دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره چهلم، بهمن و اسفند ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

معادله کلاین گوردن در حضور پتانسیل متحرک

صابر زرین‌کمر [۱]، حسن حسن‌آبادی [۲*]، مهناز معظمی [۳]

[(۱)] گروه علوم پایه، واحد گرمسار، دانشگاه آزاد اسلامی، گرمسار، ایران
[(۲و۳)] دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۲/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۲۳

چکیده

مطالعه‌ی سیستم‌های کوانتومی که وابستگی به زمان دارند به دلیل کاربرد زیاد آن‌ها در فیزیک بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند و بسیاری از اثرات مکانیک کوانتومی جالب به این مفهوم مرتبط می‌شوند. در این مقاله به بررسی یک ذره‌ی نسبیتی در پتانسیل وابسته به زمان پرداخته می‌شود. برای مطالعه‌ی ذرات نسبیتی یکی از روش‌ها استفاده از معادلات کلاین-گوردن می‌باشد. یک رویکرد استاندارد تبدیل معادله‌ی کلاین گوردون با پتانسیل با دیواره‌های متحرک به یک معادله‌ی مشابه اما با دیواره‌های غیرمتحرک می‌باشد. بنابراین راه حل این مسأله‌ی وابسته به زمان را می‌توان با توجه به تبدیلات لورنتس که هموردا می‌باشند بدست آورد. سپس این ذره‌ی نسبیتی در مقابل سد پتانسیل که دیواره‌ی متحرک با سرعت v دارد درنظر گرفته می‌شود، با توجه به معادله‌ی کلاین گوردن مستقل از زمان بدست آمده و تابع موج پیشنهادی، تابع موج این سیستم کوانتومی وابسته به زمان بدست می‌آید. سپس به بررسی پایستگی چگالی جریان پرداخته و در سرعت‌های مختلف برای دیواره، پایستگی انرژی این سد پتانسیل با دیواره‌های متحرک برای ذره‌ی نسبیتی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادله‌ی کلاین-گوردون، پتانسیل متحرک، ذره‌ی نسبیتی، سد پتانسیل، پایستگی انرژی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: zarrinkamar.s@gmail.com

