دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک الگوریتم نقطه مبدایی ترکیبی برای عملگر حلال در فضای باناخ

وحید داداشی[۱*]، محسن ربانی[۲]

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد ساری، دانشگاه آزاد اسلامی، ساری، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۵/۱۲/۱۴.   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۸/۱۲

چکیده

مسئله‌های تعادل کاربردهای فراوانی در نظریه بهینه سازی و آنالیز محدب دارند و به همین دلیل است که روش‌های متفاوتی برای حل مسئله‌های تعادل در فضاهای مختلف از جمله فضاهای هیلبرت و فضاهای باناخ ارائه شده است. هدف این مقاله، ارائه روشی برای به دست آوردن جواب مسئله تعادل در فضاهای باناخ می‌باشد. در واقع، یک الگوریتم نقطه مبدایی ترکیبی با استفاده از حلال یک عملگر یکنوای ماکسیمال در فضای باناخ را در نظر می‌گیریم. تحت شرایطی مناسب، همگرایی قوی دنباله تولید شده توسط الگوریتم به ریشه عملگر یکنوای ماکسیمال را ثابت می‌کنیم. به عنوان کاربردی از نتیجه اصلی و با استفاده از قضایای ثابت شده، برای هر دوتابع یکنوا می‌توانیم یک عملگر یکنوای ماکسیمال ارائه کنیم به طوریکه، ریشه عملگر یکنوای ماکسیمال همان جواب مسئله تعادل باشد. نتایج این مقاله، تعدادی از نتایج حاصل شده در مقالات مختلف را تعمیم داده یا بهبود می‌بخشد.

واژه‌های کلیدی: مسئله تعادل، عملگر یکنوای ماکسیمال، عملگر حلال در فضای باناخ، الگوریتم نقطه مبدایی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: vahid.dadashi@iausari.ac.ir

۱- مقدمه

مسئله‌های تعادل، مسئله‌های گوناگونی در بهینه سازی و آنالیز محدب مانند مسئله‌های بهینه‌سازی، مسئله‌های نقطه ثابت، نابرابری تغییراتی و ... را متحد می‌کند[۲،۱ و ۳]. به همین دلیل است که مسئله‌های تعادل در علوم نظری و کاربردی دارای اهمیت می‌باشند و روش‌هایی برای حل این مسئله‌ها در فضاهای هیلبرت ارائه شده است[۵،۴ و ۶]. تادا و تاکاهاشی [۷] و تاکاهاشی[۸ و ۹] قضایای همگرایی ضعیف و قوی برای پیدا کردن یک عضو مشترک از مجموعه جواب‌های یک مسئله تعادل و مجموعه نقاط ثابت یک نگاشت غیر انبساطی در فضای هیلبرت را بدست آوردند.

یک روش برای حل مسئله تعادل الگوریتم نقطه مبدایی است که ریشه عملگر یکنوای ماکسیمال را تقریب می-زند. حاجی ساواس و خطیب زاده [۱۰] ثابت کردند که با استفاده از یک تابع مضاعف می‌توان یک عملگر یکنوای ماکسیمال را بدست آورد به طوریکه ریشه عملگر یکنوای ماکسیمال یک جواب مسئله تعادل است. یک الگوریتم شناخته شده برای به دست آوردن ریشه عملگر یکنوای ماکسیمال در فضای هیلبرت توسط راکافلار[۱۱] مطالعه گردید. او همگرایی ضعیف الگوریتم به ریشه عملگر یکنوای ماکسیمال را ثابت نمود[۱۲]

پس از انجام اینکار، بسیاری از نویسندگان، این روش و نسخه‌های اصلاح شده‌اش را مورد مطالعه قرار دادند[۱۳–۱۹] و منابع در آنها. همچنین، آویاما و همکاران روش‌های تصویری برای نگاشت‌های غیرانبساطی اکید در فضاهای هیلبرت معرفی کردند و یک قضیه همگرایی قوی برای یک دنباله از نگاشت‌های غیرانبساطی اکید را با استفاده از این روش ثابت کردند و نتایج را برای مسئله یافتن ریشه عملگر یکنوای ماکسیمال بکار بردند[۲۱–۲۵].

