دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره نوزدهم، مرداد و شهریور ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مساله‌ی جهت‌یابی با سودهای متغیر و تابع هدف کسری و تقاضا روی کمان

سید مصطفی خرمی‌زاده[۱*]، داریوش اسفندیاران نسب[۲]

(۱) استادیار، گروه ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۲/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۰/۱۶

چکیده

امروزه به دلیل توقع بالای مشتریان در برآورده کردن تقاضایشان و فضای رقابت در میان ارایه دهندگان خدمات، کارفرمایان در تلاشند تا با ارایه روش‌های جدید تقاضای مشتریان را در کوتاه‌ترین زمان و به بهترین شکل ممکن برآورده کنند تا رضایت مشتریان را جلب و بیشترین سود ممکن را نیز جمع‌آوری کنند. در این مقاله مساله‌ی جهت‌یابی با سودهای متغیر با تابع هدف کسری مورد مطالعه قرار می‌گیرد و سپس یک مدل برنامه‌ریزی صحیح برای حل آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مساله هدف تعیین یک مسیر برای وسیله‌ی نقلیه است به گونه‌ای که سود جمع‌آوری شده را بیشینه کند، شروع و پایان حرکتش در مبدا باشد، مشتریان دارای تقاضا را سرویس‌دهی کند و از مدت زمان در نظر گرفته شده برای سفر تجاوز نکند. در مساله‌ی جهت‌یابی با سودهای متغیر با تابع هدف کسری مشتریان در راس‌های گراف متناظر با مساله قرار دارند. در ادامه حالتی از مساله مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن سرویس‌دهی در کمان انجام می‌پذیرد. مساله حاصل را مساله‌ی جهت‌یابی کمان با سودهای متغیر با تابع هدف کسری می‌نامیم. در ادامه مساله را به روش دوبخشی حل می‌کنیم. در پایان مدل ارایه شده برای حل مساله را روی دسته‌ای از نمونه‌های تصادفی پیاده‌سازی کرده و با ارایه نتایج عددی کارایی روش را مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد. خواهیم دید که الگوریتم‌های پیشنهادی قادرند مسایل را در مدت زمان معقولی حل کنند. همچنین خواهیم دید که مدت زمان حل مسایل وابسته به ساختار گراف آن‌ها می‌باشد و به بزرگی مسایل وابسته نیستند. همچنین خواهیم دید که جواب‌های بدست آمده برای مساله بهینه هستند.

واژه‌های کلیدی: مساله جهت‌یابی، مسیریابی کمان، شاخه و برش، روش دوبخشی، تابع هدف کسری.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: m.khorrami@sutech.ac.ir

۱- مقدمه

مباحث مربوط به حمل و نقل یکی از موضوعات چالش برانگیز در حوزه تحقیق در عملیات است. موسسات و شرکت‌های حمل و نقل اغلب هزینه‌های زیادی را صرف فعالیت‌های حمل و نقل می‌کنند. بخش حمل و نقل در سیستم‌های اقتصادی اعم از تولیدی و خدماتی از چنان جایگاه ویژه‌ای برخوردار است که بخش قابل توجهی از درآمد ملی هر کشور را به خود اختصاص می‌دهد. یکی از مباحث حمل و نقل که در دهه‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است، مساله مسیریابی است. مساله مسیریابی به طور کلی به دو دسته مساله مسیریابی گره و مساله مسیریابی کمان تقسیم می‌شود. در دسته ی اول گره ها تقاضای سرویس دارند و در دسته‌ی دوم یال‌ها یا کمان‌ها تقاضای سرویس دارند. مساله جهت یابی یک مساله مسیریابی است که در آن هدف تعیین یک زیرمجموعه از گره‌هاست که باید ملاقات شوند، به طوری که مقدار سود جمع آوری شده بیشینه شود و از حد زمان در نظر گرفته شده برای سفر تجاوز نشود. از اهداف مساله جهت‌یابی بیشینه کردن سود، مدیریت زمان، برآورده کردن تقاضای مشتریان و افزایش سطح کیفیت سرویس‌دهی را می‌توان نام برد .پژوهشگران سعی نموده‌اند که با در نظر گرفتن بعضی از شرایط و محدودیت‌های موجود در کاربردهای واقعی، مدل‌ها و روش‌های حل متنوعی برای حل این دسته از مسایل ارایه دهند. در مساله جهت‌یابی تعدادی گره که هر کدام امتیاز مشخصی دارند در نظر گرفته شده است و کل مسافت بازدید از گره‌ها محدود و مشخص است. گره ابتدایی، انتهایی و مسافت بین گره‌های مختلف مشخص هستند. هدف مساله یافتن مسیری بین گره‌های موجود به شیوه‌ای است که مجموع امتیاز حاصل از بازدید گره‌های منتخب بیشینه شود. در واقع اگر کل مسافت بازدید از گره‌ها محدود و مشخص نبوده و گره ابتدایی و انتهایی مسیر نیز مشخص نباشد، مساله جهت یابی به مساله فروشنده دوره‌گرد تبدیل می‌شود.

۲- پیشینه تحقیق

مساله جهت یابی اولین بار در سال ۱۹۸۷ توسط گلدن[۱] و همکاران معرفی شد[۱]. این مساله ترکیبی از انتخاب راس و تعیین کوتاه‌ترین مسیر بین راس‌های انتخاب شده است. هدف بیشینه کردن سود کل جمع‌آوری شده از راس‌های انتخاب شده است. در این مساله به دلیل محدودیت زمانی همه‌ی راس‌ها نمی‌توانند ملاقات شوند، بنابراین می‌توان گفت که مساله جهت‌یابی ترکیبی از دو مساله ترکیبی کلاسیک کوله‌پشتی و فروشنده دوره‌گرد است[۲]. مساله جهت‌یابی گروهی یک مساله جهت‌یابی است که در آن هدف تعیین p مسیر است که به وسیله حد زمانی $T_{\max}$ محدود شده است و سود جمع‌آوری شده کل را بیشینه می‌کند .مساله جهت‌یابی گروهی برگرفته از یک بازی است که در آن تیم‌های چندنفره جهت یابی را انجام می‌دهند و در محدوده زمانی مشخصی امتیاز جمع‌آوری می‌کنند. این مساله برای اولین بار در سال ۱۹۹۶ توسط چاوو[۲] و همکاران با تعمیم مساله جهت‌یابی به حالت چند مسیری معرفی شد[۳]. تینگ[۳] و میلر هوکز کاربردی از مساله جهت‌یابی گروهی را برای تکنیسین‌های مسیریابی به منظور سرویس‌دهی به مشتریان شرح دادند[۴][۴]. کانتور[۵] و روزنواین در سال ۱۹۹۲ برای اولین بار مساله جهت‌یابی با پنجره زمانی را مورد بررسی قرار دادند[۶][۵]. در این مساله سرویس‌دهی به هر راس خاص در یک پنجره زمانی از پیش تعیین شده شروع می‌شود. هر راس با یک پنجره زمانی $\left[O_i, C_i\right]$ تعیین می‌شود و ملاقات هر راس فقط می‌تواند در این پنجره زمانی شروع شود. برای ورود اولیه به هر راس خاص مدت زمانی منتظر بمانیم، در حالی که ورود با تاخیر ممکن است منجر شود به اینکه مساله ناشدنی شود. در مساله جهت‌یابی با پنجره زمانی فرض شده است که تعداد مسیرها یک است. در بسیاری از کاربردهای واقعی زمان پیمایش یک مسیر به خواص شبکه بستگی دارد، که ممکن است بر مدت زمان پیمایش فاصله بین