۱. مقدمه

در کتاب‌های مکانیک کوانتومی تحلیل و بحث درباره‌ی مدل‌های وابسته به زمان در مقایسه با مدل‌های ثابت و مستقل از زمان کمتر می‌باشد. بحث درباره‌ی مسائل وابسته به زمان بیشتر به صورت شماتیک بیان می‌شود نه صریح، از سوی دیگر تکنیک‌های تجربی پیشرفت بیشتری داشته‌اند، به عنوان مثال استفاده از پالس‌های لیزر فمتو ثانیه مشاهده‌ی پدیده‌های وابسته به زمان در سیستم‌های میکروسکوپیک را امکان‌پذیر می‌کند. اهمیت درک رفتار وابسته به زمان سیستم‌های کوانتومی در حال افزایش می‌باشد. بدست آوردن راه‌حل برای سیستم‌های وابسته به زمان به طور کلی در مقابل فرآیندهای ثابت سخت‌تر می‌باشد و استفاده از راه‌حل‌های تقریبی اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. اغلب برای بدست آوردن راه‌حل سیستم‌های وابسته به زمان با استفاده از روش‌های مختلف تلاش‌های زیادی صورت گرفته است [۱]، برخی از طرح‌های تقریبی مانند نظریه‌ی اختلال، تقریب بی‌دررو[۲]یا تقریب ناگهانی، انتگرال مسیر[۳] [۲,۳]، روش استاندارد جداسازی متغیرها[۴]، روش فوق سنگین[۴] [۵]می‌باشند. از این رو مطلوب است مثال‌ها و مدل‌هایی با راه‌حل‌های دقیق که بتوان آن‌ها را به شکل مدل‌های ساده بیان کرد را در نظر گرفت که با توجه به این مدل‌ها می‌توان درستی تقریب‌های مختلف را بررسی کرد. یکی از این مدل‌ها نوسانگر هماهنگ یک بعدی با بسامد وابسته به زمان می‌باشد، بعد از مقاله‌ی اصلی هوسیمی[۵] [۶]تعداد زیادی مقاله نوشته شده است [۱۱−۷]البته مراجع زیادی وجود دارد اما این مراجع بنیادی‌تر می‌باشند.دینامیکیک ذره‌ی کوانتومی در چاه بینهایت یک بعدی با دیواره‌های متحرک با رهیافت‌های گوناگونی مطالعه شده است. اولین مقاله‌ی موثق در مجموعه کارهای مرتبط با پتانسیل‌های وابسته به زمان به کار داشر[۶]و رایس[۷] [۱۲] در سال ۱۹۶۹باز می‌گرددکه درباره‌ی این مدل در میان کتاب‌های کوانتومی تنها در کتاب گریفیث [۱۳](هر چند به اختصار) بحث شده است. آن‌ها مسئله را توسط مجموعه‌ای کامل از توابع که پاسخ‌های دقیق معادله شرودینگر وابسته به زمان هستند، بررسی نمودند. کار آن‌ها به عنوان مرجعی برای روش‌های تقریبی [۱۴]و هم به عنوان یک مثال مقایسه‌ای برای سایر مطالعات دقیقیک منبع اصلی محسوب می‌شود [۱۶−۱۵]. برخی نیز علاقه‌مند به بررسی ذرات نسبیتی دیراک و کلاین-گوردن در پتانسیل‌های وابسته به زمان بوده‌اند [۱۷]. در اینجا به بررسی پتانسیل وابسته به زمان برای ذره‌ی غیرنسبیتی خواهیم پرداخت، فرض می‌کنیم که این سیستم وابسته به زمان یک سد پتانسیل با دیواره‌های متحرک باشد. بررسی سیستم‌های نسبیتیبا استفاده معادله‌ی کلاین-گوردن می‌باشد با توجه به اینکه معادله‌ی کلاین−گوردن حالت نسبیتی معادله شرودینگر است، برای توجیح ذرات با اسپین صفر به کار می‌رود. این معادله به اسم دو فیزیکدان به نام های اسکار کلاین[۸]و والتر گوردن[۹]نامگذاری شده است.

[۲] Adiabatic approximation
[۳] Path integral
[۴]the super symmetry method
[۵]Husimi
[۶]Doescher
[۷]Rice
[۸]Oskar Klein
[۹]Walter Gordon

۲. بررسی ذره‌ی نسبیتی کلاین-گوردن وابسته به زمان

معادله‌ی کلاین–گوردنبراییک ذره‌ی آزاد با اسپین صفر به صورت (۱.۲)می‌باشد.

$$\nabla^{۲}\psi-\frac{۱}{c^{۲}}\frac{\partial^{۲}}{\partial t^{۲}}\psi=\frac{m^{۲}c^{۲}}{\hbar^{۲}}\psi \qquad (۱.۲)$$

برای ذره با اسپین صفر، معادله‌ی کلاین گوردون با پتانسیل وابسته به زمان به صورت (۲.۲) ظاهر می‌شود[۱۷].

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}-V(x-vt)\right)^{۲}+\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}-m^{۲}\right]\psi=۰ \qquad (۲.۲)$$

هنگامی‌که v سرعت است، یک روش مناسب و استاندارد تبدیل معادله‌ی کلاین گوردون با پتانسیل وابسته به زمان به یک معادله‌ی مشابه اما با دیواره‌های غیرمتحرک می‌باشد. بنابراین راه حل این مسأله‌ی وابسته به زمان را می‌توان با توجه به تبدیلات لورنتس که هموردا هستند بدست آورد، از تبدیلات لورنتس به صورت زیر بهره خواهیم برد اگر

$$\tau=\lambda\left(t-vx\right) \qquad (۳.۲)$$

$$y=\lambda\left(x-vt\right) \qquad (۴.۲)$$

که در آن $\lambda=\frac{۱}{\sqrt{۱-v^{۲}}}$ می باشد. همچنین ψ به صورت (۵.۲)تعریف می‌شود.

$$\psi=e^{-iv\lambda\int ydyV\left(\frac{y}{\lambda}\right)}\bar{\psi} \qquad (۵.۲)$$

با استفاده از تبدیلات لورنتس روابط (۳.۲)،(۴.۲) و (۵.۲)با جایگذاری آن‌ها در رابطه‌ی (۲.۲)شکل جدیدی از معادله‌ی کلاین-گوردن با پتانسیل مستقل از زمان به صورت (۶.۲)می‌باشد .

