsilon_l^1|$$
$$\le -\left(r_l + q_l g_2^{(\alpha)}\right)|\varepsilon_{l+1}^1| + \left(1 + p_l - r_l g_1^{(\alpha)} - q_l g_1^{(\alpha)} + c_l\right)|\varepsilon_l^1| - \left(p_l + q_l + r_l g_2^{(\alpha)}\right)|\varepsilon_{l-1}^1| - r_l \sum_{j=3}^{l+1} g_j^{(\alpha)} |\varepsilon_{l-j+1}^1| - q_l \sum_{j=3}^{N-l+1} g_j^{(\alpha)} |\varepsilon_{l+j-1}^1|$$

$$\le \left|-\left(r_l + q_l g_2^{(\alpha)}\right)\varepsilon_{l+1}^1 + \left(1 + p_l - r_l g_1^{(\alpha)} - q_l g_1^{(\alpha)} + c_l\right)\varepsilon_l^1 - \left(p_l + q_l + r_l g_2^{(\alpha)}\right)\varepsilon_{l-1}^1 - r_l \sum_{j=3}^{l+1} g_j^{(\alpha)}\varepsilon_{l-j+1}^1 - q_l \sum_{j=3}^{N-l+1} g_j^{(\alpha)}\varepsilon_{l+j-1}^1\right|$$
$$= \left|\varepsilon_l^0\right| \le \|E^0\|_\infty ,$$

بنابراین $\| E^1 \|_\infty \le \| E^0 \|_\infty$.
حال فرض کنیم اگر $\| E^s \|_\infty \le \| E^0 \|_\infty$, برای $k \le s$ برقرار باشد پس ثابت می‌کنیم برای $k = s+1$ نیزبرقرار است برای این کار فرض می‌کنیم $\left|\varepsilon_l^{s+1}\right| = \max_{1\le i\le N-1}\left|\varepsilon_i^{s+1}\right|$ ، از لم ۴-۱ و مانند برآورد قبلی خواهیم داشت:

$$\|E^{s+1}\|_\infty = \left|\varepsilon_l^{s+1}\right|$$
$$\le -\left(r_l + q_l g_2^{(\alpha)}\right)\left|\varepsilon_{l+1}^{s+1}\right|$$
$$+\left(1 + p_l - r_l g_1^{(\alpha)} - q_l g_1^{(\alpha)} + c_l\right)\left|\varepsilon_l^{s+1}\right|$$
$$-\left(p_l + q_l + r_l g_2^{(\alpha)}\right)\left|\varepsilon_{l-1}^{s+1}\right|$$
$$-r_l \sum_{j=3}^{l+1} g_j^{(\alpha)}\left|\varepsilon_{l-j+1}^{s+1}\right|$$
$$-q_l \sum_{j=3}^{N-l+1} g_j^{(\alpha)}\left|\varepsilon_{l+j-1}^{s+1}\right|$$
$$\le \left|-\left(r_l + q_l g_2^{(\alpha)}\right)\varepsilon_{l+1}^{s+1} + \left(1 + p_l - r_l g_1^{(\alpha)} - q_l g_1^{(\alpha)} + c_l\right)\varepsilon_l^{s+1} - \left(p_l + q_l + r_l g_2^{(\alpha)}\right)\varepsilon_{l-1}^{s+1} - r_l \sum_{j=3}^{l+1} g_j^{(\alpha)}\varepsilon_{l-j+1}^{s+1} - q_l \sum_{j=3}^{N-l+1} g_j^{(\alpha)}\varepsilon_{l+j-1}^{s+1}\right|$$
$$\le \|AE^{s+1}\|_\infty \le d_1\left|\varepsilon_l^s\right| + \sum_{j=1}^{s-1} d_{j+1}\left|\varepsilon_l^{s-j}\right| + \theta_s\left|\varepsilon_l^0\right|$$
$$\le d_1\|E^s\|_\infty + \sum_{j=1}^{s-1} d_{j+1}\left\|E^{s-j}\right\|_\infty + \theta_s \,.\, \|E^0\|_\infty$$
$$\le \left(d_1 + \sum_{j=1}^{s-1} d_{j+1} + \theta_s\right).\, \|E^0\|_\infty = \|E^0\|_\infty \,.$$

پس $\| E^{s+1} \|_\infty \le \| E^0 \|_\infty$.

