دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

# یک روش نیمه تحلیلی بهبود یافته‌ی جدید و سریع برای حل رده‌ای از معادلات انتگرال فوق منفرد نوع دوم

**رضا نوین[1]، محمدعلی فریبرزی عراقی[1*] ، یعقوب محمودی[2]**

[1] گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
[2] گروه ریاضی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۵/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۵/۲۸

**چکیده**

در این مقاله، معادله‌ی انتگرال فوق منفرد نوع دوم پراندتل در نظر گرفته می شود و یک روش بهبود یافته‌ی جدید و سریع بر اساس روش اختلال هموتوپی برای حل این رده از معادلات انتگرال معرفی می گردد. جهت نیل به این هدف، با ارائه‌ی مثال‌هایی نشـــان خواهیم داد که روش اختلال هموتوپی اسـتاندارد در حالت کلی برای حل این رده از معادلات همگرا نبوده و روش اختلال هموتوپی اصـلاح شـده نیز صـرفاً زمانی همگرا است که جواب دقیق معادله از قبل مشخص باشد. در حالی که روش پیشنهادی در این تحقیق، بدون نیاز به داشتن جواب دقیق مساله، این جواب را صرفاً در دومین تکرار از روش به دست می آورد و پیچیدگی سایر روش‌ها را ندارد.

**کلمات کلیدی:** روش اختلال هموتوپی استاندارد، روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی استاندارد، روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی جدید و سریع، معادلات انتگرال فوق منفرد نوع دوم، معادله‌ی انتگرال پراندتل

## 1. مقدمه

* نویسنده مسئول
Emails: fariborzi.araghi@gmail.com;
m_fariborzi@iauctb.ac.ir

معادلات انتگرال فوق منفرد اغلب و به طور طبیعی به صورت مستقیم از مسائل مقدار مرزی، به ویژه، در نواحی ناهموار مانند برش‌ها، تَرک‌ها، تراشه‌ها، شکاف‌ها، نوارهای باریک و سطحی شامل لبه‌های تیز بوده و به طور غیر مترقبه ایجاد می‌شوند. برجسته‌ترین حوزه‌هایی که با این معادلات مواجه می‌شویم، عبارت‌اند از آئرودینامیک و سطوح قابل ارتجاع، [۵، ۴، ۳، ۲، ۱].

تعمیم یافته‌ی حالت بیضوی معادله‌ی پراندتل، یک معادله‌ی انتگرال فوق منفرد نوع دوم در قالب معادله‌ی انتگرال فردهلم می‌باشد که فرم کلی آن عبارت است از [۷، ۶] :

$$u(y) = \sqrt{1-y^2}\,f(y) + \frac{\alpha}{\pi}\sqrt{1-y^2}\int_{-1}^{+1}\frac{u(x)}{(x-y)^2}\,dx, \quad (-1<y<1), \qquad (1)$$

که در آن $\alpha > 0$ مقداری معلوم و $f(y)$ تابع چندجمله‌ای معلوم و $u(x)$ تابع مجهول است و همواره داریم $u(\pm 1) = 0$. در رابطه‌ی (۱) عبارت زیر، قسمت متناهی هادامارد نیز نامیده می‌شود، [۸] :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{u(x)}{(x-y)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-1}^{y-\varepsilon}\frac{u(x)}{(x-y)^2}\,dx + \int_{y+\varepsilon}^{+1}\frac{u(x)}{(x-y)^2}\,dx - \frac{u(x+\varepsilon)+u(x-\varepsilon)}{\varepsilon}\right], \quad (-1<y<1), \qquad (2)$$

پژوهشگران زیادی برای حل تقریبی رابطه‌ی (۱) روش‌های مختلفی را ارائه داده‌اند. به عنوان نمونه اوکیمیدیس در بین سال‌های ۱۹۸۱ تا ۱۹۸٤ میلادی روش‌های متفاوتی برای حل این نوع معادلات معرفی نموده‌اند، [۹-۱۲]. مونگاتو در سال ۱۹۸٦ میلادی، از روش‌های انتگرال‌گیری عددی برای حل معادله‌ی پرلندتل بهره برده است، [۵]. دارگوس در سال ۱۹۹٤ میلادی، روش هم‌محلی را برای حل معادله‌ی پراندتل ارائه داد، [۱۳]. در همان سال، دارگوس روش دیگری بر اساس فرمول‌های گاوس را برای حل این نوع معادلات ارائه داد، [۱۴]. چاکرابارتی در بین سال‌های ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۷ میلادی نیز روش‌هایی برای حل معادلات انتگرال فوق منفرد نوع دوم معرفی کرده است، [۱۵-۱۸]. مندال نیز در سال ۲۰۰۷ میلادی از چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای حل این نوع معادلات بهره برده است، [۱۹]. محمودی نیز در سال ۲۰۱٤ میلادی، روشی را بر اساس روش تجزیه‌ی آدومیان اصلاح شده برای این نوع معادلات ارائه داده است، [۶].

