دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مشخصه‌سازی خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای کلاس جدیدی از نگاشت‌های مجموعه مقدار غیرانبساطی

حمیدرضا حاجی شریفی *

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر خوانسار، خوانسار، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۹/۲۵   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۱۳

چکیده

در این مقاله ابتدا کلاس جدیدی از نگاشت‌های مجموعه مقدار را معرفی می‌کنیم، که این نگاشت‌ها را نگاشت‌های مجموعه مقدار از نوع MD می‌نامیم. این کلاس از نگاشت‌هاحالت مجموعه مقدار کلاسی از نگاشت‌های از نوع D، می‌باشند. نگاشت‌های از نوع D، اخیراً توسط کاوخاو و سخوما بعنوان تعمیمی از نگاشت‌های غیرانبساطی معرفی شدند. کلاس نگاشت‌های از نوع MD شامل نگاشت‌های نیم‌پیوسته بالایی از نوع سوزوکی، نگاشت‌های نیم‌پیوسته بالایی از نوع L و نگاشت‌های نیم‌پیوسته بالایی شبه غیرانبساطی است. در این مقاله ارتباط نگاشت‌های از نوع MD با برخی دیگر از تعمیم‌های نگاشت‌های غیرانبساطی بررسی می‌شود. در ادامه نشان می‌دهیم اگر E زیر مجموعه‌ای غیرتهی، محدب و فشرده ضعیف از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ باشد، به طوری که هر خود نگاشت از نوع D روی E دارای نقطه ثابت باشد، آنگاه هر خود نگاشت مجموعه مقدار از نوع MD روی E نیز دارای نقطه ثابت است. این گزاره پاسخی جزئی به مسئله باز مطرح شده توسط رایش را نتیجه می‌دهد. بعلاوه قضایای نقطه ثابت جدیدی برای نگاشت‌های از نوع MD اثبات می‌کنیم، که این قضایا برخی از قضایای نقطه ثابت معروف در این زمینه را تعمیم می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، نگاشت‌های از نوع سوزوکی، شعاع مجانبی، مرکز مجانبی، نگاشت‌های از نوع D.

*عهده‌دار مکاتبات:
Email: h.r.hajisharifi@sci.ui.ac.ir

۱– مقدمه

نظریه نقطه ثابت برای نگاشت‌های تک مقداری و نگاشت‌های مجموعه مقدار در بسیاری از شاخه‌های ریاضی مانند نظریه بازی‌ها، بهینه سازی و حل معادلات دیفرانسیل و حتی در برخی از علوم دیگر مانند اقتصاد و علوم مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. یکی از روش‌های مهم برای تعمیم قضایای نقطه ثابت در حالت تک مقداری، اثبات این قضایا در حالت مجموعه مقدار می‌باشد. برای مثال در سال ۱۹۶۹ نادلر حالت مجموعه مقدار اصل انقباضی باناخ[1] را اثبات نمود [۱]. بعد از آن بسیاری از محققین، سعی در اثبات حالت مجموعه مقدار قضایای مهم و اساسی در نظریه نقطه ثابت کردند. در این راستا با توجه به اهمیت بسزای نگاشت‌های غیرانبساطی در نظریه نقطه ثابت متریکی، بسیاری از پژوهشگران تلاش کردند که حالت مجموعه مقدار قضیه‌های نقطه ثابت بدست آمده برای نگاشت‌های غیرانبساطی را اثبات کنند. برای مثال‌هایی از کارهای انجام شده در این جهت، می توان به نتایج بدست آمده توسط لامی دوزو [۲]، لیم [۳] و کرک و مسا [۴] در رابطه با نقطه ثابت نگاشت‌های غیرانبساطی مجموعه مقدار اشاره کرد. لازم به ذکر است که با توجه به پیچیدگی‌هایی که برای نگاشت‌های مجموعه مقدار وجود دارد، حالت مجموعه مقدار بسیاری از نتایج نقطه ثابت برای نگاشت‌های غیرانبساطی هم چنان حل نشده باقی مانده‌اند، که از جمله این مسائل می‌توان به حالت مجموعه مقدار قضیه معروف و اساسی کرک اشاره کرد که در سال ۱۹۶۵ اثبات شد [۵].

در سال ۱۹۸۳ رایش مسئله‌ای به صورت زیر مطرح کرد.

