دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هفتم، آذر و دی ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

روش تکرار تغییرات یانگ-لاپلاس کسری موضعی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری موضعی

هما افراز[۱]، جعفر صابری نجفی[۲*]

[(۱)]دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، دانشکده ریاضی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران
[(۲)]استاد، گروه ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، دانشکده ریاضی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۱/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۲/۱۵

چکیده

در دهه‌های اخیر نظریه حساب کسری موضعی به‌طور موفقیت‌آمیزی برای توصیف و حل مسائل علوم پایه و مهندسی استفاده شده است. در این پژوهش، روش تکرارتغییرات یانگ – لاپلاس کسری موضعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری موضعی روی مجموعه کانتور استفاده شده است .جواب‌های دقیق و تقریبی مشتق‌ناپذیر برای انواع معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی بدست آمده است. نشان‌داده شده است که روش استفاده شده یک روش آسان و کارآمد برای اجرا در مسائل خطی وغیر خطی ناشی در علوم و مهندسی می‌باشد. در این مقاله بر روش تکرار تغییرات یانگ – لاپلاس کسری موضعی که از ترکیب روش تکرار تغییرات کسری موضعی و تبدیل یانگ لاپلاس بدست آمده است، تاکید شده است. بیشتر جواب‌های حاصل از این روش به صورت سری بدست می‌آیند که معمولاً با سرعت به جواب‌های دقیق یا تقریبی همگرا می‌شوند. مثال‌های تشریحی نشان می‌دهدکه این روش قادر به کاهش حجم محاسبات نسبت به روش‌های کلاسیک موجود می‌باشد..

واژه‌های کلیدی: حساب کسری موضعی، مشتق کسری موضعی، تبدیل یانگ –لاپلاس، روش تکرارتغییراتی کسری موضعی، مجموعه کانتور.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: najafi141@gmail.com

۱– مقدمه

حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری یک شاخه از ریاضیات کاربردی است که با مشتقات و انتگرال‌های از مرتبه دلخواه سروکار دارد. در طول دهه گذشته حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری کاربردهای متعددی در زمینه‌های متنوعی از علوم و مهندسی پیدا کرده است. از معادلات دیفرانسیل کسری به‌طور فزاینده‌ای برای حل مسائل، به‌عنوان مثال در مکانیک سیالات، آکوستیک، زیست‌شناسی، الکترومغناطیس، انتشار و بسیاری از فرآیندهای فیزیکی دیگر استفاده شده است[۸–۱].

برخی از کمیت‌های فیزیکی برای توصیف پارامترهای به طور موضعی فیزیکی وجود دارند که بر روی مجموعه کانتور مشتق ناپذیرند.

به عنوان مثال معادلات انتشار و هلمهولتز کسری موضعی، معادلات ناویر استوکس کسری موضعی در دامنه فرکتال، معادلات لاپلاس و پواسن کسری موضعی موجود در الکترواستاتیک در حوزه فرکتال که در چنین مواردی مفاهیم حساب کسری موضعی اجازه می‌دهد تا راه حل‌های مناسبی برای چنین مسائل مشتق‌ناپذیری وجود داشته باشد[۱۱–۹].

اخیراً مطالعات زیادی در موضوع کاربرد معادلات دیفرانسیل کسری در مسائل دینامیک، فیزیک، شیمی و سایر علوم انتشار یافته‌است. بنابراین توجهات زیادی به حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معمولی کسری موضعی شده است. حل معادلات دیفرانسیل کسری موضعی در حالت عادی به صورت تحلیلی مشکل بوده و نیاز است که از روش‌های عددی برای پیدا کردن جواب تقریبی استفاده شود. بر این اساس روش‌های عددی زیادی چون روش تجزیه کسری موضعی، روش تکرار تغییراتی کسری موضعی، روش تجزیه آدومیان وروش تبدیل یانگ لاپلاس بررسی و استفاده شده‌است.

روش‌های تکرار تغییراتی کسری موضعی برای حل معادله انتقال حرارت در رسانه‌های فرکتال، تجزیه کسری موضعی برای حل معادلات نفوذ کسری و انتقال حرارت موضعی، بسط کسری موضعی برای حل معادله شرودینگر با مشتق کسری موضعی و ترکیب روش تکرار تغییرات با یانگ – لاپلاس برای حل معادله انتقال حرارت در رسانه‌های فراکتال به کار گرفته شده‌اند[۱۶–۱۲].

روش تکرار تغییراتی کسری موضعی و تبدیل یانگ– لاپلاس دو روش کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزئی کسری موضعی خطی وغیرخطی می‌باشند و از ترکیب آن‌ها روش کارآمدتری بدست می‌آید که نیاز به گسسته‌سازی نداشته و حجم محاسبات در آن نیز بسیار کاهش می‌یابد وآن را روش تکرار تغییرات یانگ – لاپلاس کسری موضعی می‌نامیم.

