دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

$*$-σ-دواشتقاق‌ها روی $*$-حلقه‌ها

طیبه لعل شاطری[*]

استادیار، گروه ریاضی محض (آنالیز)، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۹/۱۰.   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۱۱

چکیده

برشار در ۱۹۹۳ نشان داد هر دو اشتقاق روی یک حلقه اول ناجابجایی مضربی از یک جابجاگراست. نتیجه مستقیم آن شناسایی نگاشت‌های جمعی جابجاگر روی حلقه‌های اول است زیرا از هر نگاشت جمعی جابجاگر می‌توان یک دو اشتقاق به دست آورد. سپس در ۱۹۹۵، دو اشتقاق و σ —دواشتقاق را روی یک حلقه اول بررسی و نتایج اشتقاق‌ها را در باره آنها تعمیم داد. هم چنین علی در ۲۰۱۲، $*$ —اشتقاق‌ها را روی یک $*$ —حلقه نیمه اول مطالعه کرد و نشان داد $*$ —اشتقاق‌ها به مرکز حلقه تصویر می‌شوند.

در این مقاله، $*$ —دو اشتقاق و $*$— σ—دواشتقاق را روی یک $*$ —حلقه معرفی می‌کنیم. سپس بعضی نتایج به دست آمده توسط برشار و علی را برای این نگاشت‌ها روی یک دسته از $*$ —حلقه‌ها تعمیم می‌دهیم، درواقع $*$— σ—دواشتقاق را روی یک $*$ —حلقه اول شناسایی کرده و نشان می‌دهیم هر$*$ —دواشتقاق روی یک $*$ —حلقه نیمه اول به مرکز حلقه تصویر می‌شود.

واژه‌های کلیدی: حلقه اول، حلقه نیمه اول،$*$ —حلقه، $*$ —دواشتقاق، $*$— σ—دواشتقاق.

[*]. عهده‌دار مکاتبات: Email: t.shateri@hsu.ac.ir

۱. مقدمه

در سرتاسر مقاله، R یک حلقه شرکت‌پذیر با مرکز $\mathrm{Z(R)}$ و برای هر $\mathrm{x,y \in R}$ ، $[\mathrm{x,y}]$ جابجاگر $\mathrm{xy-yx}$ را نشان خواهند داد. یادآوری می‌کنیم حلقه R اول است هرگاه به ازای هر $\mathrm{x,y \in R}$ ، $\mathrm{xRy=\{0\}}$، $\mathrm{x=0}$ یا $\mathrm{y=0}$ را نتیجه دهد. هم‌چنین R نیمه اول است هرگاه $\mathrm{xRy=\{0\}}$، $\mathrm{x=0}$ را ایجاب کند. نگاشت جمعی $\mathrm{x \mapsto x*}$ روی R یک برگشت نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\mathrm{x,y \in R}$ داشته باشیم $\mathrm{(x*)*=x}$ و $\mathrm{(xy)^*=y^*x^*}$. حلقه R همراه با یک برگشت یک $*-$ حلقه نامیده می‌شود.

فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از R باشد. نگاشت $\mathrm{f:S \to R}$ مرکزساز نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\mathrm{x \in S}$،

$$[\mathrm{f(x),x}] \in \mathrm{Z(R)}$$

نگاشت‌های مرکزساز توسط پاسنر [۳] مورد بررسی قرار گرفت، او ثابت کرد وجود یک اشتقاق غیرصفر مرکزساز یک حلقه اولیه، جابجایی بودن R را نتیجه می‌دهد. ریاضی‌دانان متعددی [۴،۵،۶،۷،۸] قضیه پاسنر را به روش‌های مختلفی توسیع دادند. به‌عنوان مثال نشان دادند که اشتقاق‌های غیرصفر نمی‌توانند روی زیر مجموعه‌های مختلفی از حلقه‌های اولیه ناجابجایی مرکزساز شوند.

نگاشت دوجمعی $\mathrm{D:R \times R \to R}$ دواشتقاق نامیده می‌شود هرگاه در هر مؤلفهٔ یک اشتقاق باشد یعنی به ازای $\mathrm{x \in R}$، نگاشت‌های $\mathrm{y \mapsto D(x,y)}$ و $\mathrm{y \mapsto D(y,x)}$ اشتقاق‌هایی از R باشند.