مسئله رایش[۶]**:** فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی، محدب و فشرده ضعیف از فضای باناخ $(X,||.||)$ باشد، به‌طوری‌که هر خود نگاشت روی E (نگاشت از E به E) که غیرانبساطی تک مقداری است، دارای نقطه ثابت باشد. آیا در این حالت، هر خود نگاشت غیرانبساطی مجموعه مقدار دارای نقطه ثابت می‌شود؟

1. Banach contraction Principle

لازم به ذکر است که این مسئله هم چنان حل نشده باقی مانده است و حتی چنان که در بالا اشاره شد، در حالت‌های خاص مانند حالت مجموعه مقدار قضیه کرک نیز مسئله حل نشده است.

در سال‌های اخیر در راستای تعمیم قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های مجموعه مقدار برخی از محققین سعی کردند که این قضایا را در حالت تک مقداری یا مجموعه مقدار برای کلاس‌های بزرگتری از نگاشت‌ها، که شامل نگاشت‌های غیرانبساطی هستند، اثبات نمایند. به عنوان مثال به مراجع [۷–۹] مراجعه شود.

در این مقاله ابتدا حالت مجموعه مقدار کلاسی از نگاشت‌های از نوع D که توسط کاوخاو و سخوما به عنوان تعمیمی از نگاشت‌های غیرانبساطی معرفی شده‌اند [۱۰]، را تعریف می‌کنیم. سپس ارتباط این کلاس از نگاشت‌ها با برخی دیگر از نگاشت های مجموعه مقدار که تعمیمی از نگاشت‌های غیرانبساطی هستند را بررسی می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم، مسئله رایش برای این دسته از نگاشت‌ها بجای نگاشت‌های غیرانبساطی برقرار است. بدین ترتیب پاسخی در حالت خاص به مسئله رایش داده می‌شود.

برای مشاهده کاربردهایی از نقطه ثابت نگاشت‌های مجموعه مقدار به منابع [۱۱و۱۲] مراجعه کنید.

۲– مفاهیم و قضیه‌های اولیه

در سرتاسر این مقاله $(X,||.||)$ را یک فضای باناخ حقیقی و $P(X)$، $CB(X)$ و $KC(X)$ را به ترتیب خانواده‌ی زیرمجموعه‌های غیرتهی از X، خانواده‌ی زیر مجموعه‌های غیرتهی، بسته و کران‌دار از X و خانواده‌ی زیر مجموعه‌های غیرتهی، محدب و فشرده از X در نظر می‌گیریم.

برای هر $A \in CB(X)$ و $x \in X$ قرار دهید،

$$d(x,A) := \inf_{y\in A}||x-y||.$$

بعلاوه برای $A,B \in CB(X)$ قرار دهید،

$$H(A,B) = \max\left\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\right\}.$$

نگاشت H را متریک پمپیو–هاسدورف[۲] روی فضای باناخ $(X, \|.\|)$ می‌نامند.

تعریف ۲-۱[۱۱]: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ باشد. نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to CB(E)$ را غیرانبساطی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in E$ داشته باشیم،
$H(Tx, Ty) \leq \|x - y\|.$

در سال‌های اخیر، برخی از پژوهشگران توسیع‌هایی از نگاشت‌های غیرانبساطی را ارائه کرده و سعی در تعمیم قضایای نقطه ثابت موجود برای نگاشت‌های غیرانبساطی، برای این دسته از توابع نموده‌اند. در ادامه بعضی از این کلاس از توابع که در این مقاله مورد نیاز می‌باشند را معرفی می‌نماییم.

تعریف ۲-۲[۱۳]: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ باشد. نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to P(E)$ را از نوع سوزوکی[۳] می‌نامیم، هرگاه تابع صعودی $\psi: (0, \infty) \to (0, \infty)$ چنان موجود باشد، که برای هر $x, y \in E$ و $u_x \in Tx$ با شرط
$\|x - u_x\| - \psi(\|x - u_x\|) \leq \|x - y\|,$

وجود داشته باشد $u_y \in Ty$، به‌طوری‌که
$\|u_x - u_y\| \leq \|x - y\|.$

تبصره ۲-۳: واضح است که هر نگاشت مجموعه مقدار غیرانبساطی با مقادیر فشرده، نگاشتی از نوع سوزوکی است. بعلاوه هر نگاشت مجموعه مقدار با مقادیر فشرده و با خاصیت C_λ برای هر $\lambda \in (0,1)$، که در [۱۴] تعریف شده‌اند و تعمیمی از نگاشت‌های غیرانبساطی هستند، نگاشت‌هایی از نوع سوزوکی با $\psi(t) = (1 - \lambda)t$ می‌باشند.