در این پژوهش چند معادله دیفرانسیل کسری موضعی خطی و غیرخطی روی مجموعه کانتور با روش تکرار تغییرات یانگ –لاپلاس کسری موضعی حل شده است.

مطالب این مقاله به شرح زیرتنظیم شده است:

در بخش ۲ تعاریف ومطالب مورد نیاز محاسبات کسری موضعی و تبدیل یانگ– لاپلاس ارائه شده‌است. در بخش ۳ روش تکرار تغییرات کسری موضعی‌ارائه می‌شود. همچنین، روش تکرار تغییرات کسری موضعی یانگ - لاپلاس در بخش۴ بیان می‌گردد. در بخش۵، روش بر روی چندین مثال پیاده‌سازی‌شده است و در بخش۶، نتایج برآمده از این مقاله به طور مختصر بیان می‌گردد.

۲– پیش بایسته ها

تعاریف بسیاری از مشتقات وانتگرال های کسری موضعی که حساب دیفرانسیل و انتگرال فراکتال نامیده می شود وجود داردکه در این پژوهش ازتعاریف گائو–یانگ –کانگ استفاده شده است[۱۷].

در این بخش مفاهیم اولیه حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری موضعی مورد نیازپژوهش ارائه می‌گردد[۱۹،۱۸].

۲–۱ - مشتق کسری موضعی:

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته در فضای فراکتال باشد و $f(x)\,\epsilon\,C_\alpha(a,b)$ آنگاه مشتق کسری موضعی $f(x)$ از مرتبه α در نقطه $x=x_0$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D_x^\alpha f(x_0)=\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x)\Big|_{x=x_0}$$
$$=f^\alpha(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta^\alpha(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^\alpha} \qquad (۱)$$

که

$$\Delta^{\alpha}\big(f(x)-f(x_0)\big) \cong \Gamma(\alpha+1)(f(x)-f(x_0))$$

و

$$f(x) \in D_x^{\alpha}(a,b)$$

۲-۲- انتگرال کسری موضعی

یک افراز فاصله $[a,b]$ به صورت (t_j,t_{j+1})، $j=0,1,\dots,N-1$، با $t_N=b, t_0=a, \Delta t_j=t_{j+1}-t_j$ و $\Delta t = max\{\Delta t_0, \Delta t_1, \dots\}$ نشان داده می‌شود. فرض می‌کنیم:

$$f(x) \in C_{\alpha}(a,b)$$

آنگاه انتگرال کسری موضعی $f(x)$ از مرتبه α در فاصله $[a,b]$ به صورت زیر می‌باشد:

$$ {}_aI_b^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(t)\,(dt)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)(\Delta t_j)^{\alpha} \qquad (۲)$$

اگر برای هر $x \in (a,b)$، ${}_aI_x^{(\alpha)}f(x)$ وجود داشته باشد، می‌نویسیم $f(x) \in I_x^{(\alpha)}(a,b)$. همچنین ${}_aI_a^{(\alpha)}f(x)=0,\ {}_aI_b^{(\alpha)}f(x) = -\,{}_bI_a^{(\alpha)}f(x)$

لم ۳-۲: فرض کنید $f(x)$ روی مجموعه فراکتال با بعد فراکتال α تعریف شده باشد و روی $[a,b]$ کران دار باشد آنگاه شرط لازم وکافی برای وجود انتگرال (۲) این است که مجموعه فراکتال ناپیوستگی $f(x)$ اندازه صفر داشته باشد.

۲-۴- تابع میتاگ-لفلر (*Mittag- Leffler*)

فرض کنید $E_{\alpha}: R \to R$ و $x \to E_{\alpha}(x)$ یک تابع پیوسته باشد که به صورت زیر تعریف شده‌است. این تابع میتاگ- لفلرنامیده می‌شود:

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(1+k\alpha)}\ ,\quad 0<\alpha\le 1 \qquad (۳)$$

۲-۵- چند تابع پیوسته مشتق ناپذیر روی مجموعه‌های فراکتال

به عنوان یک نتیجه از فرمول بالا توابع به طور پیوسته مشتق ناپذیر زیر را داریم:

$$E_{\alpha}(x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}\ ,0<\alpha\le 1 \qquad (۴)$$

$$E_{\alpha}(i^{\alpha}x^{\alpha}) = cos_{\alpha}(x^{\alpha}) + i^{\alpha}sin_{\alpha}(x^{\alpha}) \qquad (۵)$$

$$cos_{\alpha}(x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k\alpha}}{\Gamma(1+2k\alpha)} \qquad (۶)$$

$$sin_{\alpha}x^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{\alpha(2k+1)}}{\Gamma(1+\alpha(2k+1))} \qquad (۷)$$

۲-۶- فرمول‌های کاربردی مشتق و انتگرال کسری موضعی

اکنون چند فرمول کاربردی مشتق وانتگرال کسری موضعی مورد نیاز پژوهش در جدول (۱) بیان شده است.