1. Golden
2. Chao
3. Tang
4. Miller-Hooks
5. Kantor
6. Rosenwein

دو راس تاثیر بگذارد. مانند میزان ترافیک. بر همین اساس فومین[1] و لینگاس در سال ۲۰۰۲ برای اولین بار مساله جهت‌یابی وابسته به زمان را معرفی نمودند و ثابت کردند که این مساله یک مساله‌ی $NP-$سخت[2] است[3][۶]. در موقعیت‌هایی که ممکن است تجمع رخ دهد، مدت زمان سفر فقط وابسته به زمان نیست و همچنین پیش‌بینی یک راه قطعی مشکل و شاید غیر ممکن باشد. بنابراین مساله جهت‌یابی تصادفی اخیرا مورد توجه زیادی قرار گرفته است. ایلهان[4] و همکاران در سال ۲۰۰۸ اولین کسانی بودند که مسایل با سود جمع‌آوری نامشخص را معرفی کردند[۷]. آن‌ها مساله جهت‌یابی با سودهای تصادفی را به عنوان یک مدل از مساله جهت‌یابی معرفی کردند. مساله جهت‌یابی کمان صورتی از مساله جهت‌یابی را بررسی می‌کند که در آن کمان‌ها ملاقات می‌شوند، در حالی که در حالت‌های دیگر راس‌ها ملاقات می‌شوند[۸]. آرچتی[5] و اسپرانزا تحقیقاتی روی مساله جهت‌یابی کمان انجام دادند و آن را به حالت مساله جهت‌یابی کمان چندوسیله‌ای بسط دادند که به آن مساله مسیریابی کمان جهت‌یابی گروهی می‌گویند[6][۹]. مساله جهت‌یابی گروهی دارای ظرفیت برای اولین بار در سال ۲۰۰۹ توسط آرچتی و همکاران مطرح شد[۱۰]. در این مساله به هر راس یک تقاضا و یک سود نسبت داده شده است. هدف کلی در این مساله تعیین یک مسیر برای هر وسیله نقلیه در دسترس، به منظور بیشینه کردن سود کلی، بدون تجاوز از ظرفیت و زمان در نظر گرفته شده برای وسیله نقلیه است. آرچتی و همکاران در سال ۲۰۱۳ مساله جهت‌یابی گروهی دارای ظرفیت را به حالتی بسط دادند که در آن فرض شده است که وقتی یک مشتری سرویس‌دهی شد، باید به طور کامل سرویس‌دهی شود[۱۱]. که این مدل مساله جهت‌یابی گروهی دارای ظرفیت با سرویس‌دهی ناقص نامیده می‌شود. ثابت شده است که سود جمع‌آوری شده در این مساله دو برابر سود جمع‌آوری شده در مساله جهت‌یابی گروهی دارای ظرفیت است. مساله جهت‌یابی خوشه‌بندی شده برای اولین بار در سال ۲۰۱۴ توسط آنجللی[7] و همکاران معرفی شد[۱۲]. این مساله یک تعمیم از مساله جهت‌یابی است که در آن راس‌ها در گروه‌هایی خوشه‌بندی شده‌اند. به هر گروه از راس‌ها یک سود اختصاص داده شده است و زمانی سود در یک گروه از راس‌ها جمع‌آوری می‌شود که همه‌ی راس‌های موجود در آن گروه سرویس‌دهی شوند. یو۸ و همکاران در سال ۲۰۱۴ مساله جهت‌یابی همبسته را معرفی کردند[۱۳]. این مساله یک تعمیم درجه دوم از مساله جهت‌یابی است. تابع هدف این مساله از دو جزء تشکیل شده است. جزء اول جمع‌آوری سود کل از راس‌های ملاقات شده و جزء دوم تابع سود درجه دومی است که ارتباط فضایی میان راس‌ها را به دست می‌آورد. سودهایی که باید در راس‌ها جمع‌آوری شود اغلب بین راس‌هایی که به هم نزدیکترند همبسته است. این مساله برگرفته از مسایل تور یک رباتی و تور چند رباتی است. ربات‌ها باید به منظور بیشینه کردن تابع هدف راس‌ها را ملاقات کنند، اما آن‌ها باید محدودیت زمانی را رعایت کنند. ون در مروی۹ و همکاران در سال ۲۰۱۴ تعمیمی از مساله جهت‌یابی گروهی با پنجره زمانی ارایه دادند که در آن به تعداد مشخصی مراجعه کننده یا وسیله نقلیه برای جمع‌آوری سود از یک راس خاص نیاز است[۱۴]. که به آن مساله جهت‌یابی تعاونی با پنجره زمانی می‌گویند. همچنین مراجعه کننده باید قبل از این‌که سرویس شروع شود به آن‌جا برسد. یک فرمول‌بندی شناور وسیله نقلیه دو اندیسی نیز برای این مساله ارایه شده است.

اردوغان[10] و لاپورت[11] در سال ۲۰۱۳ برای اولین بار مساله جهت‌یابی با سودهای متغیر را مورد مطالعه قرار دادند[۱۵]. در این مساله به هر راس یک پارامتر جمع‌آوری سود اختصاص داده شده است که عددی بین صفر و یک است و هر بار که بخواهیم سود متناظر با آن

1. Fomin
2. Nondeterministic Polynomial
3. Lingas
4. Ilhan
5. Archetti
6. Speranza
7. Angelelli
8. Yu
9. Van der Merwe
10. Erdogan
11. Laporte

راس را جمع‌آوری کنیم با توجه به این پارامتر فقط می‌توانیم درصدی از سود باقی‌مانده در آن راس را جمع‌آوری کنیم.