اخیرا، برخی از نویسندگان همگرایی الگوریتم‌های اصلاح شده از نوع مبدایی در فضای باناخ را مورد مطالعه قرار دادند[۲۶–۳۱].

هدف از این مقاله، توسعه بیشتر ایده‌ها در [۲۰] و اثبات یک قضیه همگرایی قوی برای حلال عملگر یکنوای ماکسیمال در فضای باناخ است. از نتایج بدست آمده استفاده نموده و یک جواب مسئله تعادل را پیدا می‌کنیم.

این مقاله به شرح زیر سازمان یافته است. بخش ۲ به جمع آوری برخی از تعاریف هندسه فضاهای باناخ و عملگرهای یکنوا می‌پردازد که در باقی بخش‌ها مورد نیاز خواهد بود. در بخش ۳، الگوریتم جدیدی را ارائه و همگرایی قوی دنباله تولید شده توسط الگوریتم را به ریشه عملگر یکنوای ماکسیمال ثابت می‌کنیم. سر انجام، در بخش ۴، ایده‌های بخش ۳ را برای حل مسئله تعادل بکار می‌بریم.

۲- مفاهیم و تعاریف اولیه

فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی، X^* فضای دوگانX و C زیرمجموعه ناتهی از فضای باناخ X باشند. نگاشت دوگانگی در $X \times X^*$ را با $\langle \cdot . \cdot \rangle$ نشان می‌دهند، یعنی برای هر $x \in X$ و $x^* \in X^*$ داریم $\langle x^*. x\rangle = x^*(x)$. همگرایی ضعیف دنباله $\{x_n\}$ به x را با $x_n \rightharpoonup x$ و همگرایی قوی رابا $x_n \to x$ نشان می‌دهیم. یک تابع $F: C \times C \to \mathbb{R}$ مضاعف نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in C$ داشته باشیم $F(x. x) = 0$. مسئله تعادل زیر را در نظر می‌گیریم که هدف پیدا کردن یک جواب $z \in X$ است به طوری که داشته باشیم

$$F(z. y) \geq 0. \quad \forall y \in C \qquad (۱)$$

نگاشت دوگانگی نرمال J از X به توی خانواده زیرمجموعه‌های ضعیف ستاره فشرده از فضای دوگان X^* را برای هر $x \in X$ به صورت

$$J(x) = \{x^* \in X^*: \langle x^*. x\rangle = \|x^*\|^2 = \|x\|^2\}$$

تعریف می‌کنیم [۳].

لم ۱.[۲] فرض کنید X یک فضای باناخ و J نگاشت دوگان باشد. آنگاه برای $x. y \in X$ داریم