در بخش دوم مقاله، روش‌های اختلال هموتوپی استاندارد و اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی استاندارد معرفی شده و در بخش سوم، روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی جدید و سریع پیشنهادی، جهت حل معادلات انتگرال فوق منفرد نوع دوم به نام پرانــدتل ارائه خواهد شد. در بخش چهارم نیز با ارائه‌ی سه مثال، سادگی و مزیت روش پیشنهادی و مطرح شده در بخش سوم را نسبت به روش‌های معرفی شده در بخش دوم، بررسی خواهیم نمود و در پایان نیز در بخش پنجم، نتیجه‌گیری از مقاله را ارائه خواهیم کرد.

## 2. روش اختلال هموتوپی

این روش اولین بار توسط جی هوان خی در سال ۱۹۹۸ میلادی ارائه شده است، [۲۰-۲۲]. این روش روند مؤثری را برای یافتن جواب‌های عددی و صریح رده‌ی وسیعی از معادلات دیفرانسیل و انتگرال موجود در مسائل فیزیکی واقعی فراهم می‌کند.

در سال‌های اخیر، استفاده از روش اختلال هموتوپی در مسائل ریاضی، توجه دانشمندان را به خود جلب کرده است. این روش به طور پیوسته یک معادله‌ی ساده را به شکل قابل حل، داخل مساله مشکل، تحت مطالعه در می‌آورد و در سال‌های اخیر برای حل طیف وسیعی از مسائل خطی و غیرخطی به کار برده شده است. روش اختلال هموتوپی، تکنیک هموتوپی از توپولوژی و تکنیک اختلال را با یکدیگر ترکیب می‌کند. بنابراین یک تابع هموتوپی با پارامتر تعبیه $p \in [0,1]$ یافته می‌شود و این پارامتر طوری در نظر گرفته می‌شود که یک مقدار کوچک باشد. روش اختلال هموتوپی به طور کامل در [۲۳] پیاده‌سازی شده است و نتیجه‌ی به دست آمده این است که تلفیق روش اختلال و روش هموتوپی، محدودیت‌های روش اختلال سنتی را حذف کرده است.

در این قسمت به بیان شکل کلی روش اختلال هموتوپی می‌پردازیم. بدین منظور معادله‌ی زیر:

$$A(y) - f(x) = 0, \qquad (x \in \Omega), \qquad (3)$$

با شرط مرزی

$$B\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0, \qquad (x \in \Gamma), \qquad (4)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن A عملگر دیفرانسیل، f تابع تحلیلی معلوم، $\Gamma$ عملگر مرزی و $\Omega$ مرز دامنه نامیده می‌شود. عملگر A را می‌توان به دو قسمت L و N تقسیم کرد که L بیانگر قسمت خطی و N بیانگر قسمت غیرخطی است. لذا می‌توان رابطه‌ی (۳) را به شکل زیر نوشت:

$$L(y) + N(y) - f(x) = 0. \qquad (۵)$$

اینک هموتوپی $H(y,p): \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ را که در آن:

$$H(y,p) = (1-p)[L(y) - L(u_0)] + p[A(y) - f(x)] = 0, \quad (x \in \Omega), \qquad (۶)$$

یا

$$H(y,p) = L(y) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(y) - f(x)] = 0, \qquad (۷)$$

در رابطه‌ی (۳) صدق می‌کند، در نظر می‌گیریم. به طوری که $p \in [0,1]$ یک پارامتر تعبیه است و $u_0$ نیز تقریب اولیه‌ای از رابطه‌ی (۳) است. با توجه به رابطه‌ی (۷):

$$H(y,0) = L(y) - L(u_0) = 0 \quad \text{و} \quad H(y,1) = A(y) - f(x) = 0 \qquad (۸)$$

و با تغییر $p$ از ۰ تا ۱، $H(y,p)$ از $L(y) - L(u_0)$ تا $A(y) - f(x)$ تغییر می‌کند. این را در توپولوژی، تغییر شکل نامیده‌اند و $L(y) - L(u_0)$ و $A(y) - f(x)$ را هموتوپیک می‌گویند. با بکارگیری شیوه‌ی آشفتگی با توجه به اینکه $0 \le p \le 1$ می‌تواند به عنوان یک پارامتر کوچک در نظر گرفته شود. می‌توان فرض کرد که جواب (۶) یا (۷) به صورت سری زیر:

$$y(x,p) = u_0(x) + pu_1(x) + p^2u_2(x) + \cdots \qquad (۹)$$

قابل بیان باشد و در نتیجه به ازای $p = 1$:

$$y \approx \sum_{i=0}^{m} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_m. \qquad (۱۰)$$

سری (۱۰) همگرا به جواب دقیق می‌باشد، اگر تنها یک جواب وجود داشته باشد. همگرایی روش اختلال هموتوپی در حالت کلی و همچنین برای معادلات انتگرال در مراجع [۲۴] و [۲۵] بررسی شده است.