۳- مساله جهت‌یابی با سودهای متغیر با تابع هدف کسری

در مساله‌ی جهت‌یابی با سودهای متغیر با تابع هدف کسری هدف بیشینه کردن نسبت سود جمع‌آوری شده به هزینه‌ی صرف شده برای وسیله‌ی نقلیه با در نظر گرفتن محدودیت زمانی است. در این مساله وسیله‌ی نقلیه سفر خود را از مبدا شروع می‌کند و ضمن سرویس‌دهی راس‌های تقاضا، تعدادی از راس‌های دیگر را نیز ملاقات می‌کند به گونه‌ای که از حد زمانی در نظر گرفته شده برای سفر تجاوز نکند و سود به دست آمده بیشینه شود، و در نهایت به مبدا باز می‌گردد. در مساله‌ی جهت‌یابی با سودهای متغیر با تابع هدف کسری وسیله‌ی نقلیه می‌تواند یک مشتری را بیش از یک بار ملاقات کند و سود جمع‌آوری کند. اما باید توجه داشت که در این‌جا به هر راس یک پارامتر جمع‌آوری سود $\alpha_i \in [0,1]$ اختصاص داده شده است. دلیل اختصاص این پارامتر به هر راس این است که اگر بخواهیم بیش از یک بار از یک مشتری سود جمع‌آوری کنیم هر بار مقدار سودی که می‌توانیم جمع‌آوری کنیم با توجه به این پارامتر جمع‌آوری کاهش می‌یابد. به عنوان مثال فرض کنید که یک ماهی‌گیر مناطقی را برای ماهی‌گیری در نظر می‌گیرد. در هر منطقه خاص وقتی ماهی‌گیر برای دفعه اول مقداری ماهی صید می‌کند، اما دفعات بعدی به دلیل این‌که تعدادی از ماهی‌ها صید شده و تعدادی نیز فرار می‌کنند، تعداد ماهی کمتری صید می‌کند. یک حد مجاز برای تعداد دفعات ملاقات هر راس نیز تعیین شده است. همچنین برای جمع‌آوری سود هر راس باید مدت زمان مشخصی که برای هر راس متفاوت است، در آن راس بمانیم. اگر یک وسیله‌ی نقلیه کمتر از زمان مشخص شده در یک راس بماند آن‌گاه سودی دریافت نمی‌کند. برای شرح بیشتر این مطلب فرض کنید زمان مشخص اختصاص یافته به یک راس برای جمع‌آوری سود دو ساعت باشد و پارامتر جمع‌آوری سود برابر ۸۰ درصد باشد. اگر این وسیله‌ی نقلیه به اندازه‌ی ۵ ساعت در این راس بماند آن‌گاه در دو ساعت اول به اندازه‌ی $/80$ و در دو ساعت دوم به اندازه‌ی $(1-/80)*/80$ درصد از سود اختصاص یافته به راس را جمع‌آوری می‌کند. همچنین به ازای یک ساعت آخر که بیشتر در آن راس مانده است هیچ سودی دریافت نمی‌کند، چون حداقل زمان مورد نیاز برای جمع‌آوری سود دو ساعت برای هر بار است.

۳-۱: تعریف مساله روی گراف

در مساله جهت‌یابی با سودهای متغیر با تابع هدف کسری یک گراف کامل غیر جهت‌دار $G=(V,E)$ داده شده است که در آن V مجموعه راس‌ها و E مجموعه یال‌ها است. فرض کنیم $T \subseteq V$ مجموعه راس‌های ضروری باشد که شامل مبدا است. هر راس $i \in V \setminus \{0\}$ یک سود p_i دارد که باید جمع‌آوری شود، و یک پارامتر جمع‌آوری $\alpha_i \in [0,1]$ نیز به آن اختصاص داده شده است. یک وسیله نقلیه ممکن است در هر راسی که آن ملاقات می‌کند چند گذر بماند. در اینجا یک گذر به معنی مدت زمان از پیش تعیین شده‌ای است که وسیله نقلیه در هر راس می‌ماند. وقتی یک وسیله نقلیه K گذر در یک راس سپری می‌کند معنایش این است که مدت زمانی که در آن راس می‌ماند k برابر زمانی است که برای یک گذر در آن راس می‌ماند. فرض کنید هر گذر در راس i نیازمند r_i واحد از زمان است و با ماندن در آن راس $100\alpha_i$ درصد از سود باقی مانده جمع‌آوری می‌شود. یک مدت زمان پیمایش t_{ij} که از نامساوی مثلثی پیروی می‌کند به هر یال $(i,j) \in E$ اختصاص داده شده است. هدف کلی تعیین یک تور سود بیشینه برای وسیله نقلیه است که شروع و پایانش در مبدا است و همه راس‌های ضروری را پیمایش می‌کند و از مدت زمان تعیین شده برای سفر تجاوز نمی‌کند.

۳-۲: مدل ریاضی مساله

فرض کنیم حداکثر تعداد گذرهایی که می‌توانیم در هر راس i بمانیم را با $m_i \leq (\frac{(L-2\times t_{0i})}{r_i})$ نمایش

می‌دهیم، که مقدار آن ممکن است به محدودیت‌های فیزیکی و یا محدودیت‌های مدیریتی بستگی داشته باشد. منظور از محدودیت فیزیکی این است که ممکن است در یک راس منابع بیش از یک مقدار مشخص وجود نداشته باشد. مثلا فرض کنیم وسیله نقلیه‌ای می‌خواهد کالای مشخصی را از یک انبار بارگیری کند. طبیعی است که وسیله نقلیه نمی‌تواند از یک مقدار خاص بیشتر بارگیری کند. محدودیت مدیرانه هم به این معناست که ممکن است مدیریت یک شرکت تعداد دفعاتی که وسیله نقلیه می‌تواند در یک مکان خاص بارگیری کند را تعیین کند. فرض کنیم مقدار متغیر x_{ij} زمانی که وسیله نقلیه یال $(i,j)\in E$ را طی کند برابر با یک باشد و در غیر این صورت برابر با صفر باشد. همچنین فرض کنید مقدار متغیر y_{ik} زمانی که وسیله نقلیه به میزان k گذر و یا بیشتر در راس i بماند برابر با یک باشد و در غیر این صورت برابر با صفر باشد در اینجا c_{ij} هزینه پیمایش کمان (i,j) ام و L حد زمانی در نظر گرفته برای سفر بر حسب دقیقه است. بنابراین مدل ریاضی مساله جهت‌یابی با سودهای متغیر با تابع هدف کسری به شکل زیر می‌باشد.

$$max \sum_{i\in V-\{0\}} p_i \sum_{k\in\{1,2,\dots,m_i\}} \alpha_i(1-\alpha_i)^{k-1}\times y_{ik} \Big/ \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \qquad (۱)$$

$$s.t. \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} = 2y_{i1} \qquad (i\in V), \qquad (۲)$$

$$\sum_{i\in S, j\in V-S or i\in V-S, j\in S} x_{ij} \geq 2y_{t1}$$
$$(S\subset V: 2\leq |S| \leq |V|-2, T\neq\emptyset, t\in S), \qquad (۳)$$

$$y_{ik} \leq y_{i,k-1} \qquad (i\in V, k\in\{2,\dots,m_i\}), \qquad (۴)$$

$$\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in V-\{0\}} r_i \sum_{k\in\{1,\dots,m_i\}} y_{ik} \leq L, \qquad (۵)$$

$$y_{i1} = 1 \qquad (i\in T), \qquad (۶)$$

$$y_{i1} \in \{0,1\} \qquad (i\in V-T), \qquad (۷)$$

$$y_{ik} \in \{0,1\} \qquad (i\in V, k\in\{2,\dots,m_i\}), \qquad (۸)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad ((i,j)\in E). \qquad (۹)$$

عبارت ۱ که تابع هدف است نسبت میزان سود به دست آمده به هزینه صرف شده در طول سفر را بیشینه می‌کند. که این عمل منجر به این می‌شود که علاوه بر بیشینه کردن سود هزینه‌ی سفر را نیز کمینه کند. نامساوی مثلثی ایجاب می‌کند که اگر در یک راس سودی جمع‌آوری نشود نیازی نیست که آن راس ملاقات شود، به همین دلیل محدودیت ۲ به عنوان محدودیت درجه آورده شده است و محدودیت ۳ به عنوان محدودیت پیوستگی آورده شده است و از ایجاد زیردور جلوگیری می‌کند. این نامساوی‌ها از فرمول‌بندی مساله تور پوششی آورده شده‌اند. محدودیت ۴ وسیله نقلیه را از جمع‌آوری سود در راسی که آن را ملاقات نکرده منع می‌کند. محدودیت ۵ محدودیت زمانی است و اجازه نمی‌دهد که وسیله نقلیه از زمان تعیین شده برای سفر تجاوز کند. محدودیت ۶ ایجاب می‌کند که همه راس‌های ضروری باید ملاقات شوند. محدودیت‌های ۷، ۸ و ۹ دامنه متغیرها را تعیین می‌کنند.