تعریف ۲-۴[۱۱]: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیر تهی از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ و $T: E \to CB(E)$ نگاشتی مجموعه مقدار باشد. در این صورت دنباله‌ی $(x_n) \subseteq E$ را یک دنباله‌ینقطه ثابت تقریبی[۴] از نگاشت T گوییم، هرگاه داشته باشیم، $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

تعریف ۲-۵[۹]: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیر تهی، بسته، محدب و کران‌دار از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ باشد. نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to CB(E)$ را از نوع L (دارای خاصیت L) می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند، (الف) اگر $D \subseteq E$، غیرتهی، محدب، بسته و T- پایا (برای هر $x \in D$، $Tx \subseteq D$) باشد، آنگاه D شامل حداقل یک دنباله‌ی نقطه ثابت تقریبی از T باشد.
(ب) برای هر دنباله‌ی نقطه ثابت تقریبی $(x_n) \subseteq E$ از نگاشت T و هر $x \in E$ داشته باشیم،
$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tx) \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

تعریف ۲-۶ [۱۱]: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ باشد. نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to CB(E)$ را شبه غیرانبساطی[۵] گوییم، هرگاه $Fix(T) \neq \emptyset$ و برای هر $x \in Fix(T)$ و $y \in E$ داشته باشیم،
$H(Tx, Ty) \leq \|x - y\|.$

که در آن $Fix(T)$ مجموعه‌ی نقاط ثابت نگاشت T است.

تعریف ۲-۷[۱۱]: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی و (x_n) دنباله‌ای کران‌دار از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ باشد. در این صورت شعاع مجانبی[۶] و مرکز مجانبی[۷] دنباله‌ی (x_n) نسبت به مجموعه‌ی E به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

2. Pompeiu-Hausdorff metric
3. Suzuki type

4. Approximate fixed point seqence
5. Quasi nonexpansive
6. Asymptotic radius
7. Asymptotic center

$r(E,(x_n)) := \inf\{\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| : x \in E\}$,

و

$A(E,(x_n)) := \{x \in E : \limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| = r(E,(x_n))\}$.

لازم به ذکر است، طبق لم (۹،۱) از [۱۱]، اگر E غیرتهی، محدب و فشرده ضعیف باشد، آنگاه $A(E,(x_n))$ نیز غیرتهی، محدب و فشرده ضعیف است. همچنین با توجه به صفحه ۱۶۷ از [۱۱]، اگر فضای باناخ $(X,\|.\|)$ از هر جهت محدب اکید[8] باشد، آنگاه $A(E,(x_n))$ دقیقاً یک نقطه است. بعلاوه دنباله‌ی (x_n) را به طور مجانبی یکنواخت نسبت به E گوییم، اگر برای هر زیر دنباله (x_{n_k}) از (x_n) داشته باشیم،

$$r\left(E,(x_{n_k})\right) = r(E,(x_n)),$$

و

$$A\left(E,(x_{n_k})\right) = A(E,(x_n)).$$

اخیراً کاوخاو و سخوما نگاشت‌های از نوع D را، به عنوان تعمیمی از نگاشت‌های غیرانبساطی، به صورت زیر معرفی کردند.

تعریف۲-۸[۱۰]**:** فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی، کران‌دار، بسته و محدب از فضای باناخ $(X,\|.\|)$ باشد. دنباله‌ی (x_n) از X را یک دنباله‌ی مجانب مرکزی[9] برای نگاشت $T: E \to X$ گوییم، هرگاه برای هر $x \in E$ داشته باشیم،

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - Tx\| \le \limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\|.$$

بعلاوه نگاشت $T: E \to X$ را از نوع D می‌نامیم، هرگاه این نگاشت پیوسته بوده و دارای دنباله‌ای مجانب مرکزی باشد.

تعریف۲-۹: فضای باناخ $(X,\|.\|)$ را دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای نگاشت‌های از نوع D گوییم، هرگاه هر خود نگاشت از نوع D تعریف شده روی یک زیر مجموعه‌ی غیرتهی، فشرده ضعیف و محدب از فضای باناخ X دارای نقطه ثابت باشد.