تذکر ۴-۱: بنابراین الگوی ضمنی تعریف شده بوسیله معادلات دیفرانسیل خطی (۹) و (۱۰)، بدون قید وشرط پایدار است و قضیه اثبات شد.

اگر بصورت $e_i^k = u(x_i, t_k) - u_i^k$ و $\boldsymbol{e^k} = \left[e_1^k, e_2^k, \dots, e_{N-1}^k\right]^{\boldsymbol{T}}$ نمادگذاری کنیم، آنگاه قضیه زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۴-۲: فرض کنیم که $u(x_i, t_k)$ جواب دقیق معادله (۱) در نقطه شبکه‌ای (x_i, t_k) و u_i^k جوابی متفاوت بدست آمده از (۹) و (۱۰) باشند، در اینصورت $\boldsymbol{M}$ مثبتی چنان موجود است که:

$$\left\|e^k\right\|_\infty \le \theta_{k-1}^{-1}\boldsymbol{M}\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\right), \quad k = 1,2,\dots,M, \qquad (۱۳)$$

که $\| e^k \|_\infty = \max_{1\le i\le N-1} | e_i^k |$ و $\boldsymbol{M}$ ثابتی است مستقل از h و Δt .

اثبات: از آنجایی که $u_i^k = u(x_i, t_k) - e_i^k$ و توجه داریم که $e^0 = 0$ ، حال از (۹) و (۱۰) داریم:
اگر $k = 0$:

$$-\left(r_i + q_i g_2^{(\alpha)}\right)e_{i+1}^1$$
$$+\left(1 + p_i - r_i g_1^{(\alpha)} - q_i g_1^{(\alpha)} + c_i\right)e_i^1$$
$$-\left(p_i + q_i + r_i g_2^{(\alpha)}\right)e_{i-1}^1$$
$$-r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j^{(\alpha)} e_{i-j+1}^1$$
$$-q_i \sum_{j=3}^{N-i+1} g_j^{(\alpha)} e_{i+j-1}^1 = R_i^1,$$

اگر $k > 0$:

$$-\left(r_i + q_i g_2^{(\alpha)}\right)e_{i+1}^{k+1}$$
$$+\left(1 + p_i - r_i g_1^{(\alpha)} - q_i g_1^{(\alpha)} + c_i\right)e_i^{k+1}$$
$$-\left(p_i + q_i + r_i g_2^{(\alpha)}\right)e_{i-1}^{k+1}$$
$$-r_i \sum_{j=3}^{i+1} g_j^{(\alpha)} e_{i-j+1}^{k+1}$$
$$-q_i \sum_{j=3}^{N-i+1} g_j^{(\alpha)} e_{i+j-1}^{k+1}$$
$$= d_1 e_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} d_{j+1} e_i^{k-j} + R_i^{k+1},$$

که

$$\left| R_i^{k+1} \right| \le \boldsymbol{M}\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\right), \quad i = 1,2,\dots,N-1, \quad k = 1,2,\dots,M-1,$$

و $\boldsymbol{M}$ ثابتی است مستقل از h و Δt. در اینجا هم از استدلال استقرایی برای اثبات قضیه بهره می‌گیریم، اگر $k=1$، فرض می‌کنیم $|e_l^1| = \max_{1\le i\le N-1} |e_i^1|$، پس داریم:

$$\begin{aligned}
&\|e^1\|_\infty = |e_l^1| \\
&\le |e_l^1| + p_l\left(|e_l^1| - |e_{l-1}^1|\right) \\
&+r_l\left(\textstyle\sum_{j=0}^{l+1} g_j^{(\alpha)}\right)|e_l^1| \\
&-q_l\left(\textstyle\sum_{j=0}^{N-l+1} g_j^{(\alpha)}\right)|e_l^1| \\
&\le -\left(r_l + q_l g_2^{(\alpha)}\right)|e_{l+1}^1| \\
&+\left(1 + p_l - r_l g_1^{(\alpha)} - q_l g_1^{(\alpha)} + c_l\right)|e_l^1| \\
&-\left(p_l + q_l + r_l g_2^{(\alpha)}\right)|e_{l-1}^1| \\
&-r_l \textstyle\sum_{j=3}^{l+1} g_j^{(\alpha)}|e_{l-j+1}^1| \\
&-q_l \textstyle\sum_{j=3}^{N-l+1} g_j^{(\alpha)}|e_{l+j-1}^1| \\
&\le \Big|-\left(r_l + q_l g_2^{(\alpha)}\right)e_{l+1}^1 + \Big(1 + p_l - \\
&r_l g_1^{(\alpha)} - q_l g_1^{(\alpha)} + c_l\Big)e_l^1 - \Big(p_l + q_l + \\
&r_l g_2^{(\alpha)}\Big)e_{l-1}^1 - r_l \textstyle\sum_{j=3}^{l+1} g_j^{(\alpha)} e_{l-j+1}^1 - \\
&q_l \textstyle\sum_{j=3}^{N-l+1} g_j^{(\alpha)} e_{l+j-1}^1\Big| \\
&= |R_l^1| \le \boldsymbol{M}\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\right) \\
&= \theta_{k-1}^{-1}\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\right).
\end{aligned}$$