فرض کنید σ یک خودریختی از R باشد، نگاشت جمعی $\mathrm{d:R \to R}$ یک $\sigma-$ اشتقاق نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\mathrm{x,y \in R}$ ،

$$\mathrm{d(xy)=d(x)y+\sigma(x)d(y).}$$

نگاشت دوجمعی $\mathrm{D:R \times R \to R}$ یک $\sigma-$ دواشتقاق گفته می‌شود هرگاه برای هر $\mathrm{x \in R}$، نگاشت‌های $\mathrm{y \mapsto D(x,y)}$ و $\mathrm{y \mapsto D(y,x)}$ ، $\sigma-$اشتقاق‌هایی از R باشند.

فرض کنید R یک $*-$ حلقه باشد. نگاشت جمعی $\mathrm{d:R \to R}$ یک $*-$اشتقاق است هرگاه برای هر $\mathrm{x,y \in R}$،

$$\mathrm{d(x,y)=d(x)}y^*\mathrm{+xd(y).}$$

برشار[1] در [۱] ، $\sigma-$ دواشتقاق‌ها را بررسی و دواشتقاق‌ها را روی یک حلقه تعمیم داد.

در ادامه $*-$دواشتقاق‌ها و $*-\sigma-$ دواشتقاق‌ها را معرفی و نتایج ارائه شده توسط برشار را برای $*-\sigma-$ دواشتقاق‌ها تعمیم می‌دهیم. هم‌چنین با استفاده از [۲]، نتایجی را برای $*-$ اشتقاق‌ها روی $*-$ حلقه‌های نیمه اول ارائه می‌دهیم.

۲. $*-\sigma-$ دواشتقاق‌ها

در این بخش $*-$ دواشتقاق و $*-\sigma-$ دواشتقاق را معرفی و احکامی را در باره آن‌ها ثابت می‌کنیم.

تعریف. فرض کنید R یک $*-$ حلقه باشد. نگاشت دوجمعی $\mathrm{\Delta:R \times R \to R}$ را یک $*-$ اشتقاق گوییم. هرگاه Δ یک $*-$ اشتقاق در هر مؤلفه باشد.

اگر σ یک خودریختی از R باشد. نگاشت دوجمعی $\mathrm{\Delta:R \times R \to R}$ را یک $*-\sigma-$دواشتقاق گوییم. هرگاه یک $*-\sigma-$ اشتقاق در هر مؤلفه باشد یعنی برای هر $\mathrm{x,y \in R}$ شرایط زیر برقرار باشند:

$$\mathrm{\Delta(xz,y)=\Delta(x,y)}z^*\mathrm{+\sigma(x)\Delta(z,y),}$$
$$\mathrm{\Delta(y,xz)=\Delta(y,x)}z^*\mathrm{+\sigma(x)\Delta(y,z).}$$

هم‌چنین Δ یک $*-$ دواشتقاق معکوس نامیده می‌شود هرگاه

$$\mathrm{\Delta(xz,y)=\Delta(z,y)}x^*\mathrm{+z\Delta(z,y),}$$
$$\mathrm{\Delta(y,xz)=\Delta(y,z)}x^*\mathrm{+z(\Delta(y,x).}$$

در ادامه $\mathrm{Q_r}$ حلقه مارتین دیل[2] راست شامل خارج قسمت‌های R را نشان می‌دهد. این حلقه توسط مارتیل دیل در [۹] معرفی شد که با خواص زیر شناخته می‌شود:

۱) $\mathrm{R \subseteq Q_r}$.

۲) برای هر $\mathrm{q \in Q_r}$ یک ایده‌آل غیرصفر I از R وجود

1. Brešar
2. Martindale

دارد به‌طوری که $qI \subseteq R$.

۳) اگر $q \in Q_r$ و I یک ایده‌آل غیرصفر از R باشد به‌طوری که $qI = 0$ آنگاه $q = 0$.