جدول (۱): فرمول‌های‌کاربردی مشتق و انتگرال کسری موضعی چند تابع خاص

انتگرال‌های کسری موضعی	مشتقات کسری موضعی
${}_0I_{\xi}^{(\alpha)}E_{\alpha}(\xi^{\alpha}) = E_{\alpha}(\xi^{\alpha})-1$	$\frac{d^{\alpha}}{d\xi^{\alpha}}E_{\alpha}(\xi^{\alpha}) = E_{\alpha}(\xi^{\alpha})$
${}_0I_{\xi}^{(\alpha)}\left(\frac{\xi^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}\right) = \frac{\xi^{(n+1)\alpha}}{\Gamma(1+(n+1)\alpha)}, n\in\aleph$	$\frac{d^{\alpha}}{d\xi^{\alpha}}\left(\frac{\xi^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}\right) = \frac{\xi^{(n-1)\alpha}}{\Gamma(1+(n-1)\alpha)}, n\in\aleph$
${}_0I_{\xi}^{(\alpha)}cos_{\alpha}(\xi^{\alpha}) = sin_{\alpha}(\xi^{\alpha})$	$\frac{d^{\alpha}}{d\xi^{\alpha}}cos_{\alpha}(\xi^{\alpha}) = -sin_{\alpha}(\xi^{\alpha})$
${}_0I_{\xi}^{(\alpha)}sin_{\alpha}(\xi^{\alpha}) = 1-cos_{\alpha}(\xi^{\alpha})$	$\frac{d^{\alpha}}{d\xi^{\alpha}}sin_{\alpha}(\xi^{\alpha}) = cos_{\alpha}(\xi^{\alpha})$

۲-۷- تبدیل یانگ – لاپلاس

فرض کنید $f(x) \in C_\alpha(0,\infty)$، آنگاه تبدیل یانگ - لاپلاس تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}_\alpha\{f(x)\} = f_s^{l,\alpha}(s) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty E_\alpha(-s^\alpha x^\alpha)f(x)(dx)^\alpha \qquad (۸)$$
$$0<\alpha\le 1\,, s^\alpha \in R^\alpha$$

که شرط کافی برای همگرایی آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty |f(x)|(dx)^\alpha < k < \infty \qquad (۹)$$

۲-۸- معکوس تبدیل یانگ- لاپلاس

فرض کنید $\mathcal{L}_\alpha\{f(x)\} \equiv f_s^{l,\alpha}(s)$ معکوس تبدیل یانگ -لاپلاس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(t) = \mathcal{L}_\alpha^{-1}\left(f_s^{l,\alpha}(s)\right) = \frac{1}{(2\pi)^\alpha}\int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} E_\alpha(s^\alpha x^\alpha) f_s^{l,\alpha}(s)(ds)^\alpha, \quad x>0 \qquad (۱۰)$$

که در آن $s^\alpha = \beta^\alpha + i^\alpha\omega^\alpha$، i^α واحد موهومی فرکتال، $Re(s) = \beta > 0$ و $0 < \alpha \le 1$ می‌باشد.

۲-۹- خواص تبدیل یانگ–لاپلاس

فرض کنید $\mathcal{L}_\alpha\{f(x)\} = f_s^{l,\alpha}(s)$ و $\mathcal{L}_\alpha\{g(x)\} = g_s^{l,\alpha}(s)$ ، آنگاه فرمول‌های زیر را داریم:

$$\mathcal{L}_\alpha\{af(x)+bg(x)\} = af_s^{l,\alpha} + bg_s^{l,\alpha} \qquad (۱۱)$$

$$\mathcal{L}_\alpha\{E_\alpha(c^\alpha x^\alpha)f(x)\} = f_s^{l,\alpha}(s-c) \qquad (۱۲)$$

$$\mathcal{L}_\alpha\{f^{(\alpha)}(x)\} = s^\alpha f_s^{l,\alpha}(s) - f(0) \qquad (۱۳)$$

$$\mathcal{L}_\alpha\{E_\alpha(a^\alpha x^\alpha)\} = \frac{1}{s^\alpha - a^\alpha} \qquad (۱۴)$$

$$\mathcal{L}_\alpha\{x^{k\alpha}\} = \frac{\Gamma(1+k\alpha)}{s^{(k+1)\alpha}} \qquad (۱۵)$$

$$\mathcal{L}_\alpha\{sin_\alpha(a^\alpha x^\alpha)\} = \frac{a^\alpha}{s^{2\alpha}+a^{2\alpha}} \qquad (۱۶)$$

۳- روش تکرار تغییراتی کسری موضعی

در این بخش ایده روش تکرار تغییراتی عملگر کسری موضعی معرفی می شود. اولین بار در سال ۱۹۹۸ این روش برای حل معادلات دیفرانسیل کسری توسط هی استفاده شده است [۱].