حال فرض کنیم اگر

$$\| e^s \|_\infty \le \theta_{k-1}^{-1}\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\, h\right), k \le s$$

برقرار باشد پس ثابت می‌کنیم برای $k = s+1$ نیز برقرار است برای این کار فرض می‌کنیم $|e_l^{s+1}| = \max_{1\le i\le N-1}|e_i^{s+1}|$ و توجه داریم که $\theta_j^{-1} \le \theta_k^{-1}, j = 0,1,2,\dots,k$ و از لم ۴- ۱ و مانند برآورد قبلی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\|e^{s+1}\|_\infty = |e_l^{s+1}| \\
&\le d_1\|e^s\|_\infty + \textstyle\sum_{j=1}^{s-1} d_{j+1}\|e^{s-j}\|_\infty \\
&+\boldsymbol{M}\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\right) \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{s-1} d_{j+1}\|e^{s-j}\|_\infty \\
&+\boldsymbol{M}\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\right) \\
&\le \left(d_1\theta_{s-1}^{-1} + d_2\theta_{s-2}^{-1} + \dots + d_s\theta_0^{-1} + \right. \\
&\left. 1\right)\boldsymbol{M}\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\right) \\
&\le \theta_s^{-1}\left(\textstyle\sum_{j=0}^{s-1} d_j + \theta_s\right)\boldsymbol{M}\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\right) \\
&= \theta_s^{-1}\boldsymbol{M}\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\right).
\end{aligned}$$

پس قضیه اثبات گردید. چون

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\theta_k^{-1}}{k^\beta} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^{-\beta}}{(k+1)^{1-\beta} - k^{1-\beta}}$$
$$= \lim_{k\to\infty}\frac{k^{-1}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1-\beta} - 1} = \frac{1}{1-\beta},$$

از اینرو ثابت $C > 0$ وجود دارد بطوریکه:

$$\begin{aligned}
&\left\|e^k\right\|_\infty \le k^\beta . C\left(\Delta t^{1+\beta} + \Delta t^\beta h\right) \\
&= (k\Delta t)^\beta . C(\Delta t + h), k = 1,2,\dots,M.
\end{aligned}$$

زمانیکه $k\Delta t \le T$، ما استنباط زیر را خواهیم داشت:

استنباط ۴-۱: فرض کنیم که $u(x_i,t_k)$ جواب دقیق معادله (۱) در نقطه شبکه‌ای (x_i,t_k) و u_i^k جوابی متفاوت ضمنی بدست آمده از (۹) و (۱۰) باشند، در اینصورت $\boldsymbol{C}$ مثبتی چنان موجود است که:

$$\begin{aligned}
&\left|u(x_i,t_k) - u_i^k\right| \le C(\Delta t + h), \\
&i = 1,2,\dots,N, k = 1,2,\dots,M.
\end{aligned}$$

۵- مثال‌های عددی

در این بخش برای بدست آوردن عملکرد روش جدید ضمنی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری زمان- مکان دوطرفه و همچنین بررسی رفتار همگرایی آن، مثالهای عددی اجرا می‌کنیم. دومثال مورد بررسی قرار گرفته است.