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial\tau}-\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right)^{۲}+\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}-m^{۲}\right]\bar{\psi}=۰ \qquad (۶.۲)$$

حال به بررسی معادله‌ی پیوستگی پرداخته می‌شود اگر

$$\rho=\bar{\rho}+v\bar{J} \qquad (۷.۲)$$

$$J=\bar{J}+v\bar{\rho} \qquad (۸.۲)$$

باشد معادله‌ی پیوستگی در سیستم (x,t) به صورت $\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}J=۰$ می‌شود با جایگذاری تبدیلات پیمانه‌ای $\rho\to\bar{\rho}$ و $J\to\bar{J}$ معادله پیوستگی در سیستم (y,τ)به صورت (۹.۲) برقرار می‌باشد.

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\rho}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{J}=۰ \qquad (۹.۲)$$

این تبدیلات باید در معادله‌ی پیوستگی (x,t)جایگذاری شوند، بنابراین با در نظر گرفتن تبدیلات اعمال شده معادله پیوستگی در سیستم (y,τ) برقرار می‌شود. در معادله‌ی کلاین-گوردن برای چگالی جریان و چگالی بار در سیستم روابط (۱۰.۲) و (۱۱.۲)برقرار می‌باشند[۱۷].

$$\bar{J} = \bar{\psi}^* \frac{\partial}{\partial y}\bar{\psi} - \bar{\psi}\frac{\partial}{\partial y}\bar{\psi}^* \qquad (۱۰.۲)$$

$$\bar{\rho} = \bar{\psi}\frac{\partial}{\partial \tau}\bar{\psi}^* - \bar{\psi}^*\frac{\partial}{\partial \tau}\bar{\psi} - ۲i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\left|\bar{\psi}\right|^۲ \qquad (۱۱.۲)$$

۲-۱. بررسی ذره‌ی کلاین-گوردن در سد پتانسیل با دیواره‌ی متحرک

در این بخش ذره‌ی نسبیتی کلاین-گوردن را در سد پتانسیل متحرک مورد بررسی قرار می‌دهیم. در سیستم (y,τ) ابتدا باید جواب‌های معادله‌ی کلاین-گوردن بدست آورده شوند. برای حل معادله‌ی (۶.۲) به روش جداسازی متغیرها عمل می‌کنیم و با توجه به مرجع [۱۷] تابع موج به صورت (۱۲.۲) پیشنهاد می‌شود.

$$\bar{\psi} = e^{-i\varepsilon\tau}\eta(y) \qquad (۱۲.۲)$$

پتانسیل به صورت سد ظاهر می‌شود بنابراین باید به صورت معادله‌ی (۱۳.۲) در سد ناحیه در نظر گرفته شود.

$$V(y) = \begin{cases} ۰ & y \succ a \\ V_۰ & -a \le y \le a \\ ۰ & y \prec -a \end{cases} \qquad (۱۳.۲)$$

برای انجام محاسبات از معادله‌ی (۶.۲) استفاده می‌شود بنابراین

$$-\frac{\partial^۲\bar{\psi}}{\partial\tau^۲} - ۲i\lambda\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\tau}V\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \lambda^۲V^۲\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \frac{\partial^۲\bar{\psi}}{\partial y^۲} - m^۲\bar{\psi} = ۰ \qquad (۱۴.۲)$$

$\bar{\psi}$ رابطه‌ی (۱۲.۲) را در (۱۴.۲) جایگذاری می‌کنیم و رابطه‌ی (۱۵.۲) بدست می‌آید.