جهت پیاده‌سازی روش اختلال هموتوپی استاندارد در معادله‌ی (۱) فرض کنیم:

$$u(y) = \sqrt{1 - y^2}\,\psi(y), \qquad (۱۱)$$

که در آن $\psi(y)$ تابعی خوش‌رفتار است. با جایگذاری رابطه‌ی (۱۱) در (۱) خواهیم داشت:

$$\psi(y) = f(y) + \frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\psi(x)dx, \qquad (۱۲)$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$\psi(y) = f(y) + \frac{\alpha}{\pi}\frac{d}{dy}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-y}\psi(x)dx. \qquad (۱۳)$$

فرض کنیم:

$$B_j = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-y} x^j dx, \qquad (۱۴)$$

$$(j = 0,1,2,\dots),$$

در این صورت:

$$B_0 = -\pi y, \qquad (۱۵)$$

و در حالت کلی، [۲۶، ۶]:

$$B_j = -\pi y^{j+1} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1 + (-1)^i}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+4}{2}\right)} y^{j-1-i}, \quad (j = 1,2,\dots). \qquad (۱۶)$$

که با توجه به عبارات بالا، تعدادی از $B_j$ها به قرار زیر است:

$$\begin{aligned}
B_0 &= -\pi y,\\
B_1 &= -\pi y^2 + \frac{1}{2}\pi,\\
B_2 &= -\pi y^3 + \frac{1}{2}\pi y,\\
B_3 &= -\pi y^4 + \frac{1}{2}\pi y^2 + \frac{1}{8}\pi,\\
B_4 &= -\pi y^5 + \frac{1}{2}\pi y^3 + \frac{1}{8}\pi y,\\
B_5 &= -\pi y^6 + \frac{1}{2}\pi y^4 + \frac{1}{8}\pi y^2 + \frac{1}{16}\pi,\\
B_6 &= -\pi y^7 + \frac{1}{2}\pi y^5 + \frac{1}{8}\pi y^3 + \frac{1}{16}\pi y,\\
&\vdots
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با توجه به ساختار روش اختلال هموتوپی فرض کنیم:

$$\psi(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(y). \qquad (۱۸)$$

برای اعمال روش اختلال هموتوپی روی رابطه‌ی (۱۳) گیریم:

$$L\psi = \psi, \qquad D\psi = \frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\psi(x)dx. \qquad (۱۹)$$

بنابراین فرم اپراتوری رابطه‌ی (۱۳) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$L\psi - D\psi - f = 0. \qquad (۲۰)$$

با اعمال رابطه‌ی (۶) روی رابطه‌ی (۲۰) خواهیم داشت:

$$H(\psi,p) = (1-p)[L\psi - Lu_0] + p[L\psi - D\psi - f(y)] = 0. \qquad (۲۱)$$

با فرض اینکه:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 p + \psi_2 p^2 + \cdots \qquad (۲۲)$$

رابطه‌ی (۲۱) به فرم زیر قابل بازنویسی است:

$$(1-p)\big[L(\psi_0 + \psi_1 p + \psi_2 p^2 + \cdots) - Lu_0\big] + p\big[L(\psi_0 + \psi_1 p + \psi_2 p^2 + \cdots) \qquad (۲۳)$$

$$-D(\psi_0 + \psi_1 p + \psi_2 p^2 + \cdots) - f(y)] = 0.$$

با مســاوی قرار دادن ضــرایب هم‌توان p از طرفین رابطه‌ی (۲۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p^0&: \quad L\psi_0 - Lu_0 = 0, \\ p^1&: \quad L\psi_1 + Lu_0 - D\psi_0 - f(y) = 0, \\ p^2&: \quad L\psi_2 - D\psi_1 = 0, \\ p^3&: \quad L\psi_3 - D\psi_2 = 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{24}$$

که به فرم زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= u_0, \\ \psi_1 &= -u_0 + D\psi_0 + f(y), \\ \psi_2 &= D\psi_1, \\ \psi_3 &= D\psi_2, \\ &\vdots \\ \psi_m &= D\psi_{m-1}, \\ (m &\geq 2). \end{aligned} \tag{25}$$

از آنجایی که در رابطه‌ی (۱۹) عملگر L، یک عملگر همانی اســت، بنابراین $u_0 = 0$ است. برای اعمال روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی استاندارد بایستی f به صورت $f(y) = f_1(y) + f_2(y)$ قابل نوشــتن باشــد. در این صــورت، با توجه به رابطه‌ی (۲۱) خواهیم داشت:

$$H(\psi, p) = (1-p)[L\psi - Lu_0] + p[L\psi - D\psi - f_2(y)] = +f_1(y). \tag{26}$$

با قرار دادن ضرایب هم‌توان p از طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p^0&: \quad L\psi_0 - Lu_0 = +f_1(y), \\ p^1&: \quad L\psi_1 + Lu_0 - D\psi_0 - f_2(y) = 0, \\ p^2&: \quad L\psi_2 - D\psi_1 = 0, \\ p^3&: \quad L\psi_3 - D\psi_2 = 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{27}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= u_0 + f_1(y), \\ \psi_1 &= -u_0 + D\psi_0 + f_2(y), \\ \psi_2 &= D\psi_1, \\ \psi_3 &= D\psi_2, \\ &\vdots \\ \psi_m &= D\psi_{m-1}, \\ (m &\geq 2). \end{aligned} \tag{28}$$

دقت بـه ایـن نکتـه ضـروری اسـت کـه انتخـاب درسـت $f_1$ و $f_2$ در سـرعت همگرایـی روش اخـتلال هموتـوپی تـأثیر بـه سـزایی دارد و در انتخــاب $f_1$ و $f_2$ بایســتی دقـت نمــود. تــاکنون قــانون خاصــی بــرای انتخــاب $f_1$ و $f_2$ بــرای تســریع در همگرایـــی در روش اخـتلال هموتـوپی اصلاح‌شـده‌ی اسـتاندارد معرفـی نشـده است.