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y. J(x + y)\rangle$$

نرم X را مشتق‌پذیر گتو (و از اینرو X را هموار) می‌نامیم اگر حد

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \qquad (۲)$$

برای هر $x.y \in U := \{z \in X : \| z \| = 1\}$ موجود باشد. نرم را به طور یکنواخت مشتق‌پذیر گتو می‌نامیم اگر برای $y \in U$ ، حد فوق برای $x \in U$ به طور یکنواخت بدست آید. می‌گوییم که فضای X دارای نرم مشتق پذیر فرشه است، اگر برای هر $x \in X$ ، حد در (۲) برای $y \in U$ به طور یکنواخت بدست آید. می‌گوییم که فضای X دارای نرم به طور یکنواخت مشتق پذیر فرشه است (و X به طور یکنواخت هموار) اگر حد در (۲) برای $(x.y) \in U \times U$ به طور یکنواخت بدست آید.
بدیهی است که X هموار است اگر و تنها اگر نگاشت دوگانگی J تک مقداری باشد. همچنین، بدیهی است که اگر X دارای نرم به طور یکنواخت مشتق‌پذیر گتو باشد، آنگاه J به طور یکنواخت نرم به ضعیف ستاره پیوسته روی هر زیرمجموعه کراندار از X است.
فضای نرمدار X را به طور یکنواخت محدب[1] می‌نامیم اگر برای هر $\varepsilon \in (0,2)$، یک $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ موجود باشد به طوریکه اگر $x.y \in X$ صادق در $\|x\| = 1$، $\|y\| = 1$ و $\|x - y\| \geq \varepsilon$ باشد، آنگاه $\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\| \leq 1 - \delta$. فضای نرمدار X را اکیدا محدب[2] می‌نامیم اگر برای هر $x.y \in X$ ، $x \neq y$ و $\|x\| = \|y\| = 1$ داشته باشیم $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1$ که در آن $\lambda \in (0.1)$. بدیهی است که اگر X به طور یکنواخت محدب باشد آنگاه X اکیدا محدب، انعکاسی و دارای ویژگی کادک–کلی می‌باشد، یعنی اینکه یک دنباله $\{x_n\}$ در X همگرای قوی به x است هرگاه $x_n \rightharpoonup x$ و $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$.

مثال. فرض کنید $\mu > 0$ و $c_0 = c_0(\mathbb{N})$.
$x = \{x_n\} \in c_0$ را در نظر گرفته و نرم $\|\cdot\|_\mu$ را به صورت $\|x\|_\mu := \|x\|_{c_0} + \mu(\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{x_i}{n})^2)^{\frac{1}{2}},$
تعریف می‌کنیم که در آن $\|\cdot\|_{c_0}$ نرم متداول روی l_∞ است. برای $\mu > 0$ فضای $(c_0.\|\cdot\|_\mu)$ اکیدا محدب است ولی به طور یکنواخت محدب نیست در حالی که c_0 با نرم متداول خودش اکیدا محدب نیست.

1. Uniformly convex
2. Strictly Convex

تعریف ۲. نگاشت چند مقداری $A: X \to 2^{X^*}$ را یکنوا می‌نامیم اگر برای هر $x.y \in X$ و هر $x^* \in A(x)$ و $y^* \in A(y)$ داشته باشیم
$\langle x^* - y^*. x - y\rangle \geq 0.$

یک عملگر یکنوا $A: X \to 2^{X^*}$ را یکنوای ماکسیمال می‌نامیم هرگاه نمودار آن به طور اکید مشمول در نمودار هر عملگر یکنوای دیگری در فضای یکسان نباشد. دامنه موثر عملگر را به صورت
$D(A) = \{x \in X | A(x) \neq \emptyset\}$

تعریف می‌کنیم.

مثال. هر تابع صعودی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ یک عملگر یکنوای ماکسیمال می‌باشد.

مثال. فرض کنید $f: X \longrightarrow (-\infty. +\infty]$ یک تابع سره محدب نیم پیوسته پایینی باشد. در این صورت عملگر زیردیفرانسیل ∂f که به صورت
$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*. y - x\rangle \leq f(y) - f(x)\}$

تعریف می‌شود یک عملگر یکنوای ماکسیمال است.
فرض کنید C زیرمجموعه محدب و بسته از X باشد. عملگر P_C را عملگر تصویر متریک می‌نامیم اگر به هر $x \in X$ نزدیکترین نقطه $y \in C$ را نسبت دهد به طوریکه
$\|x - y\| = \min\{\|x - z\| : z \in C\}.$

بدیهی است که عملگر تصویر متریک P_C در یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب X پیوسته است و علاوه بر این اگر X به طور یکنواخت هموار باشد آنگاه P_C روی هر زیرمجموعه کراندار از X به طور یکنواخت پیوسته است. یک عضو y را تصویر متریک X به روی C می‌نامیم و با $P_C x$ نشان می‌دهیم.

تصویر متریک در هر نقطه از فضای اکیدا محدب انعکاسی موجود و منحصر به فرد است.