$$\left[\left(\varepsilon^۲ - ۲\varepsilon\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \lambda^۲V^۲\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right) - m^۲\right]\eta(y) + \frac{\partial^۲\eta(y)}{\partial y^۲} = ۰ \qquad (۱۵.۲)$$

جواب معادله در هر یک از ناحیه‌های سد پتانسیل به صورت مجزا محاسبه می‌شوند. در ناحیه‌ی اول سد پتانسیل برای $y \prec -a$ معادله‌ی (۱۶.۲) می‌شود.

$$if \quad y \prec -a \quad \to \mathrm{V}\left(\frac{y}{\lambda}\right) = ۰$$

$$\frac{\partial^۲\eta(y)}{\partial y^۲} + \left[\varepsilon^۲ - m^۲\right]\eta(y) = ۰ \qquad (۱۶.۲)$$

$$\frac{\partial^۲\eta(y)}{\partial y^۲} + p^۲\eta(y) = ۰ \qquad (۱۷.۲)$$

که در آن $p^2 = \left[\varepsilon^2 - m^2\right]$ می‌باشد. رابطه‌ی (۱۷.۲) معادله‌ی یک نوسانگر در ناحیه $y \prec -a$ می‌باشد که جواب این معادله به صورت (۱۸.۲) می‌باشد.

$$\eta_I(y) = Ae^{ipy} + Be^{-ipy} \qquad (۱۸.۲)$$

ضریب عبور ذره یک در نظر گرفته می‌شود، برای ناحیه‌ی دوم این سد پتانسیل معادله‌ی (۱۵.۲)به صورت (۱۹.۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$\left[\left(\varepsilon^{2}-2\varepsilon\lambda V_{0}+\lambda^{2}V_{0}^{2}\right)-m^{2}\right]\eta(y)+\frac{\partial^{2}\eta(y)}{\partial y^{2}}=0 \qquad (۱۹.۲)$$

زیرا $if \quad y \prec |a| \quad \to \mathrm{V}\left(\frac{y}{\lambda}\right)=V_{0}$

می‌باشد، (۱۹.۲) به صورت یک معادله‌ی نوسانگر هماهنگ در نظر گرفته می‌شود البته اگر $\lambda V_{0}=\lambda_{0}$ باشد، و اگر $\left(\varepsilon-\lambda_{0}\right)^{2}-m^{2}=q^{2}$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial^{2}\eta(y)}{\partial y^{2}}+q^{2}\eta(y)=0 \qquad (۲۰.۲)$$

با توجه به حل این معادله تابع موج در ناحیه‌ی دوم سد پتانسیل به صورت (۲۱.۲) بدست می‌آید.

$$\eta_{II}(y)=Ce^{qy}+De^{-qy} \qquad (۲۱.۲)$$

برای ذره‌ی کلاین-گوردن در ناحیه‌ی سوم سد پتانسیل مشابه ناحیه‌ی اول عمل می‌کنیم با این تفاوت که دیگر برگشت موج نداریم. بنابراین

$$if \quad y \succ a \quad \to \mathrm{V}\left(\frac{y}{\lambda}\right)=0$$

$$\eta_{III}(y)=Fe^{ipy} \qquad (۲۲.۲)$$

با جایگذاری (۲۰.۲)، (۲۱.۲) و (۲۲.۲) در رابطه‌ی $\overline{\psi}$، تابع موج در سه ناحیه‌ی سد به صورت زیر می‌شود.

$$\overline{\psi}_{I}=e^{-i\tau\varepsilon}\left(e^{ipy}+Be^{-ipy}\right)$$

$$\overline{\psi}_{II}=e^{-i\tau\varepsilon}\left(Ce^{qy}+De^{-qy}\right) \qquad (۲۳.۲)$$

$$\overline{\psi}_{III}=e^{-i\tau\varepsilon}\left(Fe^{ipy}\right)$$

حال باید شرایط مرزی را اعمال کنیم، $\overline{\psi}'=\frac{d\overline{\psi}}{dy}$ می‌باشد، بنابراین با استفاده از ضرایب پایستگی چگالی جریان که به صورت می‌باشد چگالی جریان (۲۴.۲) برای این تابع موج برقرار می‌باشد.

