دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

ایدآل همریختی‌های مشبکه‌ای متناظر به حاصل‌ضرب دو مشبکه دلخواه و مشبکه [۲]

لیلا شریفان [*۱]، غزاله ملک‌بالا [۲]

[۱] استادیار، گروه ریاضی محض، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران (نویسنده مسئول).
[۲] دانشجوی دکترای جبر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۹/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۳/۲۱

چکیده

فرض کنید L و M دو مشبکه متناهی باشند، ایدآل $J(L.M)$ یک ایدآل تک جمله‌ای در یک حلقه چندجمله‌ای مشخص است که مولدهای مینیمال تک جمله‌ای آن در تناظر با همریختی‌های مشبکه‌ای $\phi: L \rightarrow M$ قرار دارند. این ایدآل، ایدآل همریختی‌های مشبکه‌ای نام دارد. در این مقاله به مطالعه $J(L.M)$ در حالتی که L حاصل ضرب دو مشبکه متناهی L_1 و L_2 است و M زنجیر(۲) می‌باشد، می‌پردازیم. ابتدا مجموعه همه همریختی‌های مشبکه‌ای $\phi: L \rightarrow [2]$ را بر حسب مجموعه همه همریختی‌های مشبکه‌ای $\phi_1: L_1 \rightarrow [2]$ و مجموعه همه همریختی‌های مشبکه‌ای $\phi_2: L_2 \rightarrow [2]$ شناسایی می‌کنیم. سپس با استفاده از آن ایدآل‌های اول وابسته به $J(L.[2])$ را به کمک ایدآل‌های اول وابسته به $J(L_1.[2])$ و $J(L_2.[2])$ مطالعه می‌کنیم. در ادامه فرض می‌کنیم $L_1 = [2]$ و مجموعه $ass\big(J(L.[2])\big)$ را شناسایی می‌کنیم. سپس به کمک تکنیک مخروط نگارنده و تحلیل آزاد مینیمال $J(L_2.[2])$، یک تحلیل آزاد برای $J(L.[2])$ و یک کران بالا برای بعد تصویری آن به دست می‌آوریم. در نهایت، با مفروضات بالا برای حالتی که $L_2 = [n]$، تحلیل آزاد مینیمال $J(L.[2])$ را محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی. ایدآل همریختی‌های مشبکه‌ای، حاصل‌ضرب دو مشبکه، ایدآل اول وابسته، تحلیل آزاد مینیمال.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: leila-sharifan@aut.ac.ir

۱- مقدمه

مطالعه ایدآل‌های تک جمله‌ای حلقه چندجمله‌ای‌ها و بیان ارتباط بین ویژگی‌های جبری این ایدآل‌ها و ویژگی‌های ترکیباتی اشیا ترکیباتی که به آنها نظیر می‌شود از مباحث مهم و جذاب جبر جابجایی است. به عنوان نمونه یک تناظر یک به یک بین ایدآل‌های تک جمله‌ای از مربع آزاد حلقه $\mathbb{K}[x_1.\dots.x_n]$ و مجتمع‌های سادکی روی $\{1.\dots.n\}$ وجود دارد (ببینید بخش ۶٫۱ از(۱۵)).

در سال‌های اخیر، برخی محققین روی دسته‌ای از ایدآل‌های تک جمله‌ای تمرکز کرده‌اند که به ساختارهای جبری مرتب نسبت داده می‌شوند. در میان آنها می‌توان به ایدآل‌های هیبی که به مجموعه مرتب جزیی P نسبت داده می‌شود و توسط هرزوگ و هیبی در سال ۲۰۰۵ معرفی شده است اشاره کرد (مرجع(۲)). در سال ۲۰۱۱ نیز ایدآل‌های هیبی تعمیم یافته در(۳) معرفی شده‌اند. یک تعمیم دیگر از این ایدآل‌ها ، ایدآل‌های همریختی‌های یکنوا می‌باشند (ببینید تعریف۷۰۲). این ایدآل‌ها در مقاله(۴) معرفی شده‌اند و در مقاله‌های(۵) و(۶) بیشتر مطالعه شده‌اند.

توجه کنید که هر ایدآل همریختی‌های یکنوا به یک جفت مجموعه جزئی مرتب متناهی نسبت داده می‌شود. نویسندگان این مقاله و استاجی در(۷)، مشابه مفهوم ایدآل همریختی‌های یکنوا، به یک جفت مشبکه متناهی $(L.M)$، یک ایدآل تک جمله‌ای از مربع آزاد به نام ایدآل همریختی‌های مشبکه‌ای نسبت داده‌اند و آن را با نماد $J(L.M)$ نمایش داده‌اند. (ببینید تعریف ۸٫۲).

مقاله(۷) اساسا به مطالعه ایدآل‌های اول وابسته به $J(L.M)$ می‌پردازد و مباحث مطرح شده نشان می‌دهد که شناسایی کامل ایدآل‌های اول وابسته به $J(L.M)$ کار نسبتا مشکلی است. در مقاله فوق اعضایی از $ass(J(L.M))$ که کمترین ارتفاع دارند در حالتی که L یک مشبکه توزیع‌پذیر است کاملا شناسایی می‌شوند (قضیه ۳ از(۷)) و در ادامه $ass(J(L.[2]))$ مطالعه می‌شود. به عنوان مثال یک کران بالا برای ارتفاع ایدآل‌های اول وابسته به $J(L.[2])$ بر حسب ویژگی‌های مشبکه L ارائه می‌شود قضیه ۱۰ از(۷)) و یک شرط لازم و کافی برای این که یک ایدآل اول تک جمله‌ای عضو $ass(J(L.[2]))$ باشد ارائه می‌شود (نتیجه ۱۱ از(۷)). اما کماکان مسئله شناسایی کامل $ass(J(L.[2]))$ حل نشده باقی می‌ماند.