لم ۳. فرض کنید X یک فضای باناخ انعکاسی اکیدا محدب و C زیر مجموعه محدب، بسته و ناتهی از X باشد. آنگاه برای هر $x \in X$ ، $z = P_C x$ است اگر و تنها اگر

$\langle J(x-z). z-y\rangle \geq 0.\ \forall y \in C.$

برای یک دنباله $\{C_n\}$ از زیر مجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای باناخ X ، $s-\mathrm{Li}_n C_n$ و $y \in w-\mathrm{Ls}_n C_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
گوییم $x \in s-\mathrm{Li}_n C_n$ اگر و تنها اگر دنباله $\{x_n\} \subset X$ موجود باشد به طوریکه $\{x_n\}$ همگرای قوی به x و برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \in C_n$ داشته باشیم
به طور مشابه می‌گوییم $y \in w-\mathrm{Ls}_n C_n$ اگر و تنها اگر زیردنباله $\{C_{n_i}\}$ از $\{C_n\}$ و یک دنباله $\{y_i\} \subset X$ موجود باشد به طوریکه $\{y_i\}$ همگرای ضعیف به y و برای هر $i \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $y_i \in C_{n_i}$.
اگر C_0 در تساوی $C_0 = s-\mathrm{Li}_n C_n = w-\mathrm{Ls}_n C_n$ صدق کند، می‌گوییم دنباله $\{C_n\}$ در مفهوم مسکو همگرا به C_0 می‌باشد و به صورت $C_0 = M-\lim_{n\to\infty} C_n$ می‌نویسیم [۳۲].
به راحتی می‌توان نشان داد اگر $\{C_n\}$ تحت رابطه شمولیت نزولی باشد آنگاه $\{C_n\}$ در مفهوم مسکو همگرا به $\cap_{n=1}^{\infty} C_n$ می‌باشد. برای جزئیات بیشتر[۳۲] را ببینید. لم زیرین توسط تسوکادا[۳۳] ثابت شده است.

لم ۴. [۳۳] فرض کنید X یک فضای باناخ انعکاسی اکیدا محدب و $\{C_n\}$ یک دنباله از زیر مجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از X باشد. اگر $C_0 = M-\lim_{n\to\infty} C_n$ موجود و ناتهی باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ ، $P_{C_n}x$ همگرای ضعیف به $P_{C_0}x$ می‌باشد که در آن P_{C_n} و P_{C_0} به ترتیب تصویر متریک از X به C_n و C_0 می‌باشند. علاوه بر این، اگر X دارای ویژگی کادک-کلی باشد، همگرایی قوی خواهد بود.

۳- الگوریتم نقطه مبدایی

یک روش معروف برای حل معادله $0 \in A(p)$ در فضای هیلبرت روش الگوریتم نقطه مبدایی می‌باشد ([۱۱] را ببینید) که در آن $x_1 = x \in H$ یک نقطه دلخواه و $x_{n+1} = J_{r_n}x_n + e_n$ که در آن e_n یک دنباله خطا، $\{r_n\} \subset (0.\infty)$ و برای هر $r > 0$، $J_r = (I + rA)^{-1}$ عملگر حلال برای A می‌باشد.

تعریف ۵. فرض کنید X یک فضای باناخ انعکاسی اکیدا محدب و هموار و $A: X \to 2^{X^*}$ عملگر یکنوای ماکسیمال باشد. عملگر $J_\lambda: X \to D(A)$ تعریف شده به صورت $J_\lambda(x) = x_\lambda$ را عملگر حلال نامیده که x_λ در رابطه $\frac{1}{\lambda}J(x - x_\lambda) \in A(x_\lambda)$ صدق می‌کند. (یادآوری ۴-۱ از فصل ۱ از [۳۴])

الگوریتم ۶. دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n J_{\beta_n} x_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n: \langle y_n - z. J(x_n - y_n)\rangle \geq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x) \end{cases}$$

که در آن $C_1 = C$ زیر مجموعه محدب، بسته و ناتهی از X، $x \in X$ و $\{\beta_n\}$ یک دنباله از اعدادحقیقی مثبت می‌باشند.
ابتدا نشان می‌دهیم که دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم ۶ خوش تعریف است. سپس ثابت می‌کنیم که $\{x_n\}$ همگرای قوی به $P_F(x)$ است که $P_F(x)$ تصویر متریک از X به F است.