۴) اگر I ایده‌آلی از R و $K: I \to R$ یک نگاشت $R-$ مدول راست باشد، آنگاه $q \in Q_r$ وجود دارد به‌طوری که به ازای هر $x \in I$ ، $k(x) = qx$.

خواننده می‌تواند جزئیات بیشتر را در [۱۰، گزاره ۲ ـ ۱۰] ملاحظه کند.

مرکز Q_r با C نشان داده می‌شود. یک زیرحلقه از Q_r، $Q_s = \{q \in Q_r: Iq \subseteq R$ و R به ازای ایده‌آل I از$\}$ است که حلقه مارتین دیل متقارن نامیده می‌شود.

لم زیر برای اثبات قضیه‌ها نیاز داریم.

لم ۲. ۱. [۲، لم ۲. ۲] فرض کنید M یک مجموعه باشد. نگاشت‌های $F, G: M \to Q_s$ را در نظر بگیرید به‌طوری که برای هر $s, t \in M$ و هر x در ایده‌آل غیرصفر I از R، اگر $F \neq 0$ ، آنگاه $\lambda \in \acute{C}$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $s \in M$ ، $G(s) = \lambda F(s)$.

در لم زیر یک رابطه اساسی برای $*-\sigma$–دواشتقاق‌ها ارائه می‌دهیم.

لم ۲. ۲. فرض کنید R یک $*-$ حلقه و $\Delta: R \times R \to R$ یک $*-\sigma-$دواشتقاق باشد. در این صورت برای هر $z, u, v \in R$

$$\Delta(x, y)z^*[u^*, v^*] = [\sigma(x), \sigma(y)]\sigma(z)\Delta(u, v).$$

اثبات: چون Δ یک $*-\sigma-$ دواشتقاق است داریم:

$$\begin{aligned}\Delta(xu, yv) &= \Delta(x, yv)u^*r + \sigma(x)\Delta(u, yv)\\ &= \Delta(x, y)v^*u^* + \sigma(y)\Delta(x, v)u^*\\ &+\sigma(x)\Delta(u, y)v^* + \sigma(x)\sigma(y)\Delta(u, v)\end{aligned} \tag{2.1}$$

و

$$\begin{aligned}\Delta(xu, yv) &= \Delta(xu, y)v^* + \sigma(y)\Delta(xu, v)\\ &= \Delta(x, y)u^*v^* + \sigma(x)\Delta(u, y)v^*\\ &+\sigma(y)\Delta(x, v)u^* + \sigma(y)\sigma(x)\Delta(u, v)\end{aligned} \tag{2.2}$$

از مقایسه (۱. ۲) و (۲. ۲) نتیجه می‌شود

$$\Delta(x, y)[u^*, v^*] = [\sigma(x), \sigma(y)]\Delta(u, v).$$

چون

$$\begin{aligned}[\sigma(xz), \sigma(y)] &= [\sigma(x), \sigma(z), \sigma(y)]\\ &=([\sigma(x), \sigma(y)], \sigma(z) +\\ &[\sigma(z), \sigma(y)])\Delta(u, v)\end{aligned} \tag{2.3}$$

بنابراین

$$\Delta(x, y)z^*[u^*, v^*] = [\sigma(x), \sigma(y)]\sigma(z)\Delta(u, v)$$

این ادعا را ثابت می‌کند.

تذکر ۲. ۳. توجه کنید اگر $\Delta: R \times R \to R$ یک $*-$ دواشتقاق معکوس باشد، آنگاه همان نتیجه لم ۲. ۲ را به دست خواهیم آورد. اگر σ نگاشت همانی باشد، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۲. ۴. فرض کنید R یک $*-$ حلقه و S یک زیرحلقه از R باشد. اگر $\Delta: R \times R \to R$ یک $*-$ دواشتقاق باشد آنگاه برای هر $u, v \in R$ ، x, y, z

$$\Delta(x, y)z^*[u^*, v^*] = [x, y]z\Delta(u, v).$$

یک خودریختی مانند σ از یک حلقه اول R، $*-X-$ درونی نامیده می‌شود، هرگاه عنصر معکوس‌پذیر $a \in Q_s$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in R$ ، $a(x) = a^{-1}x^*a$.

لم زیر را برای اثبات قضیه بعد نیاز داریم.