قضیه۲-۱۰[۱۰]**:** فضای باناخ $(X,\|.\|)$ دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای نگاشت‌های از نوع D است، اگر و تنها اگر برای هر دنباله‌ی کران دار در X، مرکز مجانبی نسبت به هر زیر مجموعه ی غیر تهی، محدب و فشرده ضعیف از X، فشرده باشد.

تعریف۲-۱۱[۱۱]**:** فرض کنید $(X,\|.\|)$یک فضای باناخ باشد. در این صورت نگاشت مجموعه مقدار $T: X \to P(X)$ را نیم‌پیوسته بالایی[10] گوییم، هرگاه برای هر زیر مجموعه‌ی باز U از X، مجموعه‌ی $\{x \in X: Tx \subseteq U\}$ باز باشد.

۳- نگاشت‌های مجموعه مقدار از نوع MD

تعریف۳-۱: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی، کران‌دار، بسته و محدب از فضای باناخ $(X,\|.\|)$ باشد. دنباله‌ی به‌طور مجانبی یکنواخت نسبت به E، (x_n) از X را یک دنباله‌ی مجانب مرکزی برای نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to KC(X)$ گوییم، هرگاه برای هر $x \in E$ داشته باشیم،

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tx) \le \limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\|.$$

بعلاوه نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to KC(X)$ را از نوع MD می‌نامیم، هرگاه این نگاشت نیم‌پیوسته بالایی بوده و دارای دنباله‌ای مجانب مرکزی باشد.

تعریف۳-۲: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی، کران‌دار، بسته و محدب از فضای باناخ $(X,\|.\|)$ باشد. دنباله‌ی به‌طور مجانبی یکنواخت نسبت به E، (x_n) از

8. Uniformly convex in every direction
9. Asymptotic center sequence
10. Upper semi-continuous

X را یک دنباله‌ی به‌طور اکید مجانب مرکزی[11] برای نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to KC(X)$ می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in E$ که $x \notin Tx$ داشته باشیم،

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tx) < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

در ادامه کلاس‌هایی از نگاشت‌های مجموعه مقدار از نوع MD را مشخص خواهیم کرد.

گزاره۳-۳: فرض کنید K زیر مجموعه‌ای غیرتهی، کران‌دار، بسته و محدب از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ باشد. فرض کنید نگاشت مجموعه مقدار $T: K \to KC(K)$ نیم‌پیوسته بالایی و از نوع سوزوکی باشد. در این صورت زیر مجموعه‌ی غیرتهی، کران‌دار، بسته و محدب E از K چنان وجود دارد که نگاشت $T: E \to KC(E)$، نگاشتی از نوع MD است.

اثبات: چون T خود نگاشتی نیم‌پیوسته بالایی است، لذا با توجه به توضیحات صفحات ۳۵و ۳۶ از [۱۱]، زیر مجموعه‌ی غیرتهی، کران‌دار، بسته، محدب و جداپذیر E از K چنان وجود دارد که، $T: E \to KC(E)$ نگاشتی از نوع سوزوکی و نیم‌پیوسته بالایی است. اکنون با استفاده از لم (۲،۴) در [۱۳]، نگاشت $T: E \to KC(E)$ دارای دنباله‌ی نقطه ثابت تقریبی است، بنابراین فرض کنید (x_n) یک دنباله‌ی نقطه ثابت تقریبی آن باشد. با استفاده لم (۱۵،۳) از [۱۱]، می‌توان فرض کرد که این دنباله به‌طور مجانبی یکنواخت نسبت به E است. اکنون $x \in E$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| > 0$. چون برای هر $n \in \mathbb{N}$، Tx_n مجموعه‌ای فشرده است، بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n \in Tx_n$ چنان وجود دارد که، $d(x_n, Tx_n) = \|x_n - y_n\|$. با توجه به این که (x_n) یک دنباله نقطه ثابت تقریبی برای T است، پس $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ و در نتیجه، داریم $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$. حال قرار می‌دهیم، $\varepsilon = \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|$. بنابراین به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ $n \in \mathbb{N}$ داریم،

$$\|x_n - y_n\| - \psi(\|x_n - y_n\|) \leq \|x_n - y_n\| < \varepsilon < \|x_n - x\|.$$