لم ۷. فرض کنید X یک فضای باناخ انعکاسی اکیدا محدب و هموار و $A: X \to 2^{X^*}$ عملگر یکنوای ماکسیمال با $F := A^{-1}(0) \neq \emptyset$ و عملگر حلال J_{β_n} باشد. در این صورت دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم ۶ خوش تعریف است.

برهان: به راحتی می‌توان بررسی نمود که برای هر

$n \in \mathbb{N}$ ، C_n یک مجموعه بسته و محدب است. به وضوح داریم $F \subset C = C_1$. فرض کنید که برای یک $n \in \mathbb{N}$، $F \subset C_n$ را داشته باشیم، حال کافی است نشان دهیم $F \subset C_{n+1}$. $p \in F$ را در نظر می‌گیریم، و لذا داریم $0 \in Ap$. قرار دهید $z_n := J_{\beta_n} x_n$. با توجه به یکنوایی A و تعریف عملگر حلال داریم

$$\langle y_n - p . J(x_n - y_n) \rangle \geq 0 \qquad (۳)$$

از تعریف y_n نتیجه می‌شود

$$x_n - y_n = \beta_n (x_n - z_n) \qquad (۴)$$

حال با استفاده از (۳) و (۴) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&\langle y_n - p . J(x_n - y_n) \rangle \\
&= \beta_n \langle y_n - p . J(x_n - z_n) \rangle \\
&= \beta_n (1 - \beta_n) \langle x_n - p . J(x_n - z_n) \rangle \\
&+ \beta_n^2 (1 - \beta_n) \langle z_n - p . J(x_n - z_n) \rangle \\
&\geq \beta_n (1 - \beta_n) (\langle x_n - z_n . J(x_n - z_n) \rangle \\
&+ \langle z_n - p . J(x_n - z_n) \rangle) \\
&= \beta_n (1 - \beta_n) (\| x_n - z_n \|^2 \\
&+ \langle z_n - p . J(x_n - z_n) \rangle) \geq 0,
\end{aligned}$$

بنابراین $p \in C_{n+1}$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ نشان دادیم $F \subset C_n$ و در نتیجه $C_n \neq \emptyset$. پس دنباله $\{x_n\}$ خوش تعریف است.

قضیه ۸. فرض کنید X یک فضای باناخ انعکاسی اکیدا محدب و هموار و $A : X \to 2^{X^*}$ عملگر یکنوای ماکسیمال با $F := A^{-1}(0) \neq \emptyset$ و عملگر حلال J_{β_n} باشد. اگر $\{\beta_n\} \subset (0.1)$ یک دنباله باشد به طوریکه $\liminf_{n \to \infty} \beta_n > 0$. اگر X دارای ویژگی کادک-کلی باشد، آنگاه دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم ۶ همگرای قوی به $P_F(x)$ است که $P_F(x)$ تصویر متریک از X به F است.

برهان: قرار دهید $w = P_F(x)$. چون $x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x)$ و $F \subset C_n$ بدست می‌آوریم

$$\| x_{n+1} - x_1 \| \leq \| w - p \| \qquad (۵)$$

که نشان می‌دهد دنباله $\{x_n\}$ کراندار است. از (۳) و اینکه $w \in F$ است، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle z_n - w . J(x_n - z_n) \rangle \\
&= -\| x_n - z_n \|^2 + \| x_n - z_n \| \| x_n - w \|.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\| x_n - z_n \| \leq \| x_n - w \|.$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$\| y_n - x_n \| = \beta_n \| x_n - J_{\beta_n} x_n \| \leq \| x_n - w \|.$$