در ادامـه به معرفـی اصـلاحی جدیـد و سـریع بـر روش اخـتلال هموتوپی که باعـث سـرعت بخشـیدن بـه ایـن روش شـده و بـه جواب دقیق مسـاله‌ی (۱) در دومـین تکـرار خـواهیم رسـید مـی پردازیم.

## 3. روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی جدید و سریع

فرض کنیم تابع f مذکور در معادله‌ی (۱) در حالت کلی به صــورت $f = f_1 + f_2$ باشد، که در آن $f_1$ شامل یک جمله‌ی تابع f و یا گاهی اوقات شـــامل دو جمله‌ی آن بوده و تابع $f_2$ شـــامل باقی‌مانده‌ی f باشد.

در این روش پیشـــنهادی ابتدا عبارت ψ(y) را به تابع زیر انتگرال سمت راست رابطه‌ی (۱۲) اضافه و کم می‌کنیم. در این صورت:

$$\psi(y) = f(y) + \frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi(x) - \psi(y) + \psi(y)\big)dx. \tag{29}$$

در رابطه‌ی (۲۹) اگر عبـارت $\frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\psi(x)dx$ را از ســـمت راست تساوی فوق به سمت چپ آن انتقال دهیم، خواهیم داشت:

$$\psi(y) - \frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\psi(y)dx = f(y) + \frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi(x) - \psi(y)\big)dx, \tag{30}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\psi(y)dx &= -\frac{\alpha}{\pi}\psi(y)\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}dx \\ &= (-\frac{\alpha}{\pi})\psi(y)\underbrace{\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}dx}_{-\pi} \\ &= \alpha\psi(y). \end{aligned}$$

بنابراین رابطه‌ی (۲۹) به قرار زیر قابل بازنویسی است:

$$\psi(y)(1+\alpha) = f(y) + \frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi(x) - \psi(y)\big)dx.$$

لذا:

$$\psi(y) = \frac{f(y)}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{(1+\alpha)\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi(x) - \psi(y)\big)dx. \tag{31}$$

فرض کنیم در رابطه‌ی (۱) تابع f یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n به صورت زیر باشد:

$$f(y) = p_n(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i \qquad (۳۲)$$

در این صورت از رابطه‌ی (۳۱) خواهیم داشت:

$$\psi(y) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i y^i}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{(1+\alpha)\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi(x)-\psi(y)\big)dx. \qquad (۳۳)$$

اگر چندجمله‌ای $q_n(y)$ را به سمت راست رابطه‌ی (۳۳) اضافه و کم کنیم، خواهیم داشت:

$$\psi(y) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i y^i}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{(1+\alpha)\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi(x) - \psi(y)\big)dx + q_n(y) - q_n(y). \qquad (۳۴)$$

که در رابطه‌ی فوق، $q_n(y)$ یک چندجمله‌ای اســتاندارد از درجه‌ی چندجمله‌ای $f(y)$ به صورت زیر است:

$$q_n(y) = \sum_{i=0}^{n} b_i y^i. \qquad (۳۵)$$

طبق روش اختلال هموتوپی با جایگذاری رابطه‌ی (۲۱) در (۳۴) خواهیم داشت:

$$H(\psi,p) = (1-p)[L\psi - Lu_0] + p[L\psi - D\psi - p_n(y) + q_n(y)] = q_n(y). \qquad (۳۶)$$

با مساوی قرار دادن ضریب توان‌های p در دو طرف تساوی رابطه‌ی (۳۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p^0:&\quad L\psi_0 - Lu_0 = q_n(y),\\ p^1:&\quad L\psi_1 + Lu_0 - D\psi_0 - p_n(y) + q_n(y) = 0,\\ p^2:&\quad L\psi_2 - D\psi_1 = 0,\\ p^3:&\quad L\psi_3 - D\psi_2 = 0,\\ &\quad \vdots \end{aligned} \qquad (۳۷)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= u_0 + q_n(y),\\ \psi_1 &= -u_0 + D\psi_0 + p_n(y) - q_n(y),\\ \psi_2 &= D\psi_1,\\ \psi_3 &= D\psi_2,\\ &\vdots\\ \psi_m &= D\psi_{m-1}, \qquad (m \geq 2). \end{aligned} \qquad (۳۸)$$

با توجه به روش اختلال هموتوپی اصلاح‌شده، انتخاب درست توابع $f_1$ و $f_2$ بسیار در سرعت همگـرایی این روش تأثیر دارد.

لذا در این روش پیشنهادی توابع $f_1$ و $f_2$ را طوری تعیین می‌کنیم که $\psi_1 = \psi_2 = \cdots = 0$ شده و $\psi_0(y) = q_n(y)$ جواب دقیق مساله باشد. برای پیاده‌سازی این روش داریم:

$$\begin{aligned} \psi_0(y) &= q_n(y),\\ \psi_1(y) &= +p_n(y) - q_n(y) + \frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi_0(x)-\psi_0(y)\big)dx,\\ &\vdots\\ \psi_m(y) &= \frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi_{m-1}(x) - \psi_{m-1}(y)\big)dx, \qquad (m \geq 2). \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

با قرار دادن $\psi_1(y) = 0$ ضـرایب مجهول $q_n(y)$ به دسـت می‌آیند و $\psi_0(y) = q_n(y)$ جواب دقیق مساله خواهد بود.