اکنون چون T نگاشتی از نوع سوزوکی است، پس به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ $n \in \mathbb{N}$، $u_n \in Tx$ چنان وجود دارد که $\|y_n - u_n\| \leq \|x_n - x\|$. بدین ترتیب به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$d(x_n, Tx) \leq \|x_n - u_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - u_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \|x_n - x\|.$$

حال اگر از طرفین نامساوی بالا $\limsup_{n\to\infty}$ بگیریم، آنگاه بدست می‌آوریم،

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tx) \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

از طرفی اگر $\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$، آنگاه زیر دنباله‌ی (x_{n_k}) از دنباله (x_n) چنان وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} \|x_{n_k} - x\| = 0$. حال چون نگاشت T نیم‌پیوسته بالایی است، بنابراین با توجه به [۱۱]، نگاشت $f(x) = d(x, Tx)$ روی E نیم‌پیوسته پایینی است، پس داریم،

$$d(x, Tx) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) = 0.$$

بنابراین $d(x, Tx) = 0$ و در نتیجه

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tx) \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| + d(x, Tx) = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

گزاره۳-۴: فرض کنید K زیر مجموعه‌ای غیرتهی، کران‌دار، بسته و محدب از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ باشد. فرض کنید نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to KC(E)$ نیم‌پیوسته بالایی و از نوع L باشد. در این صورت زیر مجموعه‌ی غیرتهی، کران‌دار، بسته و محدب E از K چنان وجود دارد که نگاشت $T: E \to KC(E)$، نگاشتی از نوع MD است.

اثبات: در ابتدا همانند اثبات گزاره۳-۳، زیر مجموعه‌ی غیرتهی، کران‌دار، بسته، محدب و جداپذیر E از K چنان وجود دارد که، $T: E \to KC(E)$ نگاشتی از نوع L و

11. Strict asymptotic center sequence

نیم‌پیوسته بالایی است. حال طبق تعریف نگاشت‌های از نوع L نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to KC(E)$، دارای دنباله‌ی نقطه ثابت تقریبی است. با استفاده از لم (۱۵،۳) از [۱۱]، نشان داده می‌شود، هر دنباله‌ی نقطه ثابت تقریبی از $T: \mathrm{E} \to KC(E)$، شامل یک دنباله‌ی مجانب مرکزی برای آن است. بنابراین $T: \mathrm{E} \to KC(E)$ نگاشتی از نوع MD خواهد بود.

گزاره۳-۵: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی، کران‌دار، بسته و محدب از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ باشد. فرض کنید نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to KC(E)$ نیم‌پیوسته بالایی و شبه غیرانبساطی باشد. در این صورت T نگاشتی از نوع MD است.

اثبات: چون T نگاشتی شبه غیرانبساطی است، پس $Fix(T) \neq \emptyset$. بنابراین فرض کنید $x_0 \in Fix(T)$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید $x_n := x_0$. در نتیجه با توجه به تعریف نگاشت‌های شبه غیرانبساطی برای هر $x \in E$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$d(x_n, Tx) \leq H(Tx_n, Tx) \leq \|x_n - x\|.$$

در نتیجه برای هر $x \in E$ بدست می‌آوریم،

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tx) \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

بدین ترتیب T نگاشتی از نوع MD است.

تبصره۳-۶: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی، کران‌دار، بسته و محدب از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ باشد. فرض کنید نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to KC(E)$ نگاشتی غیرانبساطی و بدون نقطه ثابت باشد، مانند حالت مجموعه مقدار نگاشت معرفی شده در [۱۵]. در این صورت T نگاشتی از نوع MD می‌باشد، ولی نگاشتی شبه غیرانبساطی نیست. بنابراین کلاس نگاشت‌های مجموعه مقدار از نوع MD به طور اکید شامل کلاس نگاشت‌های شبه غیرانبساطی نیم‌پیوسته بالایی است.

۴- نتایج نقطه ثابت

تعریف۴-۱: فضای باناخ $(X, \|.\|)$ را دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای نگاشت‌های مجموعه مقدار از نوع MD گوییم، هرگاه هر خود نگاشت مجموعه مقدار از نوع MD تعریف شده روی یک زیر مجموعه‌ی غیرتهی، فشرده ضعیف و محدب از فضای باناخ X، دارای نقطه ثابت باشد.