در این مقاله، به مطالعه ایدآل $J(L_1 \times L_2.[2])$ که L_1 و L_2 دو مشبکه متناهی‌اند می‌پردازیم. ابتدا مجموعه همریختی‌های مشبکه‌ای $\phi: L_1 \times L_2 \to [2]$ را برحسب مجموعه همریختی‌های مشبکه‌ای $L_1 \to [2]$ و مجموعه همریختی‌های مشبکه‌ای $L_2 \to [2]$ شناسایی می‌کنیم (نتیجه ۲٫۳). در ادامه به کمک نتیجه فوق یک کران بالا برای ارتفاع اعضای $ass(J(L_1 \times L_2.[2]))$ بر حسب کران بالای ارتفاع اعضای $ass(J(L_1.[2]))$ و کران بالای ارتفاع اعضای $ass(J(L_2.[2]))$ به دست می‌آوریم (قضیه ۳٫۳).

در بخش چهارم، ایدآل $J([2] \times L.[2])$ را مطالعه می‌کنیم و $ass(J([2] \times L.[2]))$ را بر حسب $ass(J(L.[2]))$ به طور کامل شناسایی می‌کنیم (ببینید قضیه ۱٫۴)

در بخش پنجم، ویژگی‌های همولوژیکی $J([2] \times L.[2])$ را بر حسب ویژگی‌های $J(L.[2])$ به دست می‌آوریم. توجه کنید که اساس کار در این بخش تکنیک مخروط نگارنده است و مهم‌ترین نتیجه این بخش محاسبه تحلیل آزاد مینیمال $J([2] \times [n].[2])$ می‌باشد (ببینید قضیه ۲٫۵).

۲- تعاریف اولیه و پیش نیازها

تعریف ۲-۱: فرض کنید P یک مجموعه ناتهی باشد. رابطه $\leq$ را ترتیب جزیی روی P نامیم اگر بازتابی، متعدی و پادمتقارن باشد. اگر $\leq$ یک ترتیب جزیی روی P باشد می‌گوییم که $(P.\leq)$ مجموعه‌ای جزئی مرتب است.

تعریف ۲-۲: مجموعه جزئی مرتب $(P.\leq)$ را زنجیر گوییم اگر برای هر $x.y\epsilon P$ دست کم یکی از روابط $x \leq y$ یا $y \leq x$ برقرار باشد. زنجیر $1 < 2 < 3 < \dots < n$ را با $[n]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۳: فرض کنید $(P.\leq)$ یک مجموعه جزئی مرتب و $X \subseteq P$. عضو $a\epsilon P$ را مقطع X گوییم و

می‌نویسیم $a = \wedge X$ هرگاه a بزرگترین کران پایین X باشد. اگر $X = \{x.y\}$ آن‌گاه $\wedge X$ را با $x \wedge y$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب b را اتصال X گوییم و می‌نویسیم $b = \vee X$ هرگاه b کوچکترین کران بالای X باشد و اگر $X = \{x.y\}$ آن‌گاه $\vee X$ را با $x \vee y$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-٤: یک مجموعه‌ی جزئی مرتب L را مشبکه نامیم هر گاه هر زیرمجموعه متناهی از L دارای مقطع واتصال باشد.

در سر تا سر این مقاله مشبکه‌ها متناهی فرض می‌شوند. هر مشبکه متناهی L دارای بزرگترین عضو و کوچکترین عضو است که آنها را به ترتیب با 1_L و 0_L نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۵: فرض کنید P و Q دو مجموعه جزئی مرتب باشند نگاشت $\phi: P \to Q$ را همریختی حافظ ترتیب یا یکنوا گوییم هرگاه برای هر $a.b \epsilon P$ که $a \leq b$ داشته باشیم $\phi(a) \leq \phi(b)$

مجموعه تمام همریختی‌های یکنوا از P به Q را با $Hom_{Pos}(P.Q)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲-٦: فرض کنید L و M دو مشبکه باشند نگاشت $\phi: L \to M$ را یک همریختی مشبکه‌ای گوییم هرگاه ϕ حافظ مقطع و اتصال متناهی باشد یعنی برای هر $l_1.l_2 \epsilon L$

$\phi(l_1 \wedge l_2) = \phi(l_1) \wedge \phi(l_1)$و

$\phi(l_1 \vee l_2) = \phi(l_1) \vee \phi(l_2)$

مجموعه تمام همریختی‌های مشبکه‌ای از L به M را با $Hom_{Lat}(L.M)$ نشان می‌دهیم.

در ادامه، قصد داریم متناظر به مجموعه‌های جزیی مرتب متناهی P و Q، ایدآل همریختی‌های یکنوا وابسته به P و Q و نیز متناظر به مشبکه‌های متناهی L و M، ایدآل همریختی‌های مشبکه‌ای وابسته به L و M را تعریف کنیم و چون هر دوی این ایدآل‌ها، ایدآل‌های تک جمله‌ای هستند نیاز داریم که مفاهیم اساسی مربوط به ایدآل های تک جمله‌ای را یادآوری کنیم.

فرض کنید $\mathbb{K}$ یک میدان باشد و حلقه چندجمله‌ای‌های $R = \mathbb{K}[x_1. \dots . x_n]$ را در نظر بگیرید هر حاصل‌ضرب $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ که $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ یک تک جمله‌ای نامیده می‌شود. ایدآل $I \subseteq R$ را که توسط تک جمله‌ای‌ها تولید می‌شود یک ایدآل تک جمله‌ای گوییم و طبق نتیجه ۱,۳,۹ از[1] هر ایدآل اول وابسته به ایدآل تک جمله‌ای I توسط یک زیرمجموعه از $\{x_1. \dots . x_n\}$ تولید می‌شود.

یک تک جمله‌ای $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ از مربع آزاد نامیده می‌شود اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، $\alpha_i \in \{0.1\}$، یک ایدآل تک جمله‌ای I را ایدآل تک جمله‌ای از مربع آزاد گوییم هرگاه توسط تک جمله‌ای‌های از مربع آزاد تولید شود.