در سال ۲۰۱۲ یانگ روش تکرار تغییراتی [۱۹] را با استفاده از عملگرهای کسری موضعی پیشنهاد کرد.

روش تکرار تغییراتی کسری موضعی برای حل رده بزرگی از مسائل دیفرانسیل خطی و غیرخطی کارآمد، راحت و با دقت زیاد می‌باشد. در این روش نیازی به گسسته‌سازی نیست و محاسبات کمتری نسبت به سایر روش‌ها انجام می‌شود. جواب‌های حاصل از روش به شکل سری بوده و در صورتی که مسأله جواب دقیق داشته باشد به جواب دقیق همگرا می‌شود. در این روش نیازی نیست که عبارات نسبت به متغیرهای وابسته و مشتقاتش مشتق‌پذیر باشد.

۳-۱- شرح مختصری از روش تکرار تغییراتی کسری موضعی [۱۹،۱۸]

ابتدا اصل تغییرات کسری موضعی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$I(y) = {}_aI_b^{(\alpha)} f(x, y(x), y^\alpha(x)) \qquad (۱۷)$$

که $y^{(\alpha)}(x)$ عملگر دیفرانسیل کسری موضعی و $a \le x \le b$ می‌باشد.

شرط پایداری معادله (۱۷) به صورت زیراست:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(\alpha)}}\right) = 0 \qquad (۱۸)$$

معادله (۱۸) برای تعیین ضریب لاگرانژ در روش تکرار تغییراتی مفید است.

معادله دیفرانسیل کسری موضعی کلی به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L_{(m\alpha)}(x,t) + R_\alpha u(x,t) + N_\alpha u(x,t) = f(x,t), t>0\,, \quad x \in \mathbb{R}, 0<\alpha\le ۱ \qquad (۱۹)$$

که $L_{(m\alpha)} = \frac{\partial^{(m\alpha)}}{\partial t^{(m\alpha)}}$ و $m \in N$، R_α عملگر خطی کسری موضعی و N_α عملگر غیرخطی کسری موضعی کلی را نشان می‌دهند و $f(x,t)$ عبارت منبع می‌باشد.

فرمول تکرار تغییراتی کسری موضعی را که در [۱۷،۱۸] داده شده است را در نظر می‌گیریم:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n + \int_0^t \left\{\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (L_{(m\alpha)} u_n(x,\tau) + R_\alpha u_n(x,\tau) + N_\alpha u_n(x,\tau) - f(x,\tau))\right\} (d\tau)^\alpha \quad (۲۰)$$

بر طبق روش تکرار تغییراتی، می‌تواند یک تابع تصحیح کسری موضعی به فرم زیر نوشته شود:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \left\{\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(L_{(m\alpha)} u_n(x,\tau) + R_\alpha \tilde{u}_n(x,\tau) + N_\alpha \tilde{u}_n(x,\tau) - f(x,\tau)\right)\right\} (d\tau)^\alpha \quad (۲۱)$$

که $\tilde{u}_n$ به عنوان یک محدودیت روش تکرار تغییراتی کسری موضعی در نظر گرفته شده است یعنی $\delta^\alpha \tilde{u}_n = 0$ و λ^α ضریب لاگرانژ فرکتال می‌باشد. تعیین λ^α به شرایط پایداری کسری نیاز دارد. با اکسترمم کردن معادله (۲۱)، ضریب لاگرانژ λ^α به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda^\alpha = (-1)^m \frac{(\tau-t)^{(m-1)\alpha}}{\Gamma(1+(m-1)\alpha)} \quad (۲۲)$$

با جایگذاری (۲۲) در (۲۱) داریم:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + {}_0I_t^{(\alpha)} \left\{\frac{(-1)^m (\tau-t)^{(m-1)\alpha}}{\Gamma(1+(m-1)\alpha)} \left(L_{(m\alpha)} u_n(x,\tau) + R_\alpha \tilde{u}_n(x,\tau) + N_\alpha \tilde{u}_n(x,\tau) - f(x,\tau)\right)\right\} \quad (۲۳)$$

برای اولین تکرار $u_0(x,t)$، مقدار اولیه $u(x,0)$ استفاده می‌شود.

در (۲۳) اگر فرض کنیم $n \to \infty$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) \quad (۲۴)$$

۴- روش تکرار تغییرات کسری موضعی یانگ - لاپلاس:[۱۹]

روش تکرار تغییراتی و تبدیل یانگ–لاپلاس در سال ۲۰۱۵ برای حل معادله لاپلاس توسط جعفری و همکاران [۲۰] و برای حل معادلات موج وانتشار توسط جاسیم و همکاران [۲۱] استفاده شده است. در این پژوهش رده‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری موضعی خطی و غیرخطی را حل می‌کنیم. برای این منظور، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری موضعی کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L_\alpha u(x,t) + R_\alpha u(x,t) + N_\alpha u(x,t) = f(x,t), \quad t > 0\,, x \in R\,, 0 < \alpha \le 1 \quad (۲۵)$$