که نشان می‌دهد دنباله $\{y_n\}$ نیز کراندار است. قرار دهید $D = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$. چون برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $F \subset C_n$ است، پس $D \neq \emptyset$ با استفاده از لم ۴ نتیجه می‌شود که $x_n = P_{C_n} x \to P_D x = w_0$. با توجه به اینکه $w_0 \in C_{n+1}$، داریم

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle y_n - w_0 . J(x_n - y_n) \rangle \\
&= -\| x_n - y_n \|^2 + \langle x_n - w_0 . J(x_n - y_n) \rangle.
\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\| x_n - y_n \|^2 &\leq \langle x_n - w_0 . J(x_n - y_n) \rangle \\
&\leq \| x_n - w_0 \| \| x_n - y_n \| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

از طرفی طبق (۴) داریم

$$\| x_n - z_n \| = \frac{1}{\beta_n} \| x_n - y_n \| \longrightarrow 0.$$

از رابطه فوق و اینکه $x_n \to w_0$ می‌توان نتیجه گرفت $z_n \to w_0$. فرض کنید $y^* \in Ay$. با توجه به تعریف عملگر حلال، $\frac{1}{\beta_n} J(x_n - z_n) \in Az_n$ و با استفاده از یکنوایی A نتیجه می‌شود

$$0 \leq \langle z_n - y . \frac{1}{\beta_n} J(x_n - z_n) - y^* \rangle.$$

از رابطه فوق حد گرفته و $n \to \infty$ میل می‌دهیم، پس داریم

$$0 \leq \langle w_0 - y . 0 - y^* \rangle.$$

و چون عملگر A یکنوای ماکسیمال است پس باید $0 \in Aw_0$ یا به عبارتی $w_0 \in A^{-1}(0) = F$.
اکنون نشان می‌دهیم که $w_0 = P_F(x)$ از (۵) داریم

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| \leq \| w - x \|.$$

بنابراین، از اینکه $w = P_F(x)$ و $w_0 \in F$ نتیجه می‌گیریم

$$\|w - x\| \le \|w_0 - x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| \le \|w - x\|$$

این به همراه یکتایی $P_F(x)$ ، $w_0 = w = P_F(x)$ را نتیجه می‌دهد و از این رو دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $P_F(x)$ می‌باشد. این برهان را کامل می‌کند.

۴- کاربرد عملگر حلال در حل مسئله تعادل

هدف ما در این بخش این است تا به بحث در مورد کاربردی از نتایج به دست آمده در حل مسئله تعادل بپردازیم. در حال حاضر الگوریتم نقطه مبدایی را برای حل مسئله تعادل در نظر می‌گیریم. در این رابطه، فرض کنید X یک فضای باناخ انعکاسی و C زیر مجموعه ناتهی از X باشد. تابع مضاعف $F: C \times C \to \mathbb{R}$ یکنوا نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x.y \in C$ داشته باشیم $F(x.y) + F(y.x) \le 0$. حاجی ساواس و خطیب زاده [۱۰] عملگر یکنوای A^F را برای هر تابع مضاعف F به صورت زیر معرفی نمودند

$$A^F(x) = \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} x^* \in X^*: F(x.y) \ge \\ \langle x^*.y - x\rangle.\ \forall y \in C \end{matrix} \right\}. & x \in C \\ \emptyset. & x \in X\backslash C. \end{cases}$$

تابع مضاعف F را یکنوای ماکسیمال می‌نامند هرگاه A^F یکنوای ماکسیمال باشد. به وضوح، $\bar{x} \in C$ یک جواب مسئله تعادل (۱) برای F است اگر و تنها اگر $0 \in A^F(\bar{x})$. آنها برای عملگر یکنوای مفروض $A: X \to 2^{X^*}$، تابع مضاعف

$$G_A: D(A) \times D(A) \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$G_A(x.y) = \sup_{x^* \in A(x)} \langle x^*.y - x\rangle.$$

را تعریف نموده و قضیه زیر را ثابت نمودند.