در ادامه، با ارائه‌ی مثال‌هایی نشـــان می‌دهیم که روش اختلال هموتوپی اســـتاندارد در حلت کلی برای این گونه معادلات همگرا نبوده ولی روش پیشــنهادی در این مقاله، در دومین تکرار به جواب دقیق مساله خواهد رسید.

## 4. مثال‌های عددی

در این بخش، سه مثال جهت پیاده‌سازی روش پیشنهادی و نشان دادن سادگی این روش، مورد بررسی واقع می‌شود.

**مثال 1.** معـادلـه‌ی فوق منفرد نوع دوم زیر را در نظر می‌گیریم، [۶، ۲۷، ۲۸]:

$$u(y) = 2\pi\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}\int_{-1}^{+1}\frac{u(x)}{(x-y)^2}dx, \qquad (-1 < y < 1), \qquad (۴۰)$$

که در آن $u(\pm 1) = 0$ بوده و $u(y) = \frac{4\pi}{\pi+2}\sqrt{1-y^2}$ جواب دقیق مسـاله می‌باشـد. با جایگذاری $u(y) = \psi(y)\sqrt{1-y^2}$ در رابطه‌ی (۴۰) داریم:

$$\psi(y) = 2\pi + \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-y}dx. \qquad (۴۱)$$

با اعمال روش اختلال هموتوپی اسـتاندارد بر اسـاس روابط (۱۸) و (۲۵) برای رابطه‌ی (۴۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 2\pi,\\ \psi_1 &= -\pi^2,\\ \psi_2 &= \frac{\pi^3}{2},\\ \psi_3 &= -\frac{\pi^4}{4},\\ \psi_4 &= \frac{\pi^5}{2},\\ &\vdots \end{aligned} \qquad (۴۲)$$

$$\psi_n(y) = \frac{(-۱)^n \pi^{n+۱}}{۲^{n-۱}}, \quad (n \geq ۰).$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۱۸) خواهیم داشت:

$$\psi(y) = \sum_{n=۰}^{\infty} \psi_n(y), \qquad (۴۳)$$

که یک سری واگراست. حال با فرض داشتن جواب دقیق مساله، اگر از روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی استاندارد استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_۱(y) &= \text{جواب دقیق} = \frac{۴\pi}{\pi+۲}, \\ f_۲(y) &= f(y) - \text{جواب دقیق} \\ &= ۲\pi - \frac{۴\pi}{\pi+۲} \\ &= \frac{۲\pi^۲}{\pi+۲}. \end{aligned} \qquad (۴۴)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi_۰(y) &= \frac{۴\pi}{\pi+۲}, \\ \psi_۱(y) &= \frac{۲\pi^۲}{\pi+۲} + \frac{۱}{۲}\frac{d}{dy}\int_{-۱}^{+۱} \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x-y}\psi_۰(x)dx \\ &= \frac{۲\pi^۲}{\pi+۲} - \frac{۲\pi^۲}{\pi+۲} = ۰. \end{aligned} \qquad (۴۵)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۱۱):

$$\psi(y) = \frac{۴\pi}{\pi+۲} \qquad (۴۶)$$

و $u(y) = \frac{۴\pi}{\pi+۲}\sqrt{۱-y^۲}$ جواب دقیق مساله است. از آنجایی که داشتن جواب دقیق مساله، قبل از اجرای روش یک ضعف محسوب می‌گردد، لذا روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی جدید و سریع پیشنهادی را به صورت زیر برای این مساله با فرض عدم اطلاع از جواب دقیق مساله، پیاده‌سازی می‌کنیم. برای این منظور، با توجه به رابطه‌ی (۲۹) داریم:

$$\psi(y) = ۲\pi + \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{+۱} \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{(x-y)^۲}\big(\psi(x) - \psi(y) + \psi(y)\big)dx \qquad (۴۷)$$

از آنجایی که در رابطه‌ی (۴۰)، $f(y) = ۲\pi$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی صفر است. بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۳۵)، $q_n(y) = b_۰$ بوده و طبق رابطه‌ی (۳۴) داریم:

$$\psi(y) = \frac{۴\pi}{\pi+۲} + \frac{۱}{۲+\pi}\int_{-۱}^{+۱} \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{(x-y)^۲}\big(\psi(x) - \psi(y)\big)dx + b_۰ - b_۰. \qquad (۴۸)$$

با توجه به رابطه‌ی (۲۸) داریم:

$$\begin{aligned} \psi_۰(y) &= b_۰, \\ \psi_۱(y) &= \frac{۴\pi}{\pi+۲} - b_۰ + \underbrace{\frac{۱}{۲+\pi}\int_{-۱}^{+۱} \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{(x-y)^۲}\big(\psi_۰(x) - \psi_۰(y)\big)dx}_{\text{رفص}} = ۰. \end{aligned} \qquad (۴۹)$$