که در آن $L_\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$، R_α عملگر کسری موضعی خطی، N_α عملگر کسری موضعی غیرخطی کلی و $f(x,t)$ جمله منبع می‌باشد. ابتدا تبدیل یانگ -لاپلاس را (که در این پژوهش با $\mathcal{L}_\alpha$ نشان داده می‌شود) روی هر دو طرف معادله (۲۵) اعمال می‌کنیم. حاصل می‌شود

$$\mathcal{L}_\alpha\{L_\alpha u(x,t)\} + \mathcal{L}_\alpha\{R_\alpha u(x,t)\} + \mathcal{L}_\alpha\{N_\alpha u(x,t)\} = \mathcal{L}_\alpha f(x,t) \quad (۲۶)$$

با به کاربردن خواص تبدیل یانگ – لاپلاس داریم:

$$s^\alpha \mathcal{L}_\alpha\{u(x,t)\} - u(x,0) = \mathcal{L}_\alpha\{f(x,t)\} - \mathcal{L}_\alpha\{R_\alpha u(x,t)\} - \mathcal{L}_\alpha\{N_\alpha u(x,t)\}$$

یا

$$\mathcal{L}_\alpha\{u(x,t)\} = \frac{1}{s^\alpha} u(x,0) + \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{f(x,t)\} - \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{R_\alpha u(x,t)\} - \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{N_\alpha u(x,t)\} \quad (۲۷)$$

با به کار بردن معکوس تبدیل یانگ – لاپلاس در دو طرف معادله (۲۷) خواهیم داشت:

$$u(x,t) = u(x,0) + \mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{f(x,t)\} - \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{R_\alpha u(x,t)\} - \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{N_\alpha u(x,t)\}\right] \quad (۲۸)$$

حال از دو طرف معادله (۲۸) به وسیله $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ مشتق می‌گیریم، حاصل می‌شود:

$$u_t^\alpha(x,t) - \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{f(x,t)\} - \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{R_\alpha u(x,t)\} - \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{N_\alpha u(x,t)\}\right] - u_t^\alpha(x,0) = 0 \quad (۲۹)$$

با به کار بردن تابع تصحیح روش تکرار تغییرات کسری موضعی برای عبارت فوق، داریم:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t \Bigg((u_n)_\xi^\alpha(x,\xi) - \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{f(x,\xi)\} - \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{R_\alpha u_n(x,\xi)\} - \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{N_\alpha u_n(x,\xi)\}\right](u_n)_\xi^\alpha(x,0)\Bigg)(d\xi)^\alpha \qquad (۳۰)$$

حال با استفاده از یک جواب اولیه دلخواه که معمولاً $u(x,0)$ انتخاب می‌شود، جواب $u(x,t)$ به صورت سری بدست می‌آید که همگرا می‌باشد، یعنی:

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) \qquad (۳۱)$$

۵- مثال‌های کاربردی

در این بخش با حل چند مثال از نوع خطی و غیرخطی به توصیف بیشترروش تکرار تغییرات یانگ – لاپلاس کسری موضعی و کاربرد آن می‌پردازیم.

مثال ۱–۵- معادله انتشار بر روی مجموعه کانتور را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۲۲]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} = 0\,, \quad u(x,0) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\,, \quad 0<\alpha\le 1\,. \qquad (۳۲)$$

می‌خواهیم جواب این مسئله را با استفاده از ترکیب روش تکرارتغییرات‌یانگ–لاپلاس بدست آوریم. برای این کار ابتدا به دوطرف معادله (۳۲) تبدیل یانگ –لاپلاس را اعمال می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$s^\alpha \mathcal{L}_\alpha\{u(x,t)\} - u(x,0) = \mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\} \Longrightarrow \mathcal{L}_\alpha\{u(x,t)\} = \frac{1}{s^\alpha}u(x,0) + \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\} \qquad (۳۳)$$

حال از معکوس تبدیل یانگ - لاپلاس استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$u(x,t) = u(x,0) + \mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right\} \qquad (۳۴)$$

با اعمال شرط اولیه بر (۳۴) داریم:

$$u(x,t) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right\} \qquad (۳۵)$$

پس از مشتق گیری به وسیله $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ از دو طرف رابطه فوق خواهیم داشت:

$$u_t^\alpha(x,t) - \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left\{\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right]\right\} = 0 \qquad (۳۶)$$

حال تابع تصحیح را برای (۳۶) می‌سازیم، خواهیم داشت :

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t \left[(u_n)_\xi^\alpha(x,\xi) - \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left\{\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{(u_n)_x^{2\alpha}(x,\xi)\}\right]\right\}\right](d\xi)^\alpha \qquad (۳۷)$$

شرط اولیه برای اولین تکرار را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \qquad (۳۸)$$