مثال ۵-۱: معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} + \mathrm{V(x)}\,\frac{\partial\, u(x,t)}{\partial x} \\
&-D_+(x)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} \\
&-D_-(x)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} \\
&+C(x,t)\,u(x,t) = s(x,t)
\end{aligned}$$

با ضرایب:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{V(x)} = x^2, D_+(x) = \Gamma(3-\alpha)x^\alpha, \\
&D_-(x) = \Gamma(3-\alpha)(2-x)^\alpha, \\
&\alpha = 1.8,\ \beta = 0.8, \\
&0 \le x \le 2,\ 0 < t < 1.
\end{aligned}$$

و تابع اجبار بصورت زیر خواهد بود:

$$s(x,t) = 2\left(\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\beta)}\right)x^2\ (2\ -\ x)^2$$
$$-8(1+t^2)[x^2 + (2\ -\ x)^2$$
$$-2.5(x^3 + (2\ -\ x)^3)$$
$$+\frac{25}{22}(x^4 + (2\ -\ x)^4)$$
$$-\frac{1}{8}[V(x)(4x^3 - 12x^2 + 8x)]$$
$$+\frac{1}{8}[x^2\ (2\ -\ x)^2]],$$

با شرایط اولیه $u(x,0) =\ \ x^2\ (2-x)^2$ و شرایط مرزی دیریکله $u(0,t) = u(2,t) = 0, t \geq 0$ و جواب دقیق این معادله بصورت $u(x;\ t) = (1+t^2)\ x^2\ (2\ -\ x)^2$ می‌باشد.

مثال ۵-۲: معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^\beta\ u(x,t)}{\partial t^\beta} + \mathrm{V(x)}\ \frac{\partial\ u(x,t)}{\partial x}$$
$$-D_+(x)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} - D_-(x)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}$$
$$+C(x,t)\ u(x,t) = s(x,t)$$

با ضرایب:

$$\mathrm{V(x)} = x^2, D_+(x) = \Gamma(3-\alpha)x^\alpha,$$
$$D_-(x) = \Gamma(3-\alpha)(2-x)^\alpha,$$
$$\alpha = 1.8,\ \beta = 0.4,$$
$$0 \leq x \leq 2,\ \ 0 < t < 1.$$

و تابع اجبار بصورت زیر خواهد بود:

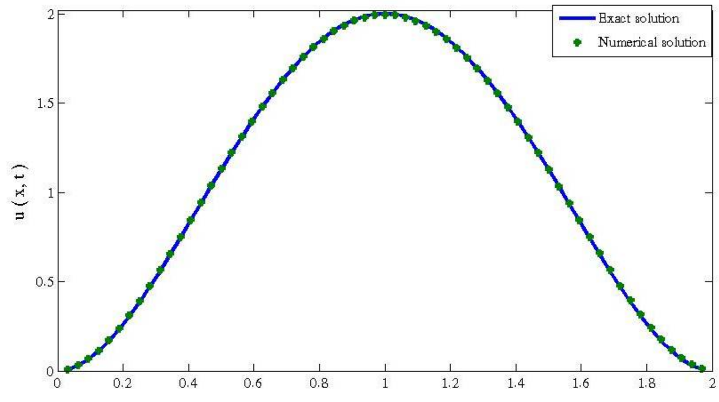
$$s(x,t) = 2\left(\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\beta)}\right)x^2\ (2\ -\ x)^2$$
$$-8(1+t^2)[x^2 + (2\ -\ x)^2$$
$$-2.5(x^3 + (2\ -\ x)^3)$$
$$+\frac{25}{22}(x^4 + (2\ -\ x)^4)$$
$$-\frac{1}{8}[V(x)(4x^3 - 12x^2 + 8x)]$$
$$+\frac{1}{8}[x^2\ (2\ -\ x)^2]],$$

با شرایط اولیه $u(x,0) =\ \ x^2\ (2-x)^2$ و شرایط مرزی دیریکله $u(0,t) = u(2,t) = 0, t \geq 0$. و جواب دقیق این معادله بصورت $u(x;\ t) = (1+t^2)\ x^2\ (2\ -\ x)^2$ می‌باشد.

جدول۱: رفتار خطای ماکزیمم برای مسأله مثال ۴-۱ در برابر کاهش اندازه گام در زمان $t = 1$.