لم ۲. ۵. فرض کنید σ یک $*-$پاد خودریختی از $*-$ حلقه اول R باشد. اگر عناصر غیرصفر $a, b, c, d \in Q_r$ موجود باشد به‌طوری که برای $r \in R$ ، $ar^*b = c\sigma(r)d$ ، آنگاه σ ، $*-X-$ درونی است.

اثبات: فرض کنید I یک ایده‌آل غیرصفر از R باشد به‌طوری که $Ia, Ic \subseteq R$ ، قرار می‌دهیم $A = IaR$ و $B = IcR$. در این صورت A و B ایده‌آل‌های ناصفری از R هستند. $F: A \to B$ و $g: B \to A$ را با ضابطه‌های

$$f(\textstyle\sum_i x_i a y_i) = \sum_i x_i c\sigma(y_i^*),$$
$$g(\textstyle\sum_i x_i c y_i) = \sum_i x_i a\sigma^{-1}(y_i^*),$$

تعریف می‌کنیم که در آن $x_i \in I$ ، $y_i \in R$. در این صورت f خوش تعریف است زیرا اگر $\sum_i x_i a y_i = 0$، آنگاه برای هر $r \in R$ ، $ar^*b = c\sigma(r)d$ نتیجه می‌دهد

$$0 = (\sum_i x_i a y_i) r^* b = \sum_i x_i c\sigma(r y_i^*) b$$
$$= (\sum_i x_i c\sigma(y_i^*))\sigma(r)d.$$

چون R اول است و $d \neq 0$ ، لذا $\sum_i x_i c\sigma(y_i^*) = 0$. به‌طور مشابه g نیز خوش تعریف است. چون f و g همریختی R- مدولی چپ هستند. $q, q' \in Q$ وجود دارند به‌طوری که به ترتیب f و g را نمایش می‌دهند، یعنی $f(x) = xq$ و $g(y) = yq'$ که $x \in A$ و $x \in A$. به علاوه $fg = 1$ روی A و روی B، $gf = 1$، بنابراین $q' = q^{-1}$. حال برای هر $x \in I$ داریم $(xq)q = f(xa) = xc$ لذا $I(aq - c) = 0$ بنابراین $aq = c$. به‌طور مشابه برای هر $x \in I$ و $y, r \in R$ داریم:

$$(xcy)q^{-1}r^*q = \left(xa\sigma^{-1}(y^*)\right)r^*q$$
$$= \left(xa(\sigma^{-1}(y^*)r^*)\right)q$$
$$= zc\sigma((\sigma^{-1}(y^*)r^*)^*)$$
$$= xc\sigma\left(r(\sigma^{-1}(y^*)r^*)\right)$$
$$= zc\sigma\left(\sigma^{-1}(y)\right)\sigma(r) = (xcy)\sigma(r).$$

بنابراین $B = (q^{-1}r^*q - \sigma(r)) = 0$ و $\sigma(r) = r^*q^{-1}q$ و این نتیجه می‌دهد $q \in Q_s$، چون $Iq \subseteq R$ لذا $q\sigma(I) \subseteq R$.
همچنین

$$qrb = c\sigma(r^*)d = \sigma q q^{-1} r q d = ar(qd),$$

بنابراین $aR(b - qd) = 0$، لذا $b = qd$.
توجه کنید لم ۵. ۲ بازسازی از [۱۰، لم ۱. ۱۲] برای $*-X-$پادخودریختی درونی است.

قضیهٔ ۶. ۲. فرض کنید R یک $*-$حلقه اول ناجابجایی و $\Delta: R \times R \to R$ یک $*-\sigma-$دواشتقاق (یا $*-\sigma-$دواشتقاق معکوس) ناصفر باشد به‌طوری که σ یک $*-$پادخودریختی است. در این صورت σ ، $*-X-$درونی است و عنصر معکوس‌پذیر $a \in Q_s$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x, y \in R$ ،

$$\sigma(x) = a^{-1}x^*a \quad , \quad \Delta(x,y) = a[x^*, y^*]$$

اثبات: بنا به لم ۲. ۲ داریم:

$$\Delta(x,y)z^*[u^*,v^*]$$
$$= [\sigma(x),\sigma(y)]\sigma(z)\Delta(u,v),$$

از آنجایی که R ناجابجایی است و $\Delta \neq 0$، لذا $x_0, y_0, u_0, v_0 \in R$ وجود دارند به‌طوری که $c = [\sigma(x_0),\sigma(y_0)] \neq 0$ و $d = \Delta(u_0,v_0) \neq 0$ و $b = [u_0^*, v_0^*] \neq 0$ و $a = \Delta[x_0,y_0] \neq 0$.
بنابراین $ar^*b = c\sigma(r)d$ و بنا به لم ۵. ۲ ، σ ، $*-X-$ درونی است، یعنی $q \in Q_s$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x \in Q_s$ ، $\sigma(x) = q^{-1}r^*q$.
بنابراین

$$\Delta(x,y)z^*[u^*,v^*]$$
$$= q^{-1}[x^*,y^*]z^*q\Delta(u,v)$$

و با ضرب کردن در q به دست می‌آوریم:

$$q\Delta(x,y)z^*[u^*,v^*]$$
$$= [u^*,v^*]z^*q\Delta(u,v).$$

فرض کنید $M = R \times R$ و نگاشت $F, G: M \to Q_r$ را به صورت $F(x,y) = [x^*, y^*]$ و $G(x,y) = q\Delta(x,y)$ تعریف کنید. در این صورت F و G در شرایط لم ۱. ۲ صدق می‌کنند، لذا $\lambda \in \not{C}$ وجود دارد به‌طوری که $G(x,y) = \lambda F(x,y)$. بنابراین

$$[x^*, y^*]\ \Delta(x,y) = \lambda q^{-1}[x^*, y^*] = a$$

که $a = \lambda q^{-1}$. چون $\Delta \neq 0$ ، لذا $0 \neq a$ معکوس‌پذیر است و $\sigma(x) = a^{-1}x^*a$. این برهان را کامل می‌کند.
نتیجه زیر را برای نگاشت‌های جمعی به دست می‌آوریم.

نتیجه ۷. ۲. فرض کنید R یک $*-$حلقه اول و $f: R \to R$ نگاشت جمعی ناصفر باشد. اگر σ یک $*-$پادریختی از R باشد به‌طوری که

$$f(x)x^* = \sigma(x)f(x) \qquad (x \in R), \qquad (2.4)$$

در این صورت عنصر معکوس‌پذیر $a \in Q_s$ و نگاشت

جمعی $g: R \to C$ وجود دارند به‌طوری‌که $\sigma(x) = ax^*a^{-1}$ و f به صورت $f(x) = ax^* + g(x)a$ و یا به صورت $f(x) = g(x)a$ است.

اثبات: ابتدا فرض کنید R جابجایی است. کافی است نشان دهیم σ نگاشت همانی روی R است. چون برای $x \in R$ ، $f(x)(x^* - \sigma(x)) = 0$، یا $f(x) = 0$ و یا $\sigma(x) = x^*$. در این صورت R اجتماعی از زیرگروه‌های جمعی $\{x \in R: f(x) = 0\}$ و $\{x \in R: x^* = \sigma(x)\}$ است. اما یک گروه نمی‌تواند اجتماعی از دو زیرگروه سره خود باشد و چون $f \neq 0$، بنابراین برای هر $x \in R$ ، $\sigma(x) = x^*$حال فرض کنید R ناجابجایی است. بنابه (۴. ۲) داریم:

$$f(x)y^* - \sigma(y)f(x) = \sigma(x)f(y) - f(y)x^*$$

و لذا $\psi(x) = a^{-1}f(x) - x^* \in C$. و در این صورت $f(x) = ax^* - \psi(x)a$ کافی است حالت $\Delta = 0$ را درنظر بگیریم، یعنی $f(x)y^* = \sigma(y)f(x)$ بنا به لم ۵. ۲، به ازای عنصر معکوس‌پذیر $a \in Q_s$ داریم: $\sigma(x) = a^{-1}x^*a$. بنابراین $f(x)y = a^{-1}yaf(x)$ یعنی $f(x) = a^{-1}\psi(x)$ و این اثبات را کامل می‌کند.