بنابراین $b_۰ = \frac{۴\pi}{\pi+۲}$ و $\psi_۰(y) = \frac{۴\pi}{\pi+۲}$ و با توجه به (۳۵) جواب دقیق مساله به قرار زیر است:

$$u(y) = \psi(y)\sqrt{۱-y^۲} = \frac{۴\pi}{\pi+۲}\sqrt{۱-y^۲}. \qquad (۵۰)$$

**مثال 2.** معادله‌ی فوق منفرد نوع دوم زیر را در نظر می‌گیریم، [۲۸، ۲۷، ۶]:

$$\begin{aligned} u(y) &= (۴y^۲ - \tfrac{۱}{۲})\sqrt{۱-y^۲} + \frac{۱}{\pi}\sqrt{۱-y^۲}\int_{-۱}^{+۱} \frac{u(x)}{(x-y)^۲}dx, \\ &(-۱ < y < ۱), \end{aligned} \qquad (۵۱)$$

که در آن $u(\pm ۱) = ۰$ و $u(y) = y^۲\sqrt{۱-y^۲}$ جواب دقیق مساله است. با جایگذاری عبارت $u(y) = \psi(y)\sqrt{۱-y^۲}$ در رابطه‌ی (۵۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi(y) &= (۴y^۲ - \tfrac{۱}{۲}) + \frac{۱}{\pi}\frac{d}{dy}\int_{-۱}^{+۱} \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x-y}\psi(x)dx, \\ &(-۱ < y < ۱). \end{aligned} \qquad (۵۲)$$

با اعمال روش اختلال هموتوپی استاندارد بر اساس روابط (۱۸) و (۲۵) برای رابطه‌ی (۵۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi_۰(y) &= ۴y^۲ - \frac{۱}{۲} \\ \psi_۱(y) &= -۱۲y^۲ + \frac{۵}{۲} \\ \psi_۲(y) &= ۳۶y^۲ - \frac{۱۷}{۲} \\ \psi_۳(y) &= -۱۸۰y^۲ + \frac{۵۳}{۲} \\ \psi_۴(y) &= ۳۲۴y^۲ - \frac{۱۶۱}{۲} \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (۵۳)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi(y) = \sum_{n=۰}^{\infty}\psi_n(y) &= (۴ - ۱۲ + ۳۶ - ۱۰۸ + ۳۲۴ - \cdots)x^۲ \\ &+ \left(-\frac{۱}{۲} + \frac{۵}{۲} - \frac{۱۷}{۲} + \frac{۵۳}{۲} - \frac{۱۶۱}{۲} + \cdots\right). \end{aligned} \qquad (۵۴)$$

رابطه‌ی (٥٤) یک سری واگراست. حال با فرض دانستن جواب دقیق مساله، اگر از روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی استاندارد استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \text{جواب دقیق} = y^2, \\ f_2(y) &= f(y) - f_1(y) = 3y^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned} \qquad (55)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi_0(y) &= y^2 \\ \psi_1(y) &= 3y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\frac{d}{dy}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-y}\psi_0(x)dx = 0 \end{aligned} \qquad (56)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۱۱):

$$\psi(y) = y^2 \qquad (57)$$

و $u(y) = y^2\sqrt{1-y^2}$ جواب دقیق مساله است. همانطوری که اشاره شد، داشتن جواب مساله، قبل از اجرای روش، یک ضعف محسوب می‌گردد. لذا روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی جدید و سریع پیشنهادی را به صورت زیر برای این مساله، با فرض عدم اطلاع از جواب دقیق مساله، پیاده‌سازی می‌کنیم. برای این منظور با توجه به رابطه‌ی (۲۹) داریم:

$$\psi(y) = 4y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi(x) - \psi(y) + \psi(y)\big)dx. \qquad (58)$$

از آنجایی که در رابطه‌ی (۵۸)، $f(y) = 4y^2 - \frac{1}{2}$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دو است، بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۳۵)، $q_n(y) = b_0 + b_1y + b_2y^2$ بوده و بر اساس رابطه‌ی (۳۹) داریم:

$$\begin{aligned} \psi(y) = {} & 2y^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi(x) - \psi(y)\big)dx \\ & + \big(b_0 + b_1y + b_2y^2\big) - \big(b_0 + b_1y + b_2y^2\big) \end{aligned} \qquad (59)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳۹) داریم:

$$\begin{aligned} \psi_0(y) &= b_0 + b_1y + b_2y^2 \\ \psi_1(y) &= 2y^2 - \frac{1}{4} - b_0 - b_1y - b_2y^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi_0(x) - \psi_0(y)\big)dx = 0. \end{aligned} \qquad (60)$$

با قرار دادن $\psi_1(y) = 0$، مقادیر مجهول به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$b_0 = 0, \qquad b_1 = 0, \qquad b_2 = 1. \qquad (61)$$

بنابراین $\psi_0(x) = y^2$ و جواب دقیق معادله‌ی (۵۱) با توجه به رابطه‌ی (۱۸) به صورت زیر است:

$$u(y) = \psi(y)\sqrt{1-y^2} = y^2\sqrt{1-y^2}. \qquad (62)$$

**مثال 3.** معادله‌ی فوق منفرد نوع دوم زیر را در نظر می‌گیریم، [۶، ۲۷، ۲۸]:

$$\begin{aligned} u(y) = {} & \big(5y^3 - 7y\big)\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{\pi}\sqrt{1-y^2}\int_{-1}^{+1}\frac{u(x)}{(x-y)^2}dx, \\ & (-1 < y < 1), \end{aligned} \qquad (63)$$