قضیه ۹. اگر عملگر A یکنوای ماکسیمال باشد، آنگاه G_A نیز یکنوای ماکسیمال است. در حقیقت، $A^{G_A} = A$.
قضایای زیرین در [۱۰] برای ماکسیمال بودن تابع مضاعف F ثابت شده است.

قضیه ۱۰. فرض کنید $C \subseteq X$ یک مجموعه محدب، بسته و ناتهی است. اگر F یکنوا، $F(\cdot.y)$ برای هر $y \in C$ نیمه پیوسته بالایی و $F(x.\cdot)$ برای هر $x \in C$ محدب و نیم پیوسته پایینی باشد، آنگاه F یکنوای ماکسیمال است.

قضیه ۱۱. تابع مضاعف یکنوای F یکنوای ماکسیمال است اگر و تنها اگر برای هر $\lambda > 0$ و هر $x \in X$ عضو x_λ موجود باشد به طوریکه برای هر $y \in C$

$$\lambda F(x_\lambda.y) + \langle y - x_\lambda.J(x_\lambda - x)\rangle \ge 0. \quad (۶)$$

این عضو x_λ به طور یکتا تعریف می‌شود.

توجه می کنیم که (۶) برای هر $x \in X$ ، $J_\lambda^{A^F}(x) = x_\lambda$ و $x_\lambda \in D(A^F)$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین، اگر F در فرضیات قضیه ۱۰ صدق کند، آنگاه با استفاده از (۶)، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، x_n و z_n در X موجود است به طوریکه:

$$\begin{cases} \beta_n F(z_n.y) + \langle y - z_n.z_n - x_n\rangle \ge 0.\ \forall y \in C \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n: \langle y_n - z.J(x_n - y_n)\rangle \ge 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x) \end{cases} \quad (۷)$$

که معادل با (۶) است با A^F به جای A . بنابراین، هر نتیجه همگرایی برای دنباله تولید شده توسط (۶) برای دنباله تولید شده توسط (۷) نیز درست است. پس p را یک جواب مسئله تعادل برای F در نظر می گیریم هرگاه $p \in (A^F)^{-1}(0)$. $\{x_n\}$ همگرای قوی به $p \in (A^F)^{-1}(0)$. در حقیقت، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۲. فرض کنید X یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب با نرم مشتق پذیر گتو و $C \subseteq X$ یک مجموعه محدب، بسته و ناتهی باشد. فرض کنید F یک تابع مضاعف یکنوا باشد به طوریکه $F(\cdot.y)$ برای هر $y \in C$ نیمه پیوسته بالایی و $F(x.\cdot)$ برای هر $x \in C$ محدب و نیم پیوسته پایینی باشد. اگر $\{\beta_n\} \subset (0.1)$ یک دنباله باشد به طوریکه $\liminf_{n\to\infty} \beta_n > 0$، آنگاه دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم (۷) همگرای قوی به جواب مسئله تعادل (۱) است.

فهرست منابع

[1] Blum, E., Oettli, W.: From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. Mathematics Student. 63(1), 123-145 (1994)

[2] Takahashi, W.: Nonlinear Functional Analysis. Yokohama Publishers (2000)

[3] Cioranescu, I.: Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems. Springer Science & Business Media 62 (2012)

[4] Combettes, P.L., Hirstoaga, S.A.: Equilibrium programming in Hilbert spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 6(1), 117-136 (2005)

[5] Moudafi, A.: On finite and strong convergence of a proximal method for equilibrium problems. Numer. Funct. Anal. Optim. 28(11-12), 1347-1354 (2007)

[6] Moudafi, A.: Proximal point algorithm extended to equilibrium problems. J. Nat. Geom. 15(1-2), 91-100 (1999)

[7] Tada, A., Takahashi, W.: Strong convergence theorem for an equilibrium problem and a nonexpansive mapping. Nonlinear Convex Anal. 8,609-617 (2007)

[8] Takahashi, S., Takahashi, W.: Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces. J. Math. Anal. Appl. 331(1), 506-515 (2007)

[9] Takahashi, W., Zembayashi, K.: Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces. Nonlinear Anal. 70(1), 45-57 (2009)