قضیه۴-۲: فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد. در این صورت X دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای نگاشت‌های مجموعه مقدار از نوع MD است، هرگاه X دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای نگاشت‌های از نوع D باشد.

اثبات: فرض کنید $(X, \|.\|)$ دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای نگاشت‌های از نوع D باشد، در این صورت با توجه به قضیه۲-۱۰ برای هر دنباله‌ی کران‌دار در X، مرکز مجانبی نسبت به هر زیر مجموعه‌ی غیرتهی، محدب و فشرده ضعیف از X، فشرده است.

حال فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی، محدب و فشرده ضعیف از فضای باناخ X، نگاشت مجموعه مقدار $T: E \to KC(E)$ از نوع MD و (x_n) یک دنباله‌ی مرکز مجانبی از T باشد. فرض کنید r و A به ترتیب شعاع مجانبی و مرکز مجانبی دنباله‌ی (x_n) نسبت به مجموعه‌ی E باشند. در این صورت طبق فرض قضیه، A زیر مجموعه‌ای فشرده از X است. اکنون ادعا می‌کنیم، برای هر $z \in A$، $Tz \cap A \neq \emptyset$.

برای اثبات ادعای فوق $z \in A$ را در نظر بگیرید. چون Tz مجموعه‌ای فشرده است، بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$، $z_n \in Tz$ چنان وجود دارد که،

$$\|x_n - z_n\| = d(x_n, Tz). \qquad (۱)$$

از طرفی چون T نگاشتی مجموعه مقدار از نوع MD است، پس داریم،

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tz) \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - z\|. \qquad (۲)$$

حال با استفاده از (۱) و (۲) خواهیم داشت،

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - z_n\| \le \limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tz) \le \limsup_{n\to\infty}\|x_n - z\| \quad (۳)$$

اکنون با توجه به این که Tz مجموعه‌ای فشرده است، زیر دنباله‌ی (z_{n_k}) از (z_n) چنان وجود دارد که $z_{n_k} \to z_0 \in Tz$. در نتیجه با استفاده از (۳) داریم،

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_{n_k} - z_0\| \le \limsup_{n\to\infty}\|x_{n_k} - z_{n_k}\| + \limsup_{n\to\infty}\|z_{n_k} - z_0\| = \limsup_{n\to\infty}\|x_{n_k} - z_{n_k}\| \le \limsup_{n\to\infty}\|x_n - z_n\| \le \limsup_{n\to\infty}\|x_n - z\| = r.$$

بنابراین با توجه به تعاریف شعاع مجانبی و مرکز مجانبی یک دنباله نسبت به یک مجموعه و این که طبق تعریف دنباله‌ی مرکز مجانبی، این دنباله به‌طور مجانبی یکنواخت نسبت به E است، پس $z_0 \in A(E,(x_{n_k}))$، و داریم، $z_0 \in A$. در نتیجه $z_0 \in Tz \cap A$. بدین ترتیب چون $z \in A$ دلخواه بود، لذا ادعا اثبات شد.
حال نگاشت مجموعه مقدار $\tilde{T}: A \to KC(A)$ را برای هر $z \in A$ به صورت $\tilde{T} = Tz \cap A$ تعریف می‌کنیم.
با توجه به ادعای بالا نگاشت مجموعه مقدار $\tilde{T}$ خوش تعریف است و چون T نگاشتی نیم‌پیوسته بالایی است، بنابراین با توجه به [۱۶]، نگاشت $\tilde{T}$ نیز نیم‌پیوسته بالایی است. از طرفی چون A مجموعه‌ای فشرده و محدب و برای هر $z \in A$، Tz نیز مجموعه‌ای فشرده و محدب است، بنابراین برای هر $z \in A$، $\tilde{T}z$ مجموعه‌ای فشرده و محدب خواهد بود. اکنون با استفاده از قضیه کاکوتانی–بوهنن بلاست–کارلین [۱۲]، $\tilde{\mathrm{T}}$ دارای نقطه ثابت است و بنابراین نگاشت T نیز دارای نقطه ثابت می‌باشد.
اکنون با برهانی مشابه قضیه (۳،۴) از [۱۰] و با توجه به برهان قضیه۴–۲ نتیجه زیر را داریم. این نتیجه پاسخی به مسئله رایش در حالتی خاص است.