مقدار اولیه را در فرمول قرار داده و u_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t \left[(u_0)_\xi^\alpha(x,\xi) - \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left\{\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\{(u_0)_x^{2\alpha}(x,\xi)\}\right]\right\}\right](d\xi)^\alpha$$

$$u_1(x,t) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left\{\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)_x^{2\alpha}\right\}\right]\right\}(d\xi)^\alpha = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

به همین ترتیب ادامه داده و بقیه تکرارها را محاسبه می‌کنیم.

$$u_2(x,t) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left\{\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)_x^{2\alpha}\right\}\right]\right\}(d\xi)^\alpha = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$

با ادامه این روند می توان نتیجه گرفت که

$$u_n(x,t) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{۳۹}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{۴۰}$$

ملاحظه می‌کنیم که جواب حاصل از این روش ضمن اینکه با جواب مسئله به روش بسط سری‌های کسری موضعی [۲۲] یکسان است، بدون نیاز به گسسته‌سازی با محاسبات کمتری بدست می‌آید.

مثال ۲–۵- معادله شرودینگر روی مجموعه کانتور را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۲۳]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + i\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} = 0\,, \qquad u(x,0) = E_\alpha(x^\alpha). \tag{۴۱}$$

هدف حل مسئله مفروض با استفاده از ترکیب روش تکرارتغییرات با تبدیل یانگ – لاپلاس می‌باشد. برای این کار ابتدا به دوطرف معادله (۴۱) تبدیل یانگ –لاپلاس را اعمال می‌کنیم و نتیجه می‌شود:

$$s^\alpha\mathcal{L}_\alpha\{u(x,t)\} - u(x,0) = -i\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\} \tag{۴۲}$$

$$\mathcal{L}_\alpha\{u(x,t)\} = \frac{1}{s^\alpha}u(x,0) - \frac{i}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\} \tag{۴۳}$$

حال از معکوس تبدیل یانگ – لاپلاس برای معادله (۴۳) استفاده می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$u(x,t) = u(x,0) - \mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{i}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right\} \tag{۴۴}$$

با اعمال شرط اولیه روی (۴۴) داریم:

$$u(x,t) = E_\alpha(x^\alpha) - i\,\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right\} \tag{۴۵}$$

پس از مشتق‌گیری به وسیله $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ از دو طرف رابطه فوق، بدست می‌آید:

$$u_t^\alpha(x,t) + i\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right\} = 0 \tag{۴۶}$$

حال تابع تصحیح (۴۶) را می‌سازیم:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t\left[(u_n)_\xi^\alpha(x,\xi) + i\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u_n(x,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right\}\right](d\xi)^\alpha \tag{۴۷}$$

شرط اولیه را برای اولین تکرار به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$u_0(x,t) = u(x,0) = E_\alpha(x^\alpha) \tag{۴۸}$$

مقدار اولیه را در فرمول قرار داده و u_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t\left[(u_0)_\xi^\alpha(x,\xi) + i\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u_0(x,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right\}\right](d\xi)^\alpha$$
$$= E_\alpha(x^\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t\left[i\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left(E_\alpha(x^\alpha)\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^{2\alpha}}\right\}\right)\right](d\xi)^\alpha$$
$$= E_\alpha(x^\alpha)\left[1 - \frac{i}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)(d\xi)^\alpha\right]$$

$$u_1(x,t) = E_\alpha(x^\alpha)\left[1 - \frac{it^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] \tag{۴۹}$$

به همین ترتیب ادامه داده و بقیه تکرارها را محاسبه می‌کنیم:

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t\left[(u_1)_\xi^\alpha(x,\xi) + i\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u_1(x,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right\}\right](d\xi)^\alpha$$

$$u_2(x,t) = E_\alpha(x^\alpha)\left[1 - \frac{it^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t\left[-iE_\alpha(x^\alpha) +\right.$$

$$i\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{E_\alpha(x^\alpha)\left(1-\frac{i\xi^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right\}\right\}\Bigg](d\xi)^\alpha$$

$$u_2(x,t)=E_\alpha(x^\alpha)\left[1-\frac{it^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{i}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t\left(-1+\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\left(\frac{1}{s^\alpha}-\frac{i}{s^{2\alpha}}\right)\right\}\right)(d\xi)^\alpha\right]$$
$$=E_\alpha(x^\alpha)\left[1-\frac{it^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{it^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{i}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{i\xi^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right)(d\xi)^\alpha\right]$$
$$u_2(x,t)=E_\alpha(x^\alpha)\left[1-\frac{it^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{i^2t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right] \qquad (۵۰)$$

با ادامه این روند می‌توان نتیجه گرفت که:

$$u_n(x,t)=E_\alpha(x^\alpha)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-it)^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} \qquad (۵۱)$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)=\lim_{n\to\infty}E_\alpha(x^\alpha)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-it)^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}=E_\alpha(x^\alpha)\,E_\alpha((-it)^\alpha)$$
$$=E_\alpha((x-it)^\alpha) \qquad (۵۲)$$

ملاحظه می‌کنیم که همانند مثال قبل جواب حاصل از این روش با محاسبات کمتر مساوی با جوابی است که به روش بسط سری‌های کسری موضعی [۲۳] بدست آمده است.