تابع هدف مساله را می‌توان به صورت

$$max \frac{f(Y)}{g(X)} \qquad (۱۰)$$

در نظر گرفت که در آن

$$X=(x_{a_1},x_{a_2},\dots,x_{a_m})=(x_a)_{a\in A}$$

و

$$Y=(y_{ik}):(i\in V), k\in\{1,2,\dots,m_i\}.$$

پس بدین ترتیب تابع هدف به صورت

$$\max\frac{f(Y)}{g(X)}, (X,Y)\in\Omega \quad (p') \qquad (۱۱)$$

در می‌آید. برای هر عدد حقیقی q فرض کنید

$$F(q)=\max_{(x,y)\in\Omega}\sum f(Y)-qg(X),$$
$$(X,Y)\in\Omega \quad (p)$$

حال به منظور ارایه الگوریتمی برای حل مساله در ادامه قضیه زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه: فرض کنید $q^*=max_{(X,Y)\in\Omega}\frac{f(Y)}{g(X)}$ در این صورت $q=q^*$ اگر و تنها اگر $F(q)=0$.

اثبات: ابتدا توجه کنید که چون در هر جواب مساله، راس‌های تقاضا حتما باید ملاقات شوند، بنابراین برای هر $(X,Y)\in\Omega$ داریم $g(\mathrm{X})=\sum_{(\mathrm{i,j})\in\mathrm{E}} c_{ij}x_{ij}>0$. ابتدا فرض کنید $F(q)=0$. می‌خواهیم ثابت کنیم که $q=q^*$. طبق تعریف $(X_q,Y_q)\in\Omega$ چنان موجودند که $F(q)=f(Y_q)-qg(X_q)=0$. از این رابطه نتیجه می‌شود که $q=\frac{f(Y_q)}{g(X_q)}$. حال فرض کنید $(\mathrm{X}^*,\mathrm{Y}^*)$ جواب بهینه‌ی مساله (P') باشد، در این صورت

$$q^*=\frac{f(Y^*)}{g(X^*)}\geq\frac{f(Y_q)}{g(X_q)}=q\Rightarrow q^*\geq q \qquad (۱۲)$$

از طرفی چون (X_q,Y_q) جواب بهینه‌ی مساله‌ی P است پس $f(Y^*)-q_0g(X^*)\leq f(Y_0)-q_0g(X_0)=0$ در نتیجه

$$q\leq\frac{f(Y^*)}{g(X^*)}=q^*\Rightarrow q\leq q^*. \qquad (۱۳)$$

با توجه به روابط ۱۲ و ۱۳ نتیجه می‌شود که $q^*=q$.
برای اثبات قسمت عکس می‌خواهیم ثابت کنیم که $F(q^*)=0$. چون طبق تعریف $f(Y^*)-q^*g(X^*)=0$، بنابراین

$$\begin{aligned}F(q^*)&=\max_{(X,Y)\in\Omega} f(Y)-qg(X)\\&\geq f(Y^*)-q^*g(X^*)=0\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

در نتیجه $F(q^*)\geq 0$. از طرفی چون $(\mathrm{X}^*,\mathrm{Y}^*)$ جواب بهینه‌ی مساله (p') است لذا طبق تعریف

$$\frac{f(Y)}{g(X)}\leq\frac{f(Y^*)}{g(X^*)}=q^*\Rightarrow f(Y)-q^*g(X)\leq 0$$

از این مطلب نتیجه می‌شود که:

$$\max_{(X,Y)\in\Omega} f(Y)-q^*g(X)\leq 0\Rightarrow F(q^*)\leq 0. \qquad (۱۵)$$

در نتیجه با توجه به ۱۴ و ۱۵ خواهیم داشت $F(q^*)=0$.
از قضیه فوق نتیجه می‌شود که برای یافتن جواب بهینه‌ی مساله (p') کافیست ریشه‌ی تابع F را بیابیم.

در ادامه نشان می‌دهیم که با استفاده از روش دوبخشی[1] می‌توان ریشه‌ی تابع F را یافت. برای انجام این کار نیاز به بیان و اثبات گزاره‌های زیر داریم:

گزاره: تابع F دارای ویژگی‌های زیر است:
الف: F یک تابع محدب است.
ب: F یک تابع اکیدا نزولی است.
ج: $\lim_{q\to+\infty}F(q)=-\infty$
د: $\lim_{q\to-\infty}F(q)=+\infty$

اثبات: برای اثبات قسمت (الف) فرض کنید $0\leq\lambda\leq 1$ و q_1 و q_2 دو عدد حقیقی دلخواه باشند. در این صورت می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}&F(\lambda q_1+(1-\lambda)q_2)\\&=\max_{(X,Y)\in\Omega} f(\mathrm{Y})-(\lambda q_1+(1-\lambda)q_2)\,\mathrm{g(X)}\\&=\max_{(X,Y)\in\Omega}\lambda\left[f(\mathrm{Y})-q_1\,\mathrm{g(X)}\right]\\&+(1-\lambda)\left[f(\mathrm{Y})-q_2\,\mathrm{g(X)}\right]\\&\leq\lambda\max_{(X,Y)\in\Omega}\left[f(\mathrm{Y})-q_1\,\mathrm{g(X)}\right]+\\&(1-\lambda)\max_{(X,Y)\in\Omega}\left[f(\mathrm{Y})-q_2\,\mathrm{g(X)}\right]\\&\leq\lambda F(q_1)+(1-\lambda)\mathrm{F}(q_2)\end{aligned}$$

در نتیجه تابع F یک تابع محدب است.
برای اثبات قسمت (ب) فرض کنید $q_1<q_2$. می‌خواهیم نشان دهیم $F(q_1)>F(q_2)$. برای هر $(X,Y)\in\Omega$ چون $g(X)>0$ داریم:

$$\begin{aligned}&q_1g(\mathrm{X})<q_2g(\mathrm{X})\Rightarrow\\&f(\mathrm{Y})-\mathrm{q}_1\,g(X)>f(Y)-\mathrm{q}_2\,g(X).\end{aligned}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\max_{(X,Y)\in\Omega} f(\mathrm{Y})-\mathrm{q}_1\,g(X)>\\&\max_{(X,Y)\in\Omega} f(Y)-\mathrm{q}_2\,g(X)\\&\Rightarrow\mathrm{F(q_1)>F(q_2)}.\end{aligned}$$

برای اثبات قسمت (ج) فرض کنید M یک عدد منفی بزرگ باشد. قرار می‌دهیم $N=\max_{(X,Y)\in\Omega}\left(\frac{f(\mathrm{Y})-\mathrm{M}+1}{g(X)}\right)$. حال اگر $q>N$

1. Bisection

آن‌گاه برای هر $(X,Y)\in\Omega$ داریم $q>\left(\frac{f(\mathrm{Y})-\mathrm{M}}{g(X)}\right)$.

بنابراین برای هر $(X,Y)\in\Omega$ داریم

$f(Y)-qg(X)\le M-1$ در نتیجه:

$$\max_{(X,Y)\in\Omega} f(Y)-\mathrm{q}\,g(X)\le \mathrm{M}-1<\mathrm{M}$$
$$\Rightarrow \mathrm{F(q)}<\mathrm{M}$$

از مطالب فوق می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{q\to+\infty}F(q)=-\infty$.