تعریف ۲-۷: فرض کنید P و Q مجموعه‌های جزئی مرتب متناهی باشند. در این صورت حلقه چندجمله‌ای‌های روی میدان $\mathbb{K}$ در متغیرهای $\mathrm{x}_{\mathrm{p.q}}$ که در آن $p \epsilon P$ و $q \epsilon Q$ را S می‌نامیم و برای هر $\phi \epsilon Hom_{Pos}(P.Q)$ تک‌جمله‌ای

$$u_\phi = \prod_{p \epsilon P} x_{p.\phi(p)}$$

را درنظر می‌گیریم. ایدآل همریختی‌های یکنوا وابسته به P و Q را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$I(P.Q) = (u_\phi; \phi \epsilon Hom_{Pos}(P.Q))$

تعریف ۲-۸: همانند تعریف بالا برای مشبکه‌های متناهی L و M ایدآل همریختی‌های مشبکه‌ای وابسته به L و M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$J(L.M) = (u_\phi; \phi \epsilon Hom_{Lat}(L.M))$

در این مقاله ایدآل فوق را برای مشبکه‌های خاصی بررسی می‌کنیم. توجه کنید که $J(L.M) \subseteq I(L.M)$ و هر دو آنها ایدآل‌های تک جمله‌ای از مربع آزاد هستند و بنابراین طبق نتیجه ۱,۲,۵ از(۱)، هر دو ایدآل‌های رادیکال‌اند. چون ایدآل‌های فوق تک جمله‌ای‌اند، بنا بر نتیجه ۹,۳,۱ از(۱)، ایدآل‌های اول وابسته به آنها (اعضای $ass(I(L.M))$ و $ass(J(L.M))$) ایدآل‌های تک جمله‌ای‌اند. پس هر عضو $ass(J(L.M))$ توسط برخی

متغیرهای حلقه تولید می‌شود. به علاوه بنا بر رادیکال بودن $J(L.M)$، همواره داریم $Min(J(L.M)) = ass(J(L.M))$.

در بحث شناسایی $ass(J(L.[2]))$، لم ساده زیر از(۷)، حائز اهمیت است.

لم۲-۹. فرض کنید L یک مشبکه متناهی باشد. اگر $(x_{l_1.m_1}.\dots.x_{l_n.m_n})\epsilon ass(J(L.[2]))$ آنگاه $a.b\epsilon L$ و $1 \le i \neq j \le n$ موجودند که $x_{l_i.m_i} = x_{a.1}$ و $x_{l_j.m_j} = x_{b.2}$

در آخرین بخش این مقاله به بررسی تحلیل آزاد مینیمال $J([2] \times L.[2])$ می‌پردازیم. برای آشنایی کامل و دقیق با تحلیل آزاد مدول‌های مدرج روی حلقه چند جمله‌ای‌ها می‌توان به کتاب بسیار زیبای(۸) مراجعه کرد. توجه کنید که مطالعه پایاهای عددی نظیر شده به تحلیل آزاد مینیمال نظیر بعد تصویری، اعداد بتی و عدد نظم در درک ویژگی‌های مدول بسیار موثر است.

در ادامه به یادآوری مفهوم تحلیل آزاد مینیمال، بعد تصویری، اعداد بتی و تکنیک مخروط نگارنده می‌پردازیم. توجه کنید که تکنیک مخروط نگارنده به صورت موثر در بخش آخر این مقاله استفاده می‌شود.

تعریف ۲-۱۰: فرض کنید $R = \mathbb{K}[x_1.\dots.x_n]$ و M یک R- مدول مدرج متناهی تولید شده و m ایدآل ماکسیمال مدرج R باشد یک دنباله مدرج دقیق به صورت

$$0 \to F_t \overset{\delta_t}{\to} \dots \overset{\delta_2}{\to} F_1 \overset{\delta_1}{\to} F_0 \overset{\delta_0}{\to} M \to 0$$

که در آن F_iها، R- مدول‌های آزاد مدرج‌اند، R- تحلیل آزاد مینیمال M نام دارد هرگاه δ_iها همریختی‌های از درجه صفر باشند و برای هر i، $Im\,\delta_i \subseteq mF_{i-1}$.

توجه کنید که هر F_i به صورت $F_i = \bigoplus R(-\beta_{ij})$ می‌باشد که $\{\beta_{ij}\}$ دنباله اعداد بتی M نام دارد بعد تصویری M عبارت است از

$$pd(M) = \max\{i \mid F_i \neq 0\}.$$

تکنیک مخروط نگارنده.

فرض کنید I یک ایدآل همگن از حلقه چندجمله‌ای‌های $R = \mathbb{K}[x_1.\dots.x_n]$ باشد و f یک عضو همگن از R باشد که $f \notin I$. در این صورت دنباله دقیق زیر

$$0 \to \frac{R}{(I:f)} \to \frac{R}{I} \to \frac{R}{I+(f)} \to 0$$

وجود دارد. اگر $(\mathbb{F}.\boldsymbol{\delta})$ یک R- تحلیل آزاد از $\frac{R}{I}$ و $(\mathbb{G}.\boldsymbol{\partial})$ یک R- تحلیل آزاد از $\frac{R}{(I:f)}$ باشند آن‌گاه می‌توانیم با استفاده از تکنیک مخروط نگارنده متناظر همریختی همبافتی $\psi: \mathbb{G} \to \mathbb{F}$ که بالابر همریختی $\frac{R}{(I:f)} \to \frac{R}{I}$ است، یک تحلیل $(\mathbb{M}(\psi).\boldsymbol{\gamma})$ از $\frac{R}{I+(f)}$ را به دست آوریم. در واقع مخروط نگارنده $\mathbb{M}(\psi)$ همبافتی است که

$$\left(\mathbb{M}(\psi)\right)_i = \mathbb{F}_i \oplus \mathbb{G}_{i-1}$$

و نگاشت‌های دیفرانسیل

$$\gamma_i(x.y) = (\psi_{i-1}(y) + \delta_i(x).\partial_{i-1}(y))$$

که در آن $x\epsilon\mathbb{F}_i$ و $y\epsilon\mathbb{G}_{i-1}$. این همبافت دقیق است بنابراین یک تحلیل آزاد برای $\frac{R}{I+(f)}$ است.(ببینید صفحه ۶۵۰ و گزاره A.۳,۱۹ از مرجع(۹).