مثال ۳-۵- برای نشان دادن کاربرد روش درحالت غیرخطی، معادله غیر خطی Kdv کسری موضعی به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}-u\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial^{3\alpha}u}{\partial x^{3\alpha}}=0$$
$$u(x,0)=\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (۵۳)$$

هدف حل مسئله مفروض با استفاده از روش تکرار تغییرات یانگ–لاپلاس کسری موضعی می‌باشد. برای این کار ابتدا به دو طرف معادله (۵۳) تبدیل یانگ –لاپلاس را اعمال می‌کنیم و نتیجه می‌شود:

$$s^\alpha\mathcal{L}_\alpha\{u(x,t)\}-u(x,0)=\mathcal{L}_\alpha\left\{u\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial^{3\alpha}u(x,t)}{\partial x^{3\alpha}}\right\} \qquad (۵۴)$$

با استفاده از شرط اولیه داریم:

$$\mathcal{L}_\alpha\{u(x,t)\}=\frac{1}{s^\alpha}\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left\{u(x,t)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial^{3\alpha}u(x,t)}{\partial x^{3\alpha}}\right\} \qquad (۵۵)$$

حال با اعمال معکوس تبدیل لاپلاس بر (۵۵) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$u(x,t)=\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left[u(x,t)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial^{3\alpha}u(x,t)}{\partial x^{3\alpha}}\right]\right\} \qquad (۵۶)$$

پس از مشتق‌گیری به وسیله $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ از دو طرف رابطه فوق، بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}-\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left[\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left[u(x,t)\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial^{3\alpha}u(x,t)}{\partial x^{3\alpha}}\right]\right\}\right]=0 \qquad (۵۷)$$

حال تابع تصحیح (۵۷) را می‌سازیم:

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t\left\{(u_n)_\xi^\alpha(x,\xi)-\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left[\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left(\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left[u(x,\xi)\frac{\partial^\alpha u(x,\xi)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial^{3\alpha}u(x,\xi)}{\partial x^{3\alpha}}\right]\right)\right]\right\}(d\xi)^\alpha \qquad (۵۸)$$

می‌توانیم شرط اولیه را برای اولین تکرار به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$u_0(x,t)=u(x,0)=\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\ ,\quad 0\le\alpha\le 1 \qquad (۶۷)$$

حال با قرار دادن این مقدار در تابع تصحیح تقریبات متوالی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u_1(x,t)=u_0(x,t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t\left\{(u_0)_\xi^\alpha(x,\xi)-\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left[\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left(\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}_\alpha\left[u_0(x,\xi)\frac{\partial^\alpha u_0(x,\xi)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial^{3\alpha}u_0(x,\xi)}{\partial x^{3\alpha}}\right]\right)\right]\right\}(d\xi)^\alpha$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\mathcal{L}_{\alpha}^{-1} \left(\frac{1}{s^{\alpha}} \mathcal{L}_{\alpha} \left[\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \right) \right] (d\xi)^{\alpha}$$

$$u_1(x,t) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + 1 \right) \tag{۵۹}$$

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \left\{ (u_1)_{\xi}^{\alpha}(x,\xi) - \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\mathcal{L}_{\alpha}^{-1} \left(\frac{1}{s^{\alpha}} \mathcal{L}_{\alpha} \left[u_1(x,\xi) \frac{\partial^{\alpha} u_1(x,\xi)}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^{3\alpha} u_1(x,\xi)}{\partial x^{3\alpha}} \right] \right) \right] \right\} (d\xi)^{\alpha}$$

$$u_2(x,t) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + 1 \right) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left[\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{\xi^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + 1 \right)^2 \right] (d\xi)^{\alpha}$$

$$u_2(x,t) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \left(1 + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma^2(1+\alpha)} \right) \tag{۶۰}$$

با ادامه این فرآیند جملات دیگری از این دنباله به دست می‌آید که جواب تقریبی معادله است. با توجه به همگرایی روش تکرارتغییرات، هنگامی‌که $n \to \infty$، دنباله حاصل به جواب دقیق معادله میل خواهد کرد.

همان طور که در این مثال ملاحظه می‌شود در حل معادلات غیرخطی با این روش جواب‌های تقریبی حاصل می‌شود که با توجه به همگرایی روش تکرار تغییرات وقتی $n \to \infty$ به جواب دقیق همگرا می‌شود.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش چند معادله دیفرانسیل کسری موضعی خطی و غیر خطی روی مجموعه کانتور با روش تکرار تغییرات یانگ – لاپلاس کسری موضعی حل شده است. نتایج تشریحی نشان می‌دهد که جواب‌های حاصل از این روش بدون نیاز به گسسته‌سازی و با محاسبات کمتری به صورت سری بدست می‌آید. با توجه به همگرایی روش تکرار تغییرات جواب‌های حاصل در معادلات خطی به جواب دقیق و در معادلات غیرخطی به جواب تقریبی همگرا می‌شود.