برای اثبات قسمت (د) فرض کنید M یک عدد مثبت بزرگ باشد.

قرار می‌دهیم $N=\min_{(X,Y)\in\Omega}\left(\frac{f(\mathrm{Y})-\mathrm{M}-1}{g(X)}\right)$، حال اگر $q<N$ آن‌گاه برای هر $(X,Y)\in\Omega$ داریم:

$$f(Y)-qg(X)\ge M+1$$

در نتیجه:

$$\max_{(X,Y)\in\Omega} f(Y)-\mathrm{q}\,g(X)\ge \mathrm{M}+1>\mathrm{M}$$
$$\Rightarrow \mathrm{F(q)}>\mathrm{M}$$

بنابراین $\lim_{q\to-\infty}F(q)=+\infty$.

۳-۳: نتایج عددی

تمام آزمون‌های انجام شده در محیط سیستم عامل ویندوز ۸، با استفاده از ۶ گیگابایت حافظه RAM و با استفاده از پردازشگر $Intel(R)\ Core(TM)\ i5-4210U$ انجام شده است. آزمون‌های انجام شده با استفاده از نرم‌افزار $CPLEX\ 12/6$ و به زبان برنامه‌نویسی $C\ \#$ در محیط $Visual\ Studio\ 2013$ نوشته شده است. داده‌های ورودی مساله به صورت تصادفی و به منظور بررسی کارایی روش ارایه شده انتخاب شده‌اند. بدین منظور ابتدا تعداد راس‌ها را ثابت در نظر می‌گیریم. برای تولید کمان‌ها، راس‌ها را یکی یکی مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای هر راس ابتدا با استفاده از تابع توزیع یکنواخت عددی را بین یک تا تعداد راس‌هایی که تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته‌اند، را انتخاب می‌کنیم. به این ترتیب یکی از راس‌هایی که تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته‌اند به تصادف و با استفاده از تابع توزیع یکنواخت انتخاب می‌شود. راس انتخاب شده را از فهرست راس‌های بررسی نشده حذف می‌کنیم. سپس فهرستی از سایر راس‌ها تشکیل می‌دهیم. به تصادف عددی بین یک و پارامتر صحیحی که کنترل‌کننده‌ی تعداد کمان‌های تولید شده می‌باشد، را با استفاده از تابع توزیع یکنواخت انتخاب می‌کنیم. سپس به تعداد این عدد تصادفی انتخاب شده، کمان‌هایی بین راس فعلی که در حال بررسی است و سایر راس‌های گراف ایجاد می‌کنیم. با انجام این روند ممکن است بین راس‌هایی که تاکنون بررسی نشده‌اند و راس‌هایی که کمانی از راس در حال بررسی کنونی به آن‌ها وصل شده است، کمانی وجود نداشته باشد. به منظور اطمینان از همبندی گراف، اگر این اتفاق رخ دهد، راس بعدی که از میان راس‌های بررسی نشده انتخاب شد، روند رابه گونه‌ای تغییر می‌دهیم که حتما یکی از راس‌هایی که به آن وصل می‌شوند از بین راس‌هایی انتخاب شود که در مرحله‌ی قبل به راس در حال بررسی وصل شده‌اند. به منظور تعیین کمان‌ها یا راس‌های تقاضا و سودده به تصادف و با استفاده از توزیع یکنواخت عددی بین $\frac{|\mathrm{V}|}{5}$ و $\frac{2}{3}*|V|$ انتخاب می‌کنیم. به اندازه‌ی $\frac{2}{3}$ این عدد تولید شده راس‌ها یا کمان‌هایی را به تصادف و با استفاده از تابع توزیع یکنواخت انتخاب کرده و آن‌ها را به عنوان راس‌ها یا کمان‌های سودده در نظر می‌گیریم. سپس به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ این عدد تولید شده راس‌ها یا کمان‌هایی را به عنوان راس‌ها یا کمان‌های تقاضا انتخاب می‌کنیم. به منظور تولید $T_{\max}$ در هر بار که کمان‌هایی به تصادف برای رسم شدن به راس در حال بررسی تولید می‌شوند، راس‌های با بیشترین و کمترین فاصله از راس در حال بررسی را در نظر گرفته و فواصل مذکور را با یکدیگر جمع کرده و در دو متغیر T_1 و T_2 ذخیره می‌کنیم. سپس به تصادف و با استفاده از توزیع یکنواخت $T_{\max}$ را عددی بین T_1 و T_2 انتخاب می‌کنیم. در پایان به هر کدام از راس‌ها و کمان‌هایی که بدین صورت به دست آمده‌اند پارامترهای لازم را نسبت می‌دهیم.

جدول ۱ نتایج عددی حاصل از روش دوبخشی را نشان می‌دهد. در جدول ۱ ستون V نشان‌دهنده‌ی تعداد

راس‌ها، ستون A نشان‌دهنده‌ی تعداد کمان‌ها، ستون V_R نشان‌دهنده‌ی تعداد راس‌های ضروری، ستون i نشان‌دهنده‌ی تعداد تکرارها، ستون *Time* نشان‌دهنده‌ی مدت زمان، ستون *AveNodes* نشان‌دهنده‌ی میانگین تعداد راس‌ها، ستون *AveTimes* نشان‌دهنده‌ی میانگین مدت زمان سپری شده و ستون *AveGap* نشان‌دهنده‌ی میانگین مقدار انحراف از بهینگی می‌باشد. در اینجا ما فرض می‌کنیم که $Epsilon = 10^{-6}$. همان گونه که ملاحظه می‌کنید مسایل تا حدود ۵۰ راس به روش دوبخشی حل شده‌اند. با توجه به جواب‌های به دست آمده در جدول ۱ می‌بینیم که مدت زمان حل مساله بسته به ساختار مساله متغیر است و این طور نیست که هرچه تعداد راس‌ها بیشتر باشد مدت زمان حل مساله نیز بیشتر شود. مقادیر به دست آمده برای *MIPRelativeGap* بسیار کوچک و نزدیک به صفر می‌باشند و این نشان می‌دهد که جواب‌های بدست آمده برای مساله مناسب هستند.

۴- تعمیم مساله به حالتی که تقاضا روی کمان است

در این بخش صورتی از مساله جهت‌یابی با سودهای متغیر را بررسی می‌کنیم که در آن به جای راس‌ها، کمان‌ها ملاقات می‌شوند. در مساله‌ی جهت‌یابی با سودهای متغیر مشتریان در راس‌ها قرار داشتند و جمع‌آوری سود در راس‌ها انجام می‌شد. اما مسایلی نیز وجود دارد که در آن‌ها جمع‌آوری سود در کمان ها انجام می‌شود.