۳. مطالعه$J(L_1 \times L_2.[2])$ با استفاده از $J(L_1.[2])$ و $J(L_2.[2])$

فرض کنید L_1 و L_2 دو مشبکه متناهی باشند. در این صورت $L_1 \times L_2$ نیز یک مشبکه متناهی است. توجه کنید که در $L_1 \times L_2$ اعمال $\wedge$ و $\vee$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$(l_1.l_2) \wedge (l'_1.l'_2) = (l_1 \wedge l'_1.l_2 \wedge l'_2)$

و$(l_1.l_2) \vee (l'_1.l'_2) = (l_1 \vee l'_1.l_2 \vee l'_2)$.

اگر $L_1.L_2$ و مشبکه توزیع‌پذیر باشند، آنگاه $L_1 \times L_2$ نیز مشبکه‌ای توزیع‌پذیر است.

در این بخش قصد داریم $J(L_1 \times L_2.[2])$ را با استفاده از$J(L_1.[2])$ و $J(L_2.[2])$ مطالعه کنیم.

ابتدا اعضای $Hom_{Lat}(L_1 \times L_2.[2])$ را بر حسب اعضای $Hom_{Lat}(L_1.[2])$ و $Hom_{Lat}(L_2.[2])$ شناسایی می‌کنیم.

لم ۳-۱. نگاشت $\varphi: L_1 \times L_2 \to [2]$ یک همریختی مشبکه‌ای است اگر و فقط اگر φ در یکی از شرط‌های زیر صدق کند.

الف) نگاشت $\varphi_1 \epsilon Hom_{Lat}(L_1.[2])$ موجود باشد به طوری‌که برای هر

$(l_1.l_2)\epsilon L_1 \times L_2$،

$$\varphi(l_1.l_2) = \varphi_1(l_1)$$

ب) نگاشت $\varphi_2 \epsilon Hom_{Lat}(L_2.[2])$ موجود باشد که برای هر $(l_1.l_2)\epsilon L_1 \times L_2$ داشته باشیم.

$$\varphi(l_1.l_2) = \varphi_2(l_2)$$

برهان. ابتدا فرض کنید $\varphi: L_1 \times L_2 \to [2]$ یک همریختی مشبکه‌ای دلخواه باشد. در این صورت همریختی‌های $\varphi_1: L_1 \to [2]$ و $\varphi_2: L_2 \to [2]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi_1(l_1) = \varphi(l_1.1_{L_2})$$

و $\varphi_2(l_2) = \varphi(1_{L_1}.l_2)$.

واضح است که $\varphi_2.\varphi_1$ هر دو همریختی‌های مشبکه‌ای هستند. نشان می‌دهیم که یکی از دو شرط زیر برقرار است.

۱) برای هر $(l_1.l_2)\epsilon L_1 \times L_2$
$\varphi(l_1.l_2) = \varphi_1(l_1)$.

۲) برای هر $(l_1.l_2)\epsilon L_1 \times L_2$
$\varphi(l_1.l_2) = \varphi_2(l_2)$

فرض کنید چنین نباشد. بنابراین $(l_1.l_2)\epsilon L_1 \times L_2$ و $(l'_1.l'_2)\epsilon L_1 \times L_2$ موجودند که

$$\varphi(l_1.l_2) \neq \varphi\left(l_1.1_{L_2}\right)$$

و

$$.\varphi(l'_1.l'_2) \neq \varphi\left(1_{L_1}.l'_2\right)$$

بنابراین $\varphi(l_1.l_2) = 1$ و $\varphi(l_1.1_{L_2}) = 2$ و علاوه بر این $\varphi(l'_1.l'_2) = 1$ و $\varphi(1_{L_1}.l'_2) = 2$.

در نتیجه

$$\varphi(l_1.l_2) \vee \varphi(l'_1.l'_2) = \varphi(l_1 \vee l'_1.l_2 \vee l'_2) = 1 \quad (1)$$

همچنین داریم

$$\varphi(l_1.1_{L_2}) \wedge \varphi(1_{L_1}.l'_2) = \varphi(l_1.l'_2) = 2 \quad (2)$$

از روابط ۱ و ۲ داریم:

$$\varphi(l_1.l'_2) \wedge \varphi(l_1 \vee l'_1.l_2 \vee l'_2) = 1$$

و چون φ یک همریختی مشبکه‌ای است داریم:

$$\varphi(l_1 \wedge (l_1 \vee l'_1).l'_2 \wedge (l_2 \vee l'_2)) = 1$$
$$\Longrightarrow \varphi(l_1.l'_2) = 1$$

که این متناقض با رابطه(۲) است. بنابراین فرض خلف باطل است و حکم برقرار می‌باشد.

برعکس فرض کنید $\varphi_1: L_1 \to [2]$ یک همریختی مشبکه‌ای باشد. نگاشت $\varphi: L_1 \times L_2 \to [2]$ را با ضابطه $\varphi(l_1.l_2) = \varphi_1(l_1)$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که φ همریختی مشبکه‌ای است. داریم:

$$\begin{aligned}\varphi\big((l_1.l_2) \wedge (l'_1.l'_2)\big) &= \varphi(l_1 \wedge l'_1.l_2 \wedge l'_2)\\ &= \varphi_1(l_1 \wedge l'_1)\\ &= \varphi_1(l_1) \wedge \varphi_1(l'_1)\\ &= \varphi(l_1.l_2) \wedge \varphi(l'_1.l'_2).\end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان دید که

$$\varphi\big((l_1.l_2) \vee (l'_1.l'_2)\big) = \varphi(l_1.l_2) \vee \varphi(l'_1.l'_2)$$

پس φ یک همریختی مشبکه‌ای است.