فهرست منابع

[1] J.H. He, Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivativesm in porous media, Computer Methods Applied Mechanics and Engineering, 167(1) (1998), 57-68.

[2] F. Mainardi, Y. Luchko and G. Pagnini, The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation, Fractional Calculus & Applied Analysis, 4(2) (2001), 153-192.

[3] S.Z. Rida, A.M.A. El-Sayed and A.A.M. Arafa, On the solutions of time-fractional reactiondiffusion equations, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 15(12) (2010), 3847-3854.

[4] A. Yildirim, He's homotopy perturbation method for solving the space-time fractional telegraph equations, International Journal of Computer Mathematics, 87(13) (2010), 29983006.

[5] L. Debnath, Fractional integral and fractional differential equations in fluid mechanics, Fractional Calculus & Applied Analysis, 6(2) (2003), 119-155.

[6] K.S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1993.

[7] K.B. Oldham and J. Spanier, The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order with an annotated chronological bibliography Bertram Ross, Mathematics in Science and Engineering (Vol. 111), Academic Press, New York, NY, USA, 1974.

[8] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematics Studies (Vol. 204), Elsevier Science B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[9] Y.-J. Hao, H.M. Srivastava, H. Jafari, and X.-J. Yang, "Helmholtz and diffusion equations associated with local fractional derivative operators involving the Cantorian and Cantor-type cylindrical coordinates," Advances in Mathematical Physics, vol. 2013, ArticleID754248, 5 pages, 2013.

[10] X.-J. Yang, D. Baleanu, and J.A. Tenreiro Machado, "Systems of Navier-Stokes equations on cantorsets" Mathematical Problems in Engineering, vol. 2013, Article ID769724, 8 pages, 2013.

[11] Y. Y. Li, Y. Zhao, G. N. Xie, D. Baleanu, X. J. Yang, and K. Zhao, "Local fractional Poisson and Laplace equations with applications to electrostatics in fractal domain," Advances in Mathematical Physics, vol. 2014, Article ID 590574, 5 pages, 2014.

[12] J.-H. He and F.-J. Liu, "Local fractional variational iteration method for fractal heat transfer in silk cocoon hierarchy" Nonlinear Science Letters A, vol. 4, no. 1, pp. 15–20, 2013.

[13] X.-J. Yang D. Baleanu, and W.P. Zhong "Approximate solutions for diffusion equations on cantor space-time" Proceedings of the Romanian AcademyA, vol. 14, no.2, pp. 127–133, 2013.

[14] X.J. Yan, D. Baleanu, M.P. Lazarevic, and M.S. Cajic, "Fracta boundary value problems for integral and differential equations with local fractional operators," Thermal Science, pp. 103–103, 2013.

[15] Y. Zhao, D.-F. Cheng, and X.-J. Yang, "Approximation solutions for local

fractional Schr¨odinger equation in the one dimensional Cantorian system," Advances in Mathematical Physics, vol.2013, Article ID 291386, 5 pages,2013.

[16] C. F. Liu, S. S. Kong, and S. J. Yuan, "Reconstructive schemes for variational iteration method within Yang-Laplace transform with application to fractal heat conduction problem," Thermal Science, vol. 17, no.3, pp.715–721, 2013.

[17] Yang, X.J, Applications of local fractional calculus to engineering in fractal time-space: Local fractional differential equations with local fractional derivative

[18] X. J. Yang, et al. Local Fractional Integral Transforms and Their Applications, Elsevier, UK, 2015.

[19] X. J. Yang, Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications, World Science, New York, USA, 2012.

[20] H. Jafari, H. K. Jassim, "A Coupling Method of Local Fractional Variational Iteration Method and Yang-Laplace Transform for Solving Laplace Equation on Cantor Sets", Int. J. Pure Appl. Sci. Technol., 26 (1) (2015), pp. 24-33.

[21] H. K. Jassim, C. Ünlü, S. P. Moshokoa, C. M. Khalique, " Local Fractional Laplace Variational Iteration Method for Solving Diffusion and Wave Equations on Cantor Sets within Local Fractional Operators", Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Article ID 309870, 2015.

[22] A.-M. Yang, X.-J. Yang, and Z.-B. Li, "Local fractional series expansion method for solving wave and diffusion equations on Cantor sets," Abstract and Applied Analysis, vol. 2013, Article ID 351057, 5 pages, 2013.

[23] H. Jafari and H.K. Jassim," Local fractional series expansion method for solving Laplace and Schrodinger equations on cantor sets within local fractional operators", International Journal of Mathematics and Computer Research, 2(11) (2014), 736-744.