جدول ۱. نتایج عددی حاصل از روش دوبخشی برای مساله جهت‌یابی با سودهای متغیر با تابع هدف کسری

n	$\lvert V \rvert$	$\lvert A \rvert$	V_R	i	$Time$	$AveNodes$	$AveTimes$	$AveGap$
۱	۳۰	۴۳۶	۱۲	۲۳	۲/۵۹	۳۶۸/۵۷	۰/۱۱	۳/۱۳E−۰۵
۲	۳۰	۴۶۸	۸	۲۴	۲۱/۸۴	۶۳۳/۷۹	۰/۹۱	۲/۱۳E−۰۵
۳	۳۰	۴۶۶	۸	۲۳	۱۵/۲۳	۲۷۸۶	۰/۶۶	۹/۸۶E−۰۵
۴	۳۰	۴۷۲	۱۰	۲۴	۱۳/۸۱	۱۶۸۷/۲۲	۰/۶۰	۲/۷۰E−۰۵
۵	۳۰	۵۱۵	۱۰	۲۴	۶/۴۴	۲۹۵/۵۴	۰/۲۷	۲/۷۹E−۰۵
۶	۳۵	۵۲۹	۸	۲۴	۳۴/۲۵	۱۰۴۶/۷۵	۱/۴۳	۲/۹۵E−۰۵
۷	۳۵	۵۹۸	۱۰	۲۴	۱۱۴/۵۴	۳۳۹۶/۵۸	۴/۷۷	۰
۸	۳۵	۵۵۸	۱۰	۲۳	۰/۵	۰	۰/۰۲	۰
۹	۳۵	۵۸۸	۱۰	۲۴	۳۹/۲۰	۶۸۸/۶۷	۱/۶۳	۰
۱۰	۳۵	۵۳۱	۱۵	۲۳	۳۸/۹۴	۶۱۲/۱۷	۱/۶۹	۹/۹۲E−۰۵
۱۱	۴۰	۸۵۲	۱۵	۲۴	۴/۵۸	۱۰۲۴/۲۱	۰/۱۹	۱/۶E−۰۵
۱۲	۴۰	۸۶۹	۹	۲۳	۱۱۲/۱۷	۱۱۷۴۸/۰۴	۴/۸۷	۰
۱۳	۴۰	۸۱۶	۱۴	۲۴	۷۱/۹۳	۳۳۹۶/۱۷	۳	۰
۱۴	۴۰	۷۵۴	۸	۲۴	۷۱/۱	۲۸۰۰/۶۷	۲/۹۶	۰
۱۵	۴۰	۷۵۲	۹	۲۳	۱۲/۸۵	۳۲۴۹/۳۹	۰/۵۶	۲/۶۹E−۰۵
۱۶	۴۵	۹۰۰	۱۳	۲۳	۴۷/۱۳	۱۲۹۹/۶۵	۲/۰۵	۵/۲۷E−۰۵
۱۷	۴۵	۱۰۴۹	۱۸	۲۴	۳۷/۶۲	۸۵۶۳/۱۷	۱/۵۶	۱/۹۰E−۰۵
۱۸	۴۵	۱۰۳۵	۱۳	۲۳	۴۴۱/۹۸	۴۲۵۳/۸۳	۱۹/۲۲	۰
۱۹	۴۵	۱۰۷۰	۱۳	۲۳	۵/۸۸	۳۶۵/۰۹	۰/۲۶	۳/۹E−۰۵
۲۰	۴۵	۹۲۱	۱۹	۲۳	۱۳/۵۲	۳۰۷۲	۰/۵۹	۳/۰۶E−۰۵
۲۱	۵۰	۱۲۱۰	۷	۲۳	۱۷۵/۶۷	۵۵۵۴/۲۶	۷/۶۴	۰
۲۲	۵۰	۱۲۳۴	۱۵	۲۳	۱۸۲/۹۹	۴۵۱۷/۹۶	۷/۹۵	۸/۹۳E−۰۵
۲۳	۵۰	۱۲۰۱	۱۴	۲۳	۰/۶۶	۰	۰/۰۳	۰
۲۴	۵۰	۱۲۳۰	۱۲	۲۳	۴۳۹/۱۶	۸۰۳۶/۲۶	۱۹/۰۹	۰
۲۵	۵۰	۱۳۰۹	۱۰	۲۴	۱۷۷/۳۴	۷۳۳۰/۹۶	۷/۳۸	۰

در مساله جهت‌یابی کمان با سودهای متغیر با تابع هدف کسری نیز مشتریان در کمان‌ها قرار دارند. در این مساله وسیله‌ی نقلیه با ماندن در یک کمان به اندازه‌ی زمانی مشخص می‌تواند سود بیش‌تری را جمع‌آوری کند.
در مساله‌ی جهت‌یابی کمان با سودهای متغیر با تابع هدف کسری نیز هدف بیشینه کردن نسبت سود جمع‌آوری شده به هزینه‌ی صرف شده برای وسیله‌ی نقلیه با در نظر گرفتن محدودیت زمانی است. در این مساله وسیله‌ی نقلیه سفر خود را از مبدا شروع می‌کند و ضمن سرویس‌دهی کمان‌های تقاضا، تعدادی از کمان‌های سودده را نیز ملاقات می‌کند به گونه‌ای که از حد زمانی در نظر گرفته شده برای سفر تجاوز نکند، و در نهایت به مبدا بازمی‌گردد. در مساله‌ی جهت‌یابی کمان با سودهای متغیر وسیله‌ی نقلیه می‌تواند یک مشتری را بیش از یک بار ملاقات کند و سود جمع‌آوری کند. اما باید توجه داشت که در این‌جا به هر کمان یک پارامتر جمع‌آوری سود $\alpha_i \in [0,1]$ اختصاص داده شده است. اگر بخواهیم بیش از یک بار از یک مشتری سود جمع‌آوری کنیم هر بار مقدار سودی که می‌توانیم جمع‌آوری کنیم با توجه به این پارامتر جمع‌آوری کاهش می‌یابد. همچنین یک حد مجاز برای تعداد دفعات ملاقات هر راس نیز تعیین شده است. همچنین برای جمع‌آوری سود هر کمان باید مدت زمان مشخصی که برای هر کمان متفاوت است، در آن کمان بمانیم. اگر یک وسیله‌ی نقلیه کمتر از زمان مشخص شده در یک کمان بماند آن‌گاه سودی دریافت نمی‌کند.

۴-۱: تعریف مساله روی گراف

فرض کنیم $G = (V, A)$ یک گراف جهت‌دار باشد، که در آن راس ۱ مبدا را نشان می‌دهد. فرض کنیم V مجموعه راس‌ها و A مجموعه کمان‌ها می‌باشد. و همچنین فرض کنیم A_P مجموعه کمان‌های سودده باشد که در صورت سرویس‌دهی به آن‌ها سودی دریافت می‌شود و A_R مجموعه کمان‌های ضروری باشد که باید سرویس‌دهی شوند. به هر کمان $(i, j) \in A_p$ یک سود نامنفی P_{ij} اختصاص داده شده است که باید جمع‌آوری شود، و یک پارامتر جمع‌آوری $\alpha_{ij} \in [0,1]$ نیز به آن اختصاص داده شده است، و هر کمان $(i, j) \in A$ دارای یک مدت زمان پیمایش C_{ij} می‌باشد که از نامساوی مثلثی پیروی می‌کند. یک وسیله نقلیه ممکن است چند گذر را در هر کمان بماند. فرض کنید هر گذر در کمان (i, j) نیازمند r_{ij} واحد از زمان است و با ماندن در آن کمان $100\alpha_{ij}$ درصد از سود باقی‌مانده جمع‌آوری می‌شود. یک مدت زمان T_{max} نیز برای وسیله نقلیه در نظر گرفته می‌شود که نشان‌دهنده حداکثر زمان سفر وسیله نقلیه می‌باشد. هدف مساله جهت‌یابی کمان با سودهای متغیر تعیین یک تور سود بیشینه برای وسیله نقلیه است که شروع و پایانش در مبدا است و همه کمان‌های ضروری را پیمایش می‌کند و از مدت زمان تعیین شده برای سفر تجاوز نمی‌کند.