$$\frac{\hbar p}{m}\left[1-|B|^{2}\right]=\frac{\hbar q}{m}\left[|C|^{2}-|D|^{2}\right]=\frac{\hbar p}{m}\left[|F|^{2}\right] \qquad (۲۴.۲)$$

حال برای بررسی معادله‌ی پیوستگی (۹.۲) با استفاده از روابط (۷.۲)و (۸.۲)ابتدا ρ و Jدر هر ناحیه به صورت مجزا محاسبه می‌شود. در ناحیه‌ی اول $\overline{J}_{I}$ و $\overline{\rho}_{I}$به صورت (۲۵.۲) و (۲۶.۲)سپس J_{I} به صورت (۲۷.۲)محاسبه می‌شوند.

$$\overline{J}_{I}=\overline{\psi}_{I}^{*}\frac{\partial\overline{\psi}_{I}}{\partial y}-\overline{\psi}_{I}\frac{\partial\overline{\psi}_{I}^{*}}{\partial y}=2ip\left(1-B^{*}B\right) \qquad (۲۵.۲)$$

$$\bar{\rho}_I = \bar{\psi}_I \frac{\partial \bar{\psi}_I^*}{\partial \tau} - \bar{\psi}_I^* \frac{\partial \bar{\psi}_I}{\partial \tau} - ۲i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\left|\bar{\psi}_I\right|^۲$$
$$= ۲i\varepsilon\left(۱ + Be^{-۲ipy} + B^* e^{۲ipy} + B^* B\right) \qquad (۲۶.۲)$$
$$J_I = \bar{J}_I + v\bar{\rho}_I$$
$$= ۲ip\left(۱ - B^* B\right) + v۲i\varepsilon\left(۱ + Be^{-۲ipy} + B^* e^{۲ipy} + B^* B\right) \qquad (۲۷.۲)$$

در ناحیه‌ی دوم $\bar{J}_{II}$ ، $\bar{\rho}_{II}$ و J_{II} نیز به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\bar{J}_{II} = ۰ \qquad (۲۸.۲)$$
$$\bar{\rho}_{II} = \left(۲i\varepsilon - ۲i\lambda V\right)\left(CC^* e^{۲qy} + DD^* e^{-۲qy} + DC^* + CD^*\right) \qquad (۲۹.۲)$$
$$J_{II} = \bar{J}_{II} + v\bar{\rho}_{II}$$
$$= \left(۲i\varepsilon - ۲i\lambda V\right)\left(CC^* e^{۲qy} + DD^* e^{-۲qy} + DC^* + CD^*\right) \qquad (۳۰.۲)$$

و روابط (۳۱.۲)، (۳۲.۲) و (۳۳.۲) به ترتیب $\bar{J}_{III}$ ، $\bar{\rho}_{III}$ و J_{III} را در ناحیه‌ی سوم نشان می‌دهند.

$$\bar{J}_{III} = ۲ipF^* F \qquad (۳۱.۲)$$
$$\bar{\rho}_{III} = -۲i\varepsilon\left|F\right|^۲ \qquad (۳۲.۲)$$
$$J_{III} = \bar{J}_{III} + v\bar{\rho}_{III} = \left(۲ip - ۲i\varepsilon v\right)\left|F\right|^۲ \qquad (۳۳.۲)$$

حال نشان می‌دهیم که برای تابع موج ذره‌ی نسبیتی کلاین-گوردن در سد پتانسیل با مرزهای متحرک $R+T=1$ می‌باشد.