حال فرض کنید $\varphi_2: L_2 \longrightarrow [2]$ یک همریختی مشبکه‌ای باشد و نگاشت $\varphi: L_1 \times L_2 \to [2]$ را با تعریف $\varphi(l_1.l_2) = \varphi_2(l_2)$ در نظر می‌گیریم. همانند بالا، به سادگی می‌توان دید که φ همریختی مشبکه‌ای است.

نتیجه ۳-۲. فرض کنید $L_2.L_1$ دو مشبکه متناهی دلخواه باشند در این صورت موارد زیر برقرارند.

الف)

$$|Hom_{Lat}(L_1 \times L_2.[2])| = |Hom_{Lat}(L_1.[2])| + |Hom_{Lat}(L_2.[2])| - 2$$

ب) اگر $Hom_{Lat}(L_1.[2]) = \{\theta_1.\dots.\theta_m\}$ و $\theta_2.\theta_1$ به ترتیب همریختی‌های مشبکه‌ای ثابت ۱ و ۲ باشند و

$Hom_{Lat}(L_2.[2]) = \{\psi_1.\dots.\psi_n\}$

و $\psi_2.\psi_1$ به ترتیب همریختی‌های مشبکه‌ای ثابت ۱ و ۲ باشند آنگاه

$$Hom_{Lat}(L_1 \times L_2.[2])$$
$$= \{\phi_1.\dots.\phi_m.\phi_{m+1}.\dots.\phi_{m+n-2}\}$$

که در این جا برای هر $1 \le i \le m$ و برای هر $(l_1.l_2)\epsilon L_1 \times L_2$

$$\phi_i(l_1.l_2) = \theta_i(l_1)$$

و برای هر $m+1 \le i \le m+n-2$

$$\phi_i(l_1.l_2) = \psi_{i-m+2}(l_2).$$

برهان. ابتدا توجه کنید که همریختی‌های مشبکه‌ای القایی از $\psi_2.\psi_1$ به ترتیب همان $\phi_2.\phi_1$ می‌باشند. و با توجه به لم ۱،۳، واضح است که هر عضو $Hom_{Lat}(L_1 \times L_2.[2])$ باید به صورت یکی از ϕ_iها باشد. پس ب) به وضوح برقرار است. برای اثبات الف) تنها کافی است نشان دهیم که ϕ_iهای داده شده دو به دو متمایزند.

فرض کنیم $1 \le i \le m$. $1 \le j \le n$ و

$$\phi: L_1 \times L_2 \to [2]$$
$$(l_1.l_2) \longmapsto \theta_i(l_1)$$

و

$$\phi': L_1 \times L_2 \to [2]$$
$$.(l_1.l_2) \longmapsto \psi_j(l_2)$$

اگر دو همریختی مشبکه‌ای $\phi'.\phi$ مساوی باشند داریم

$$\forall(l_1.l_2)\epsilon L_1 \times L_2$$
$$\phi(l_1.l_2) = \phi'(l_1.l_2) \Rightarrow$$
$$\forall\, l_1\epsilon L_1.\forall l_2\epsilon L_2\,.\theta_i(l_1) = \psi_j(l_2) \qquad (3)$$

حال اگر $\psi_j(0_{L_2}) = 1$ آنگاه طبق رابطه(۳) برای هر $l_1\epsilon L_1$ داریم $\theta_i(l_1) = 1$.

در نتیجه θ_i همریختی مشبکه‌ای ثابت ۱ است و به علاوه با استفاده مجدد از رابطه(۳) برای هر $l_2\epsilon L_2$ داریم: $\psi_j(l_2) = 1$ و ψ_j همریختی مشبکه‌ای ثابت ۱ است. به طور مشابه اگر $\psi_j(0_{L_2}) = 2$ می‌توان دید که هر دوی $\theta_i.\psi_j$ همریختی‌های مشبکه‌ای ثابت ۲ می‌باشند. همان‌طورکه گفتیم هدف ما بیان ارتباط $J(L_1 \times L_2.[2])$ با $J(L_1.[2])$ و $J(L_2.[2])$ است. فرض کنید $S_2.S_1.S$ به ترتیب حلقه‌های چند جمله‌ای زیر باشند.

$$S_1 = \mathbb{K}\left[x_{l_{1.m}}\,.\ l_1\epsilon L_1.m\epsilon[2]\right]$$
$$S_2 = \mathbb{K}\left[x_{l_{2.m}}\,.\ l_2\epsilon L_2.m\epsilon[2]\right]$$
$$S = \mathbb{K}\left[x_{(l_1.l_2).m}\,.(l_1.l_2)\epsilon L_1 \times L_2.m\epsilon[2]\right]$$

در این صورت به وضوح $J(L_1.[2])$و $J(L_2.[2])$ و $J(L_1 \times L_2.[2])$به ترتیب ایدآل‌های حلقه‌های S_1، S_2 و S هستند.

برای هر مشبکه دلخواه L قرار دهید

$$W(L) = max\,\{htP|P\epsilon ass(J(L.[2]))\}.$$

در قضیه زیر یک کران بالا برای $W(L_1 \times L_2)$ برحسب $W(L_1)$ و $W(L_2)$ ارائه می‌دهیم.