٤-۲: مدل ریاضی مساله

حال فرض کنیم حداکثر تعداد گذرهایی که می‌توانیم در هر کمان (i, j) بمانیم را با $m_{ij} \le \left\lfloor \frac{(L - 2 \times t_{0i})}{r_{ij}} \right\rfloor$ نمایش می‌دهیم، که مقدار آن ممکن است به محدودیت‌های فیزیکی و یا محدودیت‌های مدیریتی بستگی داشته باشد. فرض کنیم متغیر x_{ij} نمایش‌گر تعداد دفعاتی باشد که کمان (i, j) طی می‌شود. همچنین فرض کنید مقدار متغیر y_{ijk} زمانی که وسیله نقلیه به میزان k گذر و یا بیشتر در کمان (i, j) بماند برابر با یک باشد و در غیر این صورت برابر با صفر باشد. بنابراین مدل مساله جهت‌یابی کمان با سودهای متغیر با تابع هدف کسری به شرح زیر می‌باشد:

$$max \sum_{(i,j)\in A_p} p_{ij} \sum_{k\in\{1,2,\dots,m_{ij}\}} \alpha_{ij}(1-\alpha_{ij})^{k-1} \times y_{ijk} \,/ \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \quad (۱۶)$$

$$s.t. \quad \sum_{j\in V-\{i\}} x_{ij} = \sum_{j\in V-\{i\}} x_{ji} \qquad \forall(i \in V), \quad (۱۷)$$

$$\sum_{i\in S, j\in V-S \text{ or } i\in V-S, j\in S} x_{ij} \ge y_{kl1} \quad (۱۸)$$

$$\forall S \subset V - \{1\}, \forall(k,l) \in A_p$$

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} r_{ij} \sum_{k\in\{1,\dots,m_{ij}\}} y_{ijk} \le T_{max}, \quad (۱۹)$$

$$y_{ijk} \le y_{ij,k-1} \qquad (i,j) \in A, k \in \{2,\dots,m_{ij}\}), \quad (۲۰)$$

$$x_{ij} \ge 1 \qquad \forall(i,j) \in A_R, \quad (۲۱)$$

$$y_{ij1} = 1 \qquad \forall (i,j) \in A_R, \tag{۲۲}$$

$$x_{ij} \geq y_{ij1} \qquad \forall (i,j) \in A_P, \tag{۲۳}$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{integer} \qquad \forall (i,j) \in A, \tag{۲۴}$$

$$y_{ij1} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A, \tag{۲۵}$$

$$y_{ij1} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A_P, \tag{۲۶}$$

$$y_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A, k \in \{2,\ldots,m_{ij}\}. \tag{۲۷}$$

محدودیت ۱۶ که تابع هدف است مقدار سود به دست آمده را بیشینه می‌کند. نامساوی مثلثی ایجاب می‌کند که اگر در یک کمان سودی جمع‌آوری نشود نیازی نیست که آن کمان ملاقات شود، به همین دلیل محدودیت ۱۷ به عنوان محدودیت درجه و محدودیت ۱۸ به عنوان محدودیت پیوستگی آورده شده است. محدودیت ۱۹ محدودیت زمانی است. محدودیت ۲۰ وسیله نقلیه را از جمع‌آوری سود در کمانی که آن را ملاقات نکرده منع می‌کند. محدودیت ۲۱ ایجاب می‌کند که همه کمان‌های ضروری باید ملاقات شوند. محدودیت ۲۲ نشان می‌دهد که در کمان‌های ضروری حداقل یک گذر می‌مانیم. محدودیت ۲۳ ایجاب می‌کند که اگر وسیله نقلیه بخواهد در کمانی بماند حتما باید آن را ملاقات کند. محدودیت‌های ۲۴ تا ۲۷ دامنه متغیرها را تعیین می‌کنند.
با روندی مشابه روند بیان شده در بخش قبل می‌توان ثابت کرد که $q = q^*$ اگر و تنها اگر $F(q) = 0$ که در آن $q^* = \max f(Y)/g(X), (X,Y) \in \Omega$ و $\max_{(x,y)\in\Omega} \sum f(Y) - qg(X)$ مساله‌ی (p) و $\max_{(X,Y)\in\Omega} f(Y)/g(X)$ مساله‌ی (P') می‌باشند.
با استدلالی مشابه حالت قبل برای یافتن مقدار بهینه‌ی q^* کافیست ریشه‌ی تابع $F(q)$ را بیابیم. بنابراین می‌توان با استفاده از روش دوبخشی ریشه‌ی تابع $F(q)$ را یافت که همان مقدار بهینه‌ی تابع q^* است. در هر تکرار نیاز به محاسبه‌ی $F(q)$ داریم که با استفاده از روش شاخه و برش این کار را انجام می‌دهیم.

٤-۳: نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از حل مساله‌ی جهت‌یابی کمان با سودهای متغیر با تابع هدف کسری به روش دو بخشی را ارایه می‌دهیم. مساله را برای تعدادی نمونه با تعداد راس‌های کم، متوسط و زیاد حل کرده‌ایم. در جدول‌های ۲، ۳ و ۴ ستون V نشان‌دهنده‌ی تعداد راس‌ها، ستون A نشان‌دهنده‌ی تعداد کمان‌ها، ستون A_P نشان‌دهنده‌ی تعداد کمان‌های سودده، ستون A_R نشان‌دهنده‌ی تعداد کمان‌های ضروری، ستون *NIter* نشان‌دهنده‌ی تعداد تکرارها، ستون *BiTime* نشان‌دهنده‌ی مدت زمان صرف شده برای حل مساله با استفاده از روش دوبخشی، ستون *NNodes* نشان‌دهنده‌ی تعداد تکرار راس‌ها و ستون *Gap* نشان‌دهنده‌ی نسبت بهینگی می‌باشد.

جدول ۲. نتایج عددی برای مساله با تعداد راس‌های کم

n	$\|V\|$	$\|A\|$	$\|A_p\|$	$\|A_R\|$	*NIter*	*BiTime*	*NNodes*	*Gap*
۱	۴۵	۱۰۳۹	۲۹۱	۱۴۵	۲۴	۱۲۶۶/۱۷	۱۲۳۰/۷۱	۴/۵۵E-۰۶
۲	۴۵	۱۰۰۷	۳۸۸	۱۹۴	۱۸	۲۹۷/۲۲	۲۹۷/۱۲	۵/۶۱E-۰۶
۳	۴۵	۹۱۳	۲۴۹	۱۲۴	۲۸	۱۰۷۳/۷۴	۱۶۹۲/۰۸	۳/۹۰E-۰۶
۴	۴۵	۹۸۳	۱۹۲	۹۶	۳۰	۲۷۲۲/۷۶	۱۷۴۲/۱۲	۸/۰۱E-۰۷
۵	۴۵	۸۹۵	۲۲۴	۱۱۱	۱۵	۲۴۷/۹۱	۷۸۷/۶۹	۶/۳۵E-۰۸
۶	۴۵	۹۶۸	۲۸۶	۱۴۳	۱۳	۵۰۸/۱۷	۱۳۵۱/۷۹	۵/۹۸E-۰۶
۷	۴۵	۱۰۱۹	۳۶۳	۱۸۱	۲۶	۳۶۷۲/۷۴	۲۵۶۶/۴۶	۴/۵۴E-۰۶
۸	۴۵	۹۱۵	۲۶۰	۱۳۰	۱۱	۱۵۲/۴۰	۲۸۴/۳۷	۶/۹۲E-۰۶
۹	۴۵	۱۰۱۲	۳۴۸	۱۷۴	۲۴	۱۳۴/۱۴	۹۷/۷۹	۲/۲۸E-۰۶
۱۰	۴۵	۹۹۰	۳۵۷	۱۷۸	۱۰	۴/۰۷	۰	۰