$$J_{tra} = J_{III}$$
$$J_I = J_{inc} - J_{ref} \qquad (۳۴.۲)$$

و تابع موج فرودی $\bar{\psi}_{inc}$ نیز به صورت

$$\bar{\psi}_{inc} = e^{-i\varepsilon\tau} e^{ipy} \qquad (۳۵.۲)$$

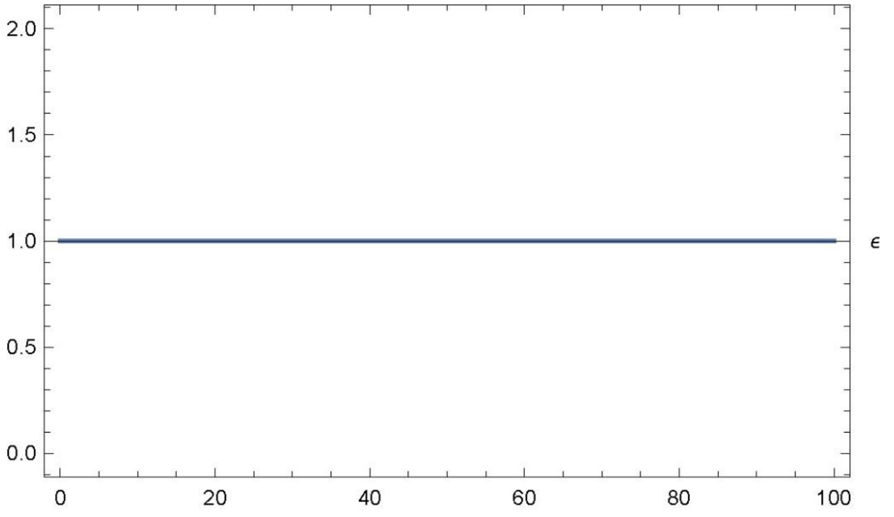
می‌باشد. حال با توجه به اینکه $R = \frac{J_{ref}}{J_{inc}}$ و $T = \frac{J_{tra}}{J_{inc}}$ می‌باشد و روابط $\bar{\rho}_{inc}$، $\bar{J}_{inc}$، J_{inc} و J_{ref} که به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند می‌توان $R+T=1$ را بدست آورد.

$$\bar{\rho}_{inc} = \bar{\psi}_{inc} \frac{\partial \bar{\psi}_{inc}^*}{\partial \tau} - \bar{\psi}_{inc}^* \frac{\partial \bar{\psi}_{inc}}{\partial \tau} = ۲i\left(\varepsilon - \lambda\right) \qquad (۳۶.۲)$$
$$\bar{J}_{inc} = \bar{\psi}_{inc}^* \frac{\partial \bar{\psi}_{inc}}{\partial y} - \bar{\psi}_{inc} \frac{\partial \bar{\psi}_{inc}^*}{\partial y} = ۲ip \qquad (۳۷.۲)$$
$$J_{inc} = \bar{J}_{inc} + v\bar{\rho}_{inc} = ۲i\left(p + v\varepsilon - v\lambda\right) \qquad (۳۸.۲)$$
$$J_{ref} = \bar{J}_{ref} + v\bar{\rho}_{ref}$$
$$= ۲i\left(v\lambda + p\left(B^* B\right) - \varepsilon v\left(Be^{-۲ipy} + B^* e^{۲ipy} + B^* B\right)\right) \qquad (۳۹.۲)$$

حال اگر $v=\cdot$ باشد و $p=\cdot$ و q حقیقی باشد، می‌توان نشان داد که $R+T=1$ برقرار است، اگر $v\neq\cdot$ در نظر گرفته شود $p=\cdot$ و q حقیقی باشد هم $R+T=1$ می‌باشد. اگر $v\neq\cdot$، $p=\cdot$ و q حقیقی نباشد $R+T=1$ بدست می‌آید.

۳. نتیجه گیری

در اینجا سد پتانسیلی را که دیواره‌ی متحرک دارد برای ذره‌ی نسبیتی کلاین-گوردون در نظر گرفتیم با بررسی‌های انجام شده مشاهده شد که با وجود حرکت همزمان ذره و دیواره‌های سد پتانسیل بقای انرژی برقرار می‌باشد همان‌طور که در نمودار (۱.۳) نیز قابل مشاهده می‌باشد (البته این نتیجه در صورتی صحت دارد که در سد پتانسیل $V_{\cdot}=۱$ باشد.)