نتیجه۴–۳: فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.

(الف) X دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای نگاشت‌های مجموعه مقدار از نوع MD است.
(ب) برای هر زیر مجموعه‌ای غیرتهی، فشرده ضعیف و محدب E از X، هر نگاشت از نوع D، $T: E \to E$ که دارای دنباله‌ی مجانب مرکزی، به‌طور مجانبی یکنواخت نسبت به E باشد. دارای خاصیت نقطه ثابت است.
(ج) برای هر مجموعه‌ی غیرتهی، فشرده ضعیف و محدب مانند E از X، اگر دنباله‌ی کران‌دار (x_n) در X به طور مجانبی یکنواخت نسبت به E باشد، آنگاه $A(E,(x_n))$ فشرده است.
با استفاده از قضیه۲–۱۰، گزاره۳–۳ و قضیه۴–۲ نتیجه‌ی زیر که تعمیمی از قضیه‌ی کرک و مسا در [۴] نیز است، بدست می‌آید.

نتیجه۴–۴(بناویدس و رامیرز) [۱۳]**:** فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ باشد، که در آن برای هر دنباله کران‌دار در X، مرکز مجانبی نسبت به هر زیر مجموعه‌ی غیرتهی، محدب و فشرده ضعیف از X، فشرده است. در این صورت X دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای نگاشت‌های مجموعه مقدار نیم‌پیوسته بالایی با مقادیر فشرده از نوع سوزوکی است، یعنیهر خود نگاشت مجموعه مقدار نیم پیوسته بالایی با مقادیر فشرده و از نوع سوزوکی که روی یک زیر مجموعه‌ی غیرتهی، فشرده ضعیف و محدب از فضای باناخ X تعریف شده است، دارای نقطه ثابت می‌باشد.

تبصره۴–۵: با توجه به این که کلاس نگاشت‌های مجموعه مقدار از نوع سوزوکی شامل کلاس نگاشت‌های فشرده مقدار با خاصیت C_λ برای هر $\lambda \in (0,1)$ می‌باشد، لذا نتیجه۴–۴ برای نگاشت های با مقادیر فشرده و با خاصیت C_λ برای هر $\lambda \in (0,1)$ نیز برقرار است.
فرض کنید فضای باناخ $(X,\|.\|)$ از هر جهت محدب اکید باشد. در این صورت برای هر دنباله‌ی کران‌دار در X، مرکز مجانبی نسبت به هر زیر مجموعه‌ی غیر تهی، محدب و فشرده ضعیف از X، مجموعه‌ای تک نقطه‌ای

است و لذا فشرده می‌باشد. بنابراین با استفاده از نتیجه ۴-۳ نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه۴-۶: فرض کنید فضای باناخ $(X, \|.\|)$ از هر جهت محدب اکید باشد. در این صورت X دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف برای نگاشت‌های مجموعه مقدار از نوع MD است.

قضیه۴-۷: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ و $(x_n) \subseteq X$ یک دنباله‌ی به طور اکید مجانب مرکزی برای نگاشت $T: E \to KC(E)$ باشد. در این صورت $A(E, (x_n)) \subseteq Fix(T)$.

اثبات: واضح است که اگر $A\big(E, (x_n)\big) = \emptyset$، آنگاه حکم قضیه برقرار است. بنابراین فرض کنید، $A\big(E, (x_n)\big) \neq \emptyset$.

حال با برهان خلف، فرض کنید $x \in A(E, (x_n))$ ولی $x \notin Fix(T)$ در نتیجه $x \notin Tx$ و با توجه به این که (x_n) یک دنباله‌ی به‌طور اکید مجانب مرکزی برای نگاشت T است، پس،

$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty} d(x_n, Tx) < \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \|x_n - x\| = r\big(E, (x_n)\big). \qquad (۴)$$

اکنون با توجه به فشرده بودن Tx، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $z_n \in Tx$ چنان وجود دارد که،

$$d(x_n, Tx) = \|x_n - z_n\| \qquad (۴)$$

پس با استفاده از (۴) و (۵) داریم،

$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| < \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \|x_n - x\| = r\big(E, (x_n)\big). \qquad (۵)$$