که در آن $u(\pm 1) = 0$ و $u(y) = (y^3 - 2y)\sqrt{1-y^2}$ جواب دقیق مساله است. با جایگذاری عبارت $u(y) = \psi(y)\sqrt{1-y^2}$ در رابطه‌ی (٦٣) داریم:

$$\begin{aligned} \psi(y) = {} & (5y^3 - 7y) + \frac{1}{\pi}\frac{d}{dy}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-y}\psi(x)dx, \\ & (-1 < y < 1). \end{aligned} \qquad (64)$$

با اعمال روش اختلال هموتوپی استاندارد بر اساس روابط (۱۸) و (۲۵) برای معادله‌ی ( خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi_0(y) &= 5y^3 - 7y, \\ \psi_1(y) &= -20y^3 + 19y, \\ \psi_2(y) &= 80y^3 - 58y, \\ \psi_3(y) &= -320y^3 + 196y, \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (65)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۸) داریم:

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(y) = (5 - 20 + 80 - 320 + \cdots)y^3 + (-7 + 19 - 58 + 196 - \cdots). \qquad (66)$$

رابطه‌ی (٦٦) یک سری واگرا است. حال با فرض داشتن جواب دقیق مساله، اگر از روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی استاندارد استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \text{جواب دقیق} = y^3 - 2y, \\ f_2(y) &= f(y) - f_1(y) = \big(5y^3 - 7y\big) - \big(y^3 - 2y\big) \\ &= 4y^3 - 5y. \end{aligned} \qquad (67)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۸) خواهیم داشت:

$$\psi_0(y) = y^3 - 2y, \qquad (68)$$

$$\psi_1(y) = 4y^3 - 5y + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\,\psi_0(x)dx = (4y^3 - 5y) + \frac{1}{\pi}(-4\pi y^3 + 5\pi y) = 0.$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۱):

$$\psi(y) = y^3 - 2y \tag{69}$$

و $u(y) = (y^3 - 2y)\sqrt{1-y^2}$ جواب دقیق مساله است. با به کارگیری روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی جدید و سریع پیشنهادی، بدون نیاز به دانستن جواب دقیق مساله از قبل، با توجه به رابطه‌ی (۲۹) خواهیم داشت:

$$\psi(y) = (5y^3 - 7y) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi(x) - \psi(y) + \psi(y)\big)dx. \tag{70}$$

از آنجایی که در رابطه‌ی (۷۰)، $f(y) = 5y^3 - 7y$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی سه است، بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۳۵)، $q_n(y) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3$ بوده و بر اساس رابطه‌ی (۳۹) داریم:

$$\psi(y) = \frac{5}{2}y^3 - \frac{7}{2}y + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi(x) - \psi(y)\big)dx + \big(b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3\big) - \big(b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3\big). \tag{71}$$

با توجه به رابطه‌ی (۳۹) داریم:

$$\begin{aligned} \psi_0(y) &= b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3, \\ \psi_1(y) &= \frac{5}{2}y^3 - \frac{7}{2}y - a_0 - a_1y - a_2y^2 - a_3y^3 + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dy}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-y)^2}\big(\psi_0(x) - \psi_0(y)\big)dx. \end{aligned} \tag{72}$$

با قرار دادن $\psi_1(y) = 0$، مقادیر مجهول به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$b_0 = 0, \qquad b_1 = -2, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = 1. \tag{73}$$

بنابراین $\psi_0(x) = y^3 - 2y$ و جواب دقیق رابطه‌ی (۶۳) با توجه به رابطه‌ی (۱۸) به صورت زیر است:

$$u(y) = \psi(y)\sqrt{1-y^2} = (y^3 - 2y)\sqrt{1-y^2}. \tag{74}$$

## 5. نتیجه‌گیری

در این مقاله، با ارائه‌ی مثال‌هایی نشان دادیم که روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی استاندارد برای حل معادله‌ی انتگرال پراندتل مورد بحث همگرا نیست و روش اختلال هموتوپی اصلاح شده‌ی استاندارد نیز زمانی کارایی دارد که انتخاب درستی برای توابع $f_1$ و $f_2$ داشته باشیم. برای این کار اگر جواب دقیق معادله را از قبل داشته باشیم، کافی است که جواب دقیق را به عنوان $f_1$ در نظر گرفته و $f_2$ را از رابطه‌ی $f_2 = f(y) - f_1$ به دست آوریم. در این صورت $u_2(y) = u_3(y) = \cdots = 0$ بوده و $f_1$ به عنوان جواب دقیق خواهد بود ولی داشتن جواب دقیق از قبل برای انتخاب $f_1$ و $f_2$ نوعی ضعف محسوب می‌شود. در روش پیشنهادی جدید، بدون در دست داشتن جواب دقیق به راحتی می‌توان، طبق تکنیک معرفی شده، جواب دقیق مساله را در دومین تکرار از روش پیشنهادی، به دست آورد.

## مراجع


[١] Iovane, G., Lifanov, I. K., & Sumbatyan, M. A. (٢٠٠٣). On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics. Acta mechanica, ١٦٢(١-٤), ٩٩-١١٠.