نمودار (۱.۳) : نمودار $\left((R+T),\varepsilon\right)$ می‌باشد که بقای انرژی را برای ذره‌ی نسبیتی کلاین-گوردون در سد پتانسیل متحرک نشان می‌دهد.

فهرست منابع

[١] Melnichuk S. V, van Dijk W and Nogami Y,(٢٠٠٥)."Approximations of time-dependentphenomena in quantum Mechanics:adiabatic versus sudden processes", ***Eur. J. Phys***,٣, ٢٦ ,٥٤٣

[٢] Feynman. R. P, Hibbs, A. R and Styer, D. F. (٢٠١٠). “*Quantum mechanics and path integrals”,* Courier Corporation.

[٣] Chetouani. L, Guechi. L, and Hammann, T. F. (١٩٨٩).” Generalized canonical transformations and path integrals”, ***Phys. Rev. A,*** ٤٠ ,(٣), ١١٥٧.

[٤] Efthimiou. C. J. andSpector. D. (١٩٩٤). “Separation of variables and exactly soluble time-dependent
potentials in quantum mechanics”, ***Physical. Rev. A***, ٤٩(٤), ٢٣٠١.

[٥] Samsonov, B. F. (٢٠٠٠). “Coherent states for transparent potentials”. ***J. Phys. A: Math. Gen,*** ٣٣,(٣), ٥٩١.
[٦] Husimi .K (١٩٥٣),"Miscellanea in elementary quantum mechanics",***Prog. Theor. Phys***, ٤ , ٩ , ٣٨١-٤٠٢.

[٧] Gol’dman I.I, Krivchenkov V.D, Kogan V.I and Galitskii V.M. (١٩٦٠).Problems in QuantumMechanics (Academic, New York),٣٠٨.ed D TerHaar, chapter ٣, problem ١٤.

[٨] Dykhne. A. M. (١٩٦٠) ."Quantum transitions in the adiabatic approximation". ***Sov. Phys. JETP***, ١١, ٤١١.

[٩] Popov. V. S and Perelomov. A. M.(١٩٦٩)."Parametric excitation of a quantum oscillator"**,** ***Sov. Phys. JETP,*** ٤, ٢٩ , ٧٣٨-٧٤٥.

[١٠] Lewis. Jr, Ralph. H and Riesenfeld. WB. (١٩٦٩)."An exact quantum theory of the time-dependent harmonic

oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field", ***J. Math. Phys***. ٨, ١٠, ١٤٥٨ –١٤٧٣.

[١١] Khandekar. D.C and Lawande.S.V (١٩٨٦)."Feynman path integrals: some exact results and applications”,***Phys. Rep***.٢-٣, ١٣٧, ١١٥-٢٢٩

[١٢] Doescher. S. W and Rice. M.H. (١٩٦٩)."Infinite square-well potential with a moving wall”,***Am.J. Phys*** .١٢, ٣٧,١٢٤٦-١٢٤٩.

[١٣] Griffiths. D. J. (١٩٩٥)." Introduction to Quantum Mechanics" ,{\bf Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall}, chapter ١٠, problem ١٠,١.

[١٤]D. N. Pinder. (١٩٩٠)."The contracting square quantum well", ***Am. J. Phys.*** ١, ٥٨, ٥٤-٥٨.

[١٥]Dembinski.S.T, Makowski.A.J and Peplowski. P.(١٩٩٥)."Asymptotic behaviour of a particle in a uniformly expanding potential well" ,***J. Phys. A: Math. Gen***, ٥, ٢٨, ١٤٤٩.

[۱٦] Da Luz. MGE and Cheng. Bin Kang.(۱۹۹۲)."Exact propagators for moving hard-wall potentials" ***J. Phys. A: Math. Gen***.۱۷،۲٥ ,۱۰٤۳.

[۱۷]Hamil. B. and L. Chetouni. (۲۰۱٦)."Moving potential for Dirac and Klein-Gordon equations.", ***Pramana***, ۸٦, (٤), ۷۳۷-۷٤٦.