M	N	Maximum Error	Error rate
4	4	0.296467	–
8	8	0.091806	3.22
16	16	0.037761	2.43
32	32	0.020075	1.88
64	64	0.010588	1.89
128	128	0.005406	1.96
256	256	0.002726	1.98
512	512	0.001366	2.00

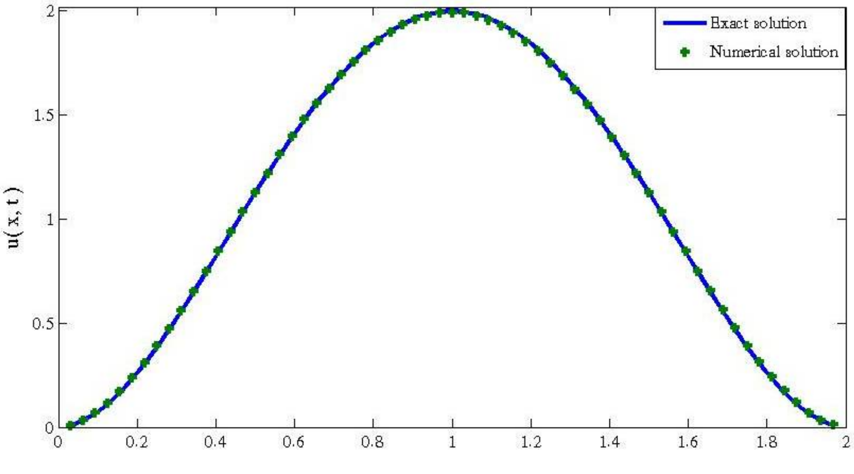
شکل۱: جواب دقیق و جواب عددی در زمان $t = 1$. خط یک پارچه بیانگر جواب دقیق و ستاره ها بیانگر جواب عددی حاصل از روش ضمنی جدید برای مثال ۵-۱ با $h = \frac{1}{32}, \Delta t = \frac{1}{64}$ می‌باشد.



جدول۲: رفتار خطای ماکزیمم برای مسأله مثال ۵-۲ در برابر کاهش اندازه گام در زمان $t = 1$.

M	N	Maximum Error	Error rate
4	4	0.282389	–
8	8	0.085577	3.30
16	16	0.035658	2.40
32	32	0.019310	1.85
64	64	0.010190	1.89
128	128	0.005247	1.94
256	256	0.002658	1.97
512	512	0.001337	1.99

شکل۲: جواب دقیق و جواب عددی در زمان $t = 1$. خط یک پارچه بیانگر جواب دقیق و ستاره‌ها بیانگر جواب عددی حاصل از روش ضمنی جدید برای مثال ۵-۲ با $h = \frac{1}{32}, \Delta t = \frac{1}{64}$ می‌باشد.



۶- نتیجه‌گیری

ما در این پژوهش، روش تفاضلات متناهی ضمنی را گسترش داده و برای حل معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری زمان– مکان دو طرفه مورد استفاده قرار دادیم. نرخ همگرایی را بدست آوردیم. اگرچه، به علت تمرکز روی جنبه‌های تئوری، در این مقاله نتوانستیم معادلات کوپل (جفت) را مورد بررسی قرار دهیم، تصمیم داریم که در پژوهش‌های بعدی این موضوع و بعضی تقریبات دیگر را آدرس دهیم.

فهرست منابع

[1] Goreno R., Mainardi F., Scalas E., Raberto M., Fractional calculus and continuous-time finance. III, The diffusion limit. Mathematical finance (Konstanz, 2000), Trends in Math., Birkhuser, Basel, 2001, pp. 171-180.

[2] Lubich C., Discretized fractional calculus, SIAM J. Math. Anal. 17 (1986) 704719. 13.

[3] Meerschaert M.M. , Tadjeran C ., Finite difference approximations for fractional advection - diffusion flow equations, J.comput. Appl. Numer. Math. 172 (2004) 6577.

[4] Podlubny I., Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.

[5] Samko S., Kilbas A., Marichev O., Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, London, 1993.

[6] Oldham K.B., Spanier J., The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.

[7] Tadjeran C., Meerschaert M.M., H.P. Scheffer, A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation, J. Comput. Phys. 213 (2006) 205-213.

[8] Miller K., Ross B., An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential, Wiley, New York, 1993.

[9] zhang Y., A Finite difference method for fractional partial differential equation, Appl. Math. comput. 215 (20009) 524-529.

[10] Shivanian. E, Khodabandehlo. H.R., A second-order accurate numerical approximation for fractional advection-dispersion flow equations, J. Sci. I. A. U (JSIAU), Vol. 23, No. 90.2, Winter 2014.

[11] Hilfer. R., Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore,2000.

[12] Magin. R.L., Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Publishers, 2006.