[٢] Martin, P. A. (١٩٩٢). Exact solution of a simple hypersingular integral equation. The Journal of Integral Equations and Applications, ١٩٧-٢٠٤.

[٣] Kármán, T. V. (١٩٥٤). Aerodynamics. New York: McGraw-Hill Book Co, Inc.

[٤] Mandal, B. N., & Chakrabarti, A. (٢٠١١). Applied singular integral equations.

[٥] Monegato, G., & Pennacchietti, V. (١٩٨٦). Quadrature rules for Prandtl's integral equation. Computing, ٣٧, ٣١-٤٢.

[٦] Mahmoudi, Y. (٢٠١٤). A new modified Adomian decomposition method for solving a class of hypersingular integral equations of second kind. Journal of Computational and Applied Mathematics, ٢٥٥, ٧٣٧-٧٤٢.

[٧] Mandal, B. N., Chakrabarti, A., & others. (٢٠١١). Book Review Applied Singular Integral Equations (PA MARTIN). Journal of Integral Equations and Applications, ٢٣(٤), ٥٩٧-٥٩٨.

[٨] Novin, R., Fariborzi Araghi, M. A., & Mahmoudi, Y. (٢٠١٨). A novel fast modification of the Adomian decompositions method to solve integral equations of the first kind with hypersingular kernels. Journal of Computational and Applied Mathematics , ٢٠١٨, ٦١٩-٦٣٤.

[٩] Ioakimidis, N. I. (١٩٨١). On the numerical evaluation of derivatives of Cauchy principal value integrals. Computing, ٢٧(١), ٨١-٨٨.

[١٠] Ioakimidis, N. I. (١٩٨٢). Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity. Acta Mechanica, ٤٥(١-٢), ٣١-٤٧.

[١١] Ioakimidis, N. I. (١٩٨٣). On the Numerical Evaluation of a Class of Finite-Part Integrals. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, ٦٣(١١), ٥٧٢-٥٧٤.

[١٢] Ioakimidis, N. I. (١٩٨٤). A natural interpolation formula for Prandtl's singular integrodifferential equation. International Journal for Numerical Methods in Fluids, ٤, ٢٨٣-٢٩٠.

[١٣] Dragoş, L. (١٩٩٤). A collocation method for the integration of Prandtl's equation. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, ٧٤, ٢٨٩-٢٩٠.

[١٤] Dragoş, L. (١٩٩٤). Integration of Prandtl’s equation with the aid of quadrature formulae of Gauss type. Quarterly of applied mathematics, ٥٢, ٢٣-٢٩.

[١٥] Chakrabarti, A. (١٩٩٥). A note on singular integral equations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, ٢٦, ٧٣٧-٧٤٢.

[١٦] Chakrabarti, A. (٢٠٠٧). Solution of a simple hypersingular integral equation. The Journal of Integral Equations and Applications, ٤٦٥-٤٧١.

[١٧] Chakrabarti, A., & Berghe, G. V. (٢٠٠٤). Approximate solution of singular integral equations. Applied mathematics letters, ١٧, ٥٥٣-٥٥٩.

[۱۸] Chakrabarti, A., Mandal, B. N., Basu, U., & Banerjea, S. (۱۹۹۷). Solution of a hypersingular integral equation of the second kind. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, ۷۷(٤), ۳۱۹-۳۲۰.

[۱۹] Mandal, B. N., & Bhattacharya, S. (۲۰۰۷). Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials. Applied Mathematics and computation, ۱۹۰(۲), ۱۷۰۷-۱۷۱٦.

[۲۰] He, J.-H. (۱۹۹۸). Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ۱٦۷, ٥۷-٦۸.

[۲۱] He, J.-H. (۱۹۹۸). Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ۱٦۷, ٦۹-۷۳.

[۲۲] He, J.-H. (۱۹۹۸). Generalized Variational Principle in Fluids (in Chinese). Shanghai University Press.

[۲۳] He, J.-H. (۲۰۰۳). Linearized perturbation technique and its applications to strongly nonlinear oscillators. Computers & Mathematics with Applications, ٤٥(۱-۳), ۱-۸.

[۲٤] Kutt, H. R. (۱۹۷٥). The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. Numerische Mathematik, ۲٤(۳), ۲۰٥-۲۱۰.

[۲٥] Kythe, P. K., & Schäferkotter, M. R. (۲۰۰٤). Handbook of computational methods for integration. CRC Press.

[۲٦] Novin, R., & Sohrabi Dastjerd, Z. (۲۰۱٥). Solving Duffing equation using an improved semi-analytical method. Communications on Advanced Computational Science with Applications, ۲, ٥٤-٥۸.

[۲۷] Novin, R., Fariborzi Araghi, M. A., & Mahmoudi, Y. (۲۰۱۸). Solving a class of hypersingular integral equations by using the modified homotopy perturbation method. Proceeding of the third international conference on intelligent decision science, ۹-۱۱.

[۲۸] Novin, R., Fariborzi Araghi, M. A., & Mahmoudi, Y. (۲۰۱۸). Solving the Prandtl's equation by the modified Adomian decomposition method. Communications on Advanced Computational Science with Applications, ۱, ۹-۱٤.