در ادامه $*$ —دواشتقاق‌ها را روی $*$ — حلقه‌های اول شناسایی می‌کنیم.

گزاره ۸. ۲. فرض کنید I یک ایده‌آل از $*$ — حلقه اول ناجابجایی R و $d: I \times I \to Q_r$ یک $*$ —دواشتقاق باشد. در این صورت $\lambda \in \mathcal{C}$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x, y \in I$ ،

$$d(x, y) = \lambda[x^*, y^*].$$

اثبات: کافی است فرض کنیم $I \neq 0$. I ناجابجایی است بنابراین نگاشت $F: I \times I \to Q_r$ با ضابطهٔ $F(x, y) = [x^*, y^*]$ ناصفر است. لذا بنا به نتیجه ۴. ۲ ، نگاشت‌های $F, d: I \times I \to Q_r$ در شرایط لم ۲. ۱ صدق می‌کنند. بنابراین $\lambda \in C$ وجود دارد به‌طوری که $d(x, y) = \lambda F(x, y) = \lambda[x^*, y^*]$.

فرض کنید $D: R \times R \to R$ یک $*$ —دواشتقاق باشد. می‌دانیم برای هر $x \in R$ ، $D(0, x), D(x, 0)$ $*$ —اشتقاق هستند. بنابراین نتایج زیر از [۱، قضیه ۱. ۲] به دست می‌آیند.

نتیجه ۹. ۲. فرض کنید R $*$ — حلقه نیمه اول باشد. اگر $D: R \times R \to R$ یک $*$ — دواشتقاق باشد، آنگاه D ، $R \times R$ را به $Z(R)$ تصویر می‌کند.

نتیجهٔ ۱۰. ۲. فرض کنید R یک $*$ — حلقه اول باشد. اگر $D: R \times R \to R$ یک $*$ — دواشتقاق باشد، آنگاه یا D=0 و یا R جابجایی است.

مثال زیر نشان می‌دهد که اول بودن R در نتیجه ۲. ۱۰ الزامی است.

مثال ۲. ۱۱. فرض کنید S یک حلقه جابجایی باشد و

$$R = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in S\right\}$$

تعریف می‌کنیم $D: R \times R \to R$

$$D\left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1, b_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0 & c & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در این صورت می‌توان نوشت D در شرایط نتیجه ۱۰ . ۲ صدق می‌کند، اما نه D=0 و نه R جابجایی است.

۳. نتیجه‌گیری

در $*$ — حلقه اول ناجابجایی هر $*$ —دو اشتقاق مضربی از یک جابجاگر است. در $*$ — حلقه نیمه اول، $*$ — دو اشتقاق‌ها به مرکز حلقه تصویر می‌شوند، همچنین در حلقه‌های اول غیرجابجایی تنها $*$ — دو اشتقاق، اشتقاق صفر است.

فهرست منابع

[1] M. Brešar, On generalized biderivations and related maps, J. Algebra, 172: 765-786 (1995)

[2] S. Ali, On generalized ∗-derivations in *-rings, palestine J. Math.,1: 32-37 (2012)

[3] E. C. Posner, Derivations in primen rinegs, Proc. Amer. Math. Soc. 8: 1093-1100 (1957)

[4] M. Brešar, Centralizing mappings and derivations in prime rings, J. Algrbra 156: 385-394 (1993)

[5] C. Lanski, Differential identities, Lie ideals, and Posner's theorems, Pacific J. Math. 134: 275-297(1988)

[6] H. E. Bell and W. S. Martindale III, Centralizing mappings of seniprime rings. Canad. Math Bull., 30(1): 92-101 (1987)

[7] L. Oukhtite,. An extension of Posner's second theorem to rings with involution, Int. J. Modern Math., 4: 303-308 (2009)

[8] L. Oukhtite and L. Taoufiq, Some properties of derivations on rings with involution, Int. J. Modern Math., 4: 309-315 (2009)

[9] W. S. Martindale, prime rings satis fying a generalized polynomial identity, J. Aalgebra, 12: 576-589 (1969)

[10] D. Passman, Infinite crossed products, Academic press, san Diego, (1989)