از طرفی با توجه به فشرده بودن Tx، زیر دنباله‌ی (z_{n_k}) از (z_n) چنان وجود دارد که، $z_{n_k} \to z \in Tx$. بنابراین با استفاده از (۶) خواهیم داشت،

$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty} \|x_{n_k} - z\| \leq \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \|x_{n_k} - z_{n_k}\| + \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \|z_{n_k} - z\| =$$

$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty} \|x_{n_k} - z_{n_k}\| \leq \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| < \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \|x_n - x\| = r\big(E, (x_n)\big),$$

پس $\operatorname{limsup}_{n\to\infty} \|x_{n_k} - z\| < r(E, (x_{n_k}))$، زیرا دنباله‌ی (x_n)، به‌طور مجانبی یکنواخت نسبت به E است، که با تعریف شعاع مجانبی یک دنباله در تناقض است. بنابراین برای هر $x \in A(E, (x_n))$ داریم، $x \in Fix(T)$ و بدین ترتیب،

$$A(E, (x_n)) \subseteq Fix(T).$$

نتیجه۴-۸: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ و $(x_n) \subseteq X$ یک دنباله‌ی به‌طور اکید مجانب مرکزی برای نگاشت $\mathrm{T: E \to KC(E)}$ باشد. در این صورت اگر $Fix(T) = \emptyset$، آنگاه $A(E, (x_n)) = \emptyset$.

نتیجه۴-۹: فرض کنید E زیر مجموعه‌ای غیرتهی، فشرده ضعیف و محدب از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ و $(x_n) \subseteq X$ یک دنباله‌ی به‌طور اکید مجانب مرکزی برای نگاشت مجموعه مقدار $\mathrm{T: E \to KC(E)}$ باشد. در این صورت نگاشت T دارای نقطه ثابت است.

اثبات: چون E زیر مجموعه‌ای غیرتهی، فشرده ضعیف و محدب از فضای باناخ $(X, \|.\|)$ است، پس $A(E, (x_n)) \neq \emptyset$ و بنابراین با توجه به قضیه۴-۷، $Fix(T) \neq \emptyset$. در نتیجه نگاشت T دارای نقطه ثابت است.

فهرست منابع

[1] S. B. Nadler Jr. Multi-valued contraction mappings. Pacific Journal of Mathematics 30:475-488 (1969)

[2] E. LamiDozo. Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition. Proceedings of the American Mathematical Society 38:286-292 (1973)

[3] T. C. Lim. A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convexBanach space. Bulletin of the American Mathematical Society 80:1123-1126 (1974)

[4] W. A. Kirk, S. Massa.Remarks on asymptotic and Chebyshev centers. Houston Journal of Mathematics 16:357-364 (1990)

[5] W. A. Kirk.A fixed point theorem for mappings which do not increase distance. The American Mathematical Monthly 72:1004-1006 (1965)

[6] S. Reich. Some problems and results in fixed point theory. Contemporary Mathematics 21:178-187 (1983)

[7] A. Abkar, M. Eslamian.A fixed point theorem for generalized nonexpansive multivalued mappings. Fixed Point Theory 12:241-246 (2011)

[8] A. Abkar, M. Eslamian.Generalized nonexpansive multivalued mappings in strictly convex Banach spaces. Fixed Point Theory 14:269-280 (2013)

[9] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster, E. Moreno Gaávez. Fixed point theory for multivalued generalized nonexpansive mappings. Applicable Analysis and Discrete Mathematics 6:265-286 (2012)

[10] A. Kaewkhao, K. Sokhuma.Remarks on asymptotic centers and fixed points.Abstract and Applied Analysis Article ID 247402, 5 pages (2010)

[11] K. Goebel, W. A. Kirk. Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990)

[12] E. Zeidler. Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems. Springer, New York (1986)

[13] T. Domínguez Benavides, P. Lorenzo Ramírez.A further generalization of nonexpansivity. Journal of Nonlinear and Convex Analysis 15:299-311 (2014)

[14] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster, T. Suzuki. Fixed point theory for a class of generalized nonexpansivemappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications 375:185-195 (2011)

[15] D. E. Alspach.A fixed point free nonexpansive map.Proceedings of the American Mathematical Society 82:423-424(1981)

[16] S. Hu, N. S. Papageorgiou.Handbook of Multivalued Analysis. Math and Its Applications, vol419, Kluwer Academic Publishers (1997)