قضیه۳-۳: فرض کنید $L_2.L_1$ دو مشبکه متناهی باشند. در این صورت

$$W(L_1 \times L_2) \le W(L_1) + W(L_2).$$

برهان. ابتدا توجه کنید که با توجه به نتیجه ۲،۳ و با استفاده از نمادگذاری‌های آن

$$J(L_1.[2]) = \left(u_{\theta_1}.\dots.u_{\theta_m}\right) \subseteq S_1$$
$$J(L_2.[2]) = \left(u_{\psi_1}.\dots.u_{\psi_n}\right) \subseteq S_2$$

همچنین

$$J(L_1 \times L_2.[2])$$
$$= \left(u_{\phi_1}.\dots.u_{\phi_m}.u_{\phi_{m+1}}.\dots.u_{\phi_{m+n-2}}\right) \subseteq S$$

حال فرض کنید

$$P = \left(x_{(l_1.l'_1).\lambda_1}.\dots.x_{(l_t.l'_t).\lambda_t}\right)\epsilon$$
$$ass(J(L_1 \times L_2.[2])).$$

که در آن برای هر $1 \le j \le t$، $(l_j.l'_j)\epsilon L_1 \times L_2$ و $\lambda_j\epsilon[2]$. اما چون $J(L_1 \times L_2.[2]) \subseteq P$، برای هر $1 \le i \le m+n-2$ یک $1 \le j \le t$موجود است به طوری‌که $x_{(l_j.l'_j).\lambda_j}|u_{\phi_i}$.

همچنین برای هر $1 \le i \le m$، با توجه به تعریف ϕ_i، داریم $x_{(l_j.l'_j).\lambda_j}\,|u_{\phi_i} \Leftrightarrow \lambda_{l_j.\lambda_j}|u_{\theta_i}$.

بنابراین $J(L_1.[2]) \subseteq$

$$\left(x_{l_1.\lambda_1}.\dots.x_{l_t.\lambda_t}\right) \qquad (4)$$

توجه کنید که $\phi_2.\phi_1$ را می‌توان همریختی‌های مشبکه ای القایی از $\psi_2.\psi_1$ در نظر گرفت. بنابراین

$$.x_{(l_j.l'_j).\lambda_j}\left|u_{\phi_1} \Leftrightarrow x_{l'_j.\lambda_j}\right|u_{\psi_1}$$
$$x_{(l_j.l'_j).\lambda_j}\left|u_{\phi_2} \Leftrightarrow x_{l'_j.\lambda_j}\right|u_{\psi_2}.$$

و در نهایت تعاریف $\phi_{n+1}.\dots.\phi_{m+n-2}$ نشان می‌دهد که برای هر $m+1 \le i \le m+n-2$:

$$x_{(l_j.l'_j).\lambda_j}\left|u_{\phi_i} \Leftrightarrow x_{l'_j.\lambda_j}\right|u_{\psi_{i-m+2}}$$

و در مجموع داریم

$$J(L_2.[2]) \subseteq. \left(x_{l'_1.\lambda_1}.\dots.x_{l'_t.\lambda_t}\right) \qquad (5)$$

از طرفی طبق رابطه(۴)، $P_1 \epsilon ass(J(L_1.[2]))$ موجود است که $P_1 \subseteq \left(x_{l_1.\lambda_1}.\dots.x_{l_t.\lambda_t}\right)$.
واضح است که P_1 توسط زیر مجموعه‌ای از $\{x_{l_1.\lambda_1}.\dots.x_{l_t.\lambda_t}\}$ که حداکثر $W(L_1)$ عضو دارد تولید می‌شود. اکنون فرض کنید

$t' \le W(L_1)$ که $P_1 = (x_{l_{i1}.\lambda_{i1}}.\dots.x_{l_{it'}.\lambda_{it'}})$
به طور مشابه طبق رابطه(۵)، $P_2 \epsilon ass(J(L_2.[2]))$ موجود است که $P_2 \subseteq (x_{l'_1.\lambda_1}.\dots.x_{l'_t.\lambda_t})$.
واضح است که P_2 توسط زیر مجموعه‌ای از $\{x_{l'_1.\lambda_1}.\dots.x_{l'_t.\lambda_t}\}$ که حداکثر $W(L_2)$ عضو دارد تولید می‌شود. فرض کنید

که $P_2 = (x_{l'_{j1}.\lambda_{j1}}.\dots.x_{l'_{jt''}.\lambda_{jt''}})$ اکنون قرار دهید $t'' \le W(L_2)$

$$P' = (x_{(l_{i1}.l'_{i1}).\lambda_{i1}}.\dots.x_{(l_{it'}.l'_{it'}).\lambda_{it'}}.$$
$$x_{(l_{j1}.l'_{j1}).\lambda_{j1}}.\dots.x_{(l_{jt''}.l'_{jt''}).\lambda_{jt''}}).$$

با این تعریف، P' ایدآل اولی از حلقه S است که ارتفاع آن حداکثر برابر $t'+t''$ است.
با توجه به بحث‌های بالا، $J(L_1 \times L_2.[2]) \subseteq P' \subseteq P$ و چون P یک ایدآل اول مینیمال $J(L_1 \times L_2.[2])$ است داریم $P' = P$ و این نشان می‌دهد که

$$.htP \le t' + t'' \le W(L_1) + W(L_2)$$

مثال۳-٤. فرض کنید $L_1 = [2]$ و $L_2 = [n]$. در این صورت طبق قضیه(۱۹) از مقاله(۷)، $W(L_1 \times L_2) = 3$. در حالی که $W(L_1) = W(L_2) = 2$.