[10] Hadjisavvas N.I., Khatibzadeh, H.: Maximal monotonicity of bifunctions. Optimization. 59(2), 147-160, (2010)

[11] Rockafellar, R.T.: Monotone operators and the proximal point algorithm. SIAM J. Control Optim. 14(5), 877-898 (1976)

[12] Rockafellar, R.: On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. Pacific J. Math. 33(1), 209-216 (1970)

[13] Boikanyo, O.A., Morosanu, G.: Modified Rockafellar's algorithms. Math. Sci. Res. J. 13(5), 101-122 (2009)

[14] Khatibzadeh, H.: Some remarks on the proximal point algorithm. J. Optim. Theory Appl. 153(3), 769-778 (2012)

[15] Khatibzadeh, H., Ranjbar, S.: On the strong convergence of Halpern type proximal point algorithm. J. Optim. Theory Appl. 158(2), 385-396 (2013)

[16] Rouhani, B.D., Khatibzadeh, H.: On the proximal point algorithm. J. Optim. Theory Appl. 137(2), 411-417 (2008)

[17] Solodov, M.V., Svaiter, B.F.: A hybrid approximate extragradient proximal point algorithm using the enlargement of a maximal monotone operator. Set-Valued Anal. 7(4), 323-345 (1999)

[18] Solodov, M.V., Svaiter, B.F.: A hybrid projection-proximal point algorithm. J. Convex Anal. 6(1), 59-70 (1999)

[19] Xu, H.K.: Iterative algorithms for nonlinear operators. J. London Math. Soc. 66(1), 240-256 (2002)

[20] Aoyama, K., Kohsaka, F., Takahashi, W.: Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings. Nonlinear Anal. 71(12), 1626-1632 (2009)

[21] Aoyama, K., Kohsaka, F., Takahashi, W.: Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: their relations and continuity properties. J. Nonlinear Convex Anal. 10(1), 131-147 (2009)

[22] Aoyama, K.O., Kohsaka, F,U., Takahashi, W.A.: Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications. in Nonlinear Analysis and Optimization, pp. 1-17, Yokohama Publishers, Yokohama (2009)

[23] Kamimura, S., Takahashi, W.: Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space. SIAM J. Optim. 13(3), 938-945 (2002)

[24] Ohsawa, S., Takahashi, W.: Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces. Arch. Math. 81(4), 439-445 (2003)

[25] Solodov, M.V., Svaiter, B.F.: Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space. Math. Program. 87(1), 189-202 (2000)

[26] Li, L., Song, W.: Modified proximal-point algorithm for maximal monotone operators in Banach spaces. J. Optim. Theory Appl. 138(1), 45-64 (2008)

[27] Matsushita, S.Y., Xu, L.: Finite termination of the proximal point algorithm in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 387(2), 765-769 (2012)

[28] Matsushita, S.Y., Xu, L.: On convergence of the proximal point algorithm in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 139(11), 4087-4095 (2011)

[29] Nakajo, K., Shimoji, K., Takahashi, W.: Strong convergence theorems by the hybrid method for families of mappings in Banach spaces. Nonlinear Anal. 71(3), 812-818 (2009)

[30] Dadashi,V., Khatibzadeh, H.: On the Weak and Strong Convergence of the Proximal Point Algorithm in Reflexive Banach Spaces. Optimization, 66)9), 1487-1494 (2017)

[31] Dadashi,V., Postolache, M.: Hybrid Proximal Point Algorithm and Applications to Equilibrium Problems and Convex Programming. J. Optim. Theory Appl. 174, 518-529 (2017).

[32] Mosco, U.: Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. Adv. Math. 3(4), 510-585 (1969)

[33] Tsukada, M.: Convergence of best approximations in a smooth Banach space. J. Approx. Theory. 40(4), 301-309, (1984)

[34] Barbu, V., Precupanu, Th.: convexity and optimization in Banach spaces. Dordrecht: Springer monographs in mathematics. Springer, 2012