جدول ۳. نتایج عددی برای مساله با تعداد راس‌های متوسط

n	$\|V\|$	$\|A\|$	$\|A_p\|$	$\|A_R\|$	*NIter*	*BiTime*	*NNodes*	*Gap*
۱	۵۰	۱۱۸۳	۱۵۵	۱۵۵	۳۲	۳۴۲۶/۴۰	۲۴۸۱/۱۷	۰
۲	۵۰	۱۰۸۰	۷۴	۷۴	۱۸	۷۴۴/۵۲	۱۴۹۴/۵۲	۹/۴۹E–۰۶
۳	۵۰	۱۰۸۰	۲۱۹	۲۱۹	۲۴	۵۰۲/۰۸	۳۴۰/۷۱	۲/۹۹E–۰۶
۴	۵۰	۱۱۱۵	۷۹	۷۹	۲۴	۱۵/۷۹	۴	۰
۵	۵۰	۱۲۱۵	۲۱۹	۲۱۹	۱۱	۲۱/۱۸	۴۵/۲۹	۰
۶	۵۰	۱۰۹۰	۱۹۲	۱۹۲	۲۸	۱۱۴۹/۲۷	۶۰۰/۰۸	۲/۴۹E–۰۶
۷	۵۰	۱۱۷۱	۲۴۰	۲۴۰	۱۹	۹۴۳/۳۳	۱۱۲۶/۳۷	۸/۳۴E–۰۷
۸	۵۰	۱۲۴۵	۸۷	۸۷	۱۸	۵۲/۷۹	۴۱۳/۹۲	۰
۹	۵۰	۱۰۹۹	۲۳۷	۲۳۷	۱۳	۱۴/۵۰	۱۷	۰
۱۰	۵۰	۱۱۸۴	۸۱	۸۱	۱۱	۴/۹۸	۱/۳۵	۰

جدول ۴. نتایج عددی برای مساله با تعداد راس‌های زیاد

n	$\|V\|$	$\|A\|$	$\|A_p\|$	$\|A_R\|$	*NIter*	*BiTime*	*NNodes*	*Gap*
۱	۵۵	۱۴۱۵	۳۵۰	۱۷۴	۲۵	۱۶۸۰/۲۶	۱۶۸۰/۵	۹/۱۲E–۰۷
۲	۵۵	۱۵۹۸	۳۳۸	۱۶۹	۳۱	۱۲۷۴/۶۵	۱۰۵۹/۴۶	۵/۴۰E–۰۶
۳	۵۵	۱۴۹۱	۲۶۸	۱۳۳	۹۲۴	۹/۵۸	۳۲/۱۲	۰
۴	۵۵	۱۵۰۸	۵۶۸	۲۸۴	۱۶	۵۱۳/۵۸	۵۰۵/۲۹	۰
۵	۵۵	۱۶۹۲	۴۷۲	۲۳۶	۱۱	۸۸۰/۸۰	۱۷۶۶/۱۶	۷/۵۸E–۰۶
۶	۵۵	۱۶۱۴	۷۱۴	۳۵۷	۲۴	۳۶/۶۷	۳۳/۴۴	۰
۷	۵۵	۱۳۲۸	۲۶۱	۱۳۰	۳۳	۲۳۷/۵۰	۳۴۸/۲۱	۹/۸۷E–۰۷
۸	۵۵	۱۴۸۵	۲۵۹	۱۲۹	۲۴	۲۶۰۷۳/۳۱	۷۴۵۴/۰۸	۱/۲۴E–۰۵
۹	۵۵	۱۲۷۸	۲۴۷	۱۲۳	۱۲	۷۲۵/۳۲	۶۹۵/۵	۲/۲۹E–۰۶
۱۰	۵۵	۱۳۸۶	۳۶۱	۱۸۰		۳۲۲/۳۲	۳۴۵/۹۲	۲/۲۰E–۰۶

همان طور که در جدول‌های ۲ و ۳ و ۴ مشاهده می‌کنید الگوریتم پیشنهاد شده قادر است که مسایل بزرگ را در مدت زمان معقولی حل کند. همچنین مدت زمان حل مساله وابسته به ساختار گراف مساله است و به بزرگی مساله وابسته نیست. از طرفی چون *Gap* عددی بسیار کوچک است پس نتیجه می‌گیریم که نتایج به دست آمده برای مساله مناسب هستند.

فهرست منابع

[1] Golden, B. L., Levy, L., and Vohra, R. 1987 "The orienteering problem," Naval research logistics, vol. 34, pp. 307-318.

[2] Vansteenwegen, P., Souffriau, W., and Van Oudheusden, D. 2011 "The orienteering problem: A survey," European Journal of Operational Research, vol. 209, pp. 1-10.

[3] Chao, I., Golden, B. L., and Wasil, E. A. 1996 "The team orienteering problem," European Journal of Operational Research, vol. 3, pp. 464-474.

[4] Tang, H. and Miller-Hooks, E. 2005 "A tabu search heuristic for the team orienteering problem," Computers & Operations Research, vol. 32, pp. 1379-1407.

[5] Kantor, M. G. and Rosenwein, M. B. 1992 "The orienteering problem with time windows," Journal of the Operational Research Society, vol. 43, pp. 629-635.

[6] Fomin, F .V. and Lingas, A. 2002 "Approximation algorithms for time-dependent orienteering," Information Processing Letters, vol. 83, pp. 57-62.

[7] Ilhan, T., Iravani, S. M., and Daskin, M. S. 2008 "The orienteering problem with stochastic profits," Iie Transactions, vol. 40, pp. 406-421.

[8] Souffriau, W., Vansteenwegen, P., Berghe, G. V., and Van Oudheusden, D. 2011 "The planning of cycle trips in the province of East Flanders," Omega, vol. 39, pp. 209-213.

[9] Archetti, C. and Speranza, M. G. 2014 "Arc Routing Problems with Profits," Arc Routing: Problems, Methods, and Applications, vol. 20, p. 281.

[10] Archetti, C., Feillet, D., Hertz, A., and Speranza, M. G. 2009 "The capacitated team orienteering and profitable tour problems," Journal of the Operational Research Society, vol. 60, pp. 831-842.

[11] Angelelli, E., Archetti, C., and Vindigni, M. 2014 "The clustered orienteering problem," European Journal of Operational Research, vol. 238, pp. 404-414.

[12] Yu, J., Schwager, M., and Rus, D., "Correlated orienteering problem and its application to informative path planning for persistent monitoring tasks," in *Intelligent Robots and Systems (IROS 2014), 2014 IEEE/RSJ International Conference on*, 2014, pp. 342-349.

[13] Van Der Merwe, M., Minas, J., Ozlen, M., and Hearne, J. 2014 "The cooperative orienteering problem with time windows," Optimization Online

[14] Erdoğan, G. and Laporte, G. 2013 "The orienteering problem with variable profits," Networks, vol. 61, pp. 104-116.