زیرا L_1 و L_2 هر دو زنجیرند و طبق نتیجه ۵ از مقاله[7]، $J(L_1.[2])$ و $J(L_2.[2])$ ایدآل‌های ناآمیخته‌اند که هر اول وابسته آنها از ارتفاع ۲ است. در این جا

$$W(L_1 \times L_2) < W(L_1) + W(L_2)$$

اگر $L_1 = [m]$ و $L_2 = [n]$ که $m.n > 2$ آن‌گاه طبق قضیه ۲٫۵ مقاله(۷) داریم:

$$W(L_1 \times L_2) = W(L_1) + W(L_2) = 4$$

بخش ٤. مطالعه $J([2] \times L.[2])$

در این بخش تمرکز خود را روی ایدآل‌های همریختی‌های مشبکه‌ای قرار می‌دهیم که در آنها مشبکه دامنه به صورت $L \times [2]$ است و L یک مشبکه دلخواه متناهی می‌باشد.
فرض کنید

$$ass(J(L.[2])) = \{P_1.\dots.P_r\}.$$

طبق لم ۱۰٫۲ برای هر $1 \le i \le r$، مجموعه‌های ناتهی $B_i.A_i$ چنان موجودند که $A_i \subseteq L$ و $B_i \subseteq L$ و

$$P_i = (x_{a.1}.x_{b.2}\ ;\ a\epsilon A_i.b\epsilon B_i)$$

یادآوری می‌کنیم که با توجه به نتیجه ۲٫۳ اگر

$$Hom_{Lat}(L.[2]) = \{\theta_1.\dots.\theta_m\}$$

آنگاه

$$Hom_{Lat}([2] \times L.[2]) = \{\phi_1.\dots.\phi_m.\phi_{m+1}\}$$

که در این جا برای هر $1 \le i \le m$ و $(j.l)\epsilon[2] \times L$ داریم: $\phi_i(j.l) = \theta_i(l)$.

و $\phi_{m+1}: [2] \times L \to [2]$ همریختی مشبکه‌ای است که در آن برای هر $l \in L$ ، $\phi_{m+1}(1.l) = 1$ و $\phi_{m+1}(2.l) = 2$.

در گزاره زیر مجموعه $ass(J([2] \times L.[2]))$ را به کمک $ass(J(L.[2]))$ شناسایی می‌کنیم.

قضیه ٤-۱. فرض کنید P یک ایدآل اول تک جمله‌ای حلقه $S = \mathbb{K}[x_{(i.l).j}\ ; i\epsilon[2].j\epsilon[2].l\epsilon L]$ باشد. در این صورت P یک ایدآل اول وابسته $J([2] \times L.[2])$

است اگر و فقط اگر P توسط یکی از مجموعه‌های توصیف شده در زیر تولید شود.

الف.

$$\{x_{(1.a).1}\,;a\epsilon A\} \cup \{x_{(2.a).1}\,;a\epsilon A'\} \cup \{x_{(1.b).2}\,;b\epsilon B\} \cup \{x_{(2.b).2}\,;b\epsilon B'\}$$

که در آن $B' \neq \emptyset$ یا $A \neq \emptyset$ و برای یک $1 \leq i \leq r$، $A \cup A' = A_i$ و $B \cup B' = B_i$ همچنین $A \cap A' = \emptyset$ و $B \cap B' = \emptyset$.

در این حالت P یک ایدآل اول هم ارتفاع با P_i است.

ب. $\{x_{(2.a).1}\;;\;a\epsilon A\} \cup \{x_{(1.b).2}\;;\;b\epsilon B\} \cup \{x_{(1.a').1}\}$

که در این جا $a'\epsilon L$ و $1 \leq i \leq r$ موجود است که $B = B_i$ و $A = A_i$ و برای هر $a''\epsilon A$ و برای هر $b'\epsilon B$ داریم:

$$J(L.[2]) \nsubseteq (x_{a.1};a\epsilon(A\setminus\{a''\}) \cup \{a'\}) + (x_{b.2}\,;b\epsilon B).$$

همچنین

$$J(L.[2]) \nsubseteq (x_{a.1}\;;\;a\epsilon A \cup \{a'\}) + (x_{b.2}\,;b\epsilon B\setminus\{b'\}).$$

ج.

$$\{x_{(2.a).1}\;;\;a\epsilon A\} \cup \{x_{(1.b).2}\;;b\epsilon B\} \cup \{x_{(2.b').2}\}.$$

که در اینجا $b'\epsilon L$ و $1 \leq i \leq r$ موجود است که $A = A_i$ و $B = B_i$ و برای هر $b''\epsilon B$ و $a'\epsilon A$ داریم:

$$J(L.[2]) \nsubseteq (x_{a.1};a\epsilon A) + (x_{b.2};\;b\epsilon B\setminus\{b''\} \cup \{b'\}).$$

همین طور

$$J(L.[2]) \nsubseteq (x_{a.1}\,;a\epsilon A\setminus\{a'\}) + (x_{b.2}\,;b\epsilon B \cup \{b'\})$$

برهان. ابتدا فرض کنید که ایدآل P توسط یکی از مجموعه‌های توصیف شده در بندهای الف و ب و ج تولید می‌شود. در هر حالت نشان می‌دهیم که P یک ایدآل اول وابسته به $J([2] \times L.[2])$ است.

الف. چون $A \neq \phi$ یا $B' \neq \phi$ پس $x_{(1.a).1}\epsilon P$ موجود است به قسمی که $x_{(1.a).1}|u_{\phi_{m+1}}$ یا $x_{(2.b).2}\epsilon P$ وجود دارد که $x_{(2.b).2}|u_{\phi_{m+1}}$.

از طرفی برای هر $1 \leq \lambda \leq m$ و برای $j = 1.2$

$$x_{(j.a).1}|u_{\phi_\lambda} \Leftrightarrow x_{a.1}|u_{\theta_\lambda} \qquad (6)$$

و (۷)

$$x_{(j.a).2}|u_{\phi_\lambda} \Leftrightarrow x_{a.2}|u_{\theta_\lambda}$$

و چون برای یک $1 \leq i \leq r$ داریم $A \cup A' = A_i$ و $B \cup B' = B_i$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$(u_{\phi_1}.\dots.u_{\phi_m}) \subseteq P.$$

در بالا نشان دادیم که $u_{\phi_{m+1}}\epsilon P$ و در مجموع $J([2] \times L.[2]) \subseteq P.$

حالا چون $A \cap A' = \phi$ و $B \cap B' = \phi$ پس هرگاه P ایدآل اول مینیمال از $J([2] \times L.[2])$ نباشد. آنگاه طبق روابط(۶) و(۷) می‌توان یک ایدآل اول شامل $J(L.[2])$ در حلقه $\mathbb{K}[x_{l.j}\;;\;l\epsilon L.j\epsilon[2]]$ یافت که به طور اکید مشمول در P_i باشد که این یک تناقض است پس $P\epsilon ass(J([2] \times L.[2]))$

ب. ابتدا توجه کنید که $x_{(1.a').1}|u_{\phi_{m+1}}$ به علاوه مشابه قسمت الف، نحوه تعریف A و B چنان است که $J([2] \times L.[2]) \subseteq P$

اگر P یک ایدآل اول مینیمال $J([2] \times L.[2])$ نباشد در این صورت $J([2] \times L.[2])$ مشمول در یک ایدآل اول مانند P' است که P' توسط یک زیر مجموعه اکید از

$$\{x_{(2.a).1}\,;\;a\epsilon A\} \cup \{x_{(1.b).2}\,;\;b\epsilon B\} \cup \{x_{(1.a').1}\}$$

تولید می‌شود. توجه کنید که با توجه به نحوه تعریف مجموعه بالا و این که $u_{\phi_{m+1}}\epsilon P'$ پس $x_{(1.a').1}\epsilon P'$.

بنابراین

$$J([2] \times L.[2]) \subseteq P' \subseteq (x_{(2.a).1}\,;a\epsilon A\setminus\{a''\}) + (x_{(1.b).2};b\epsilon B) + (x_{(1.a').1})$$

برای یک $a''\epsilon A$. یا این که

$$J([2]\times L.[2])\subseteq P'\subseteq (x_{(2.a).1}\,;a\epsilon A)+\left(x_{(1.b).2}\,;b\epsilon B\backslash\{b'\}\right)+(x_{(1.a').1})$$

برای یک $b'\epsilon B$.

در این صورت با توجه به روابط(۶) و(۷) داریم:

$$J(L.[2])\subseteq (x_{a.1}\,;a\epsilon A\backslash\{a''\}\cup\{a'\})+(x_{b.2}\,;b\epsilon B).$$

یا

$$J(L.[2])\subseteq (x_{a.1};a\epsilon A\cup\{a'\})+(x_{b.2}\,;b\epsilon B\backslash\{b'\}).$$

اما این یک تناقض با مفروضات ب است. پس P یک ایدآل اول وابسته $J([2]\times L.[2])$ است.

ج) مشابه ب. ثابت می‌شود.

برعکس فرض کنید که P یک ایدآل اول وابسته به $J([2]\times L.[2])$ باشد. نشان می‌دهیم که P در یکی از شرایط الف، ب یا ج صدق می‌کند.

مجموعه‌های A و A' و B و B' مشمول در L موجودند که

$$P=\left(x_{(1.a).1}\,;\ a\epsilon A\right)+\left(x_{(2.a).1}\,;\ a\epsilon A'\right)+\left(x_{(1.b).2}\,;\ b\epsilon B\right)+\left(x_{(2.b).2}\,;\ b\epsilon B'\right).$$

چون $u_{\phi_{m+1}}\epsilon P$، پس $A\neq\phi$ یا $B'\neq\phi$.

به علاوه طبق روابط(۶) و (۷)

$$A\cap A'=\phi \text{ و } B\cap B'=\phi$$

$$J(L.[2])\subseteq (x_{a.1}\,;\ a\epsilon A\cup A')+(x_{b.2}\,;\ b\epsilon B\cup B').$$

بنابراین $1\leq i\leq r$ موجود است که

$$A_i\subseteq A\cup A' \text{ و } B_i\subseteq B\cup B'$$

در نتیجه برای $A\cup A'$ و $B\cup B'$ یکی از حالات زیر رخ می‌دهد.

حالت اول. $A_i\cap A\neq\phi$ یا $B_i\cap B'\neq\phi$. که در این حالت

$$P_1=\left(x_{(1.a).1};a\epsilon A_i\cap A\right)+(x_{(2.a).1};a\epsilon A_i\cap A')+\left(x_{(1.b).2};b\epsilon B_i\cap B\right)+(x_{(2.b).2};b\epsilon B_i\cap B')$$

یک ایدآل اول مشمول در P است و اما طبق(۶) و(۷) و این که $u_{\phi_{n+1}}\epsilon P_1$ پس $J([2]\times L.[2])\subseteq P_1$ بنابراین $P_1=P$ لذا P به شکل توصیف شده در الف است.

حالت دوم. $A_i\subseteq A'$ و $B_i\subseteq B$علاوه بر این هیچ jای که در حالت اول صدق کند وجود ندارد. در این صورت به سادگی می‌توان دید که برای هر $a'\epsilon A$

$$P_1=\left(x_{(1.a').1}\right)+\left(x_{(2.a).1};a\epsilon A_i\right)+\left(x_{(1.b).2};b\epsilon B_i\right)$$

یک ایدآل اول شامل $J([2]\times L.[2])$ می‌باشد که $P_1\subseteq P$ بنابراین $P_1=P$ و P_1 در شرایط ب صدق می‌کند زیرا در غیر این صورت مشابه حالت اول می‌توان یک ایدآل اول وابسته از $J([2]\times L.[2])$ چنان یافت که به طور اکید مشمول در P باشد و همچنین برای هر $b'\epsilon B'$

$$P_2=\left(x(_{2.b\prime).2})\right)+\left(x_{(2.a).1};a\epsilon A_i\right)+\left(x_{(1.b).2};b\epsilon B_i\right)$$

یک ایدآل اول شامل $J([2]\times L.[2])$است که $P_2\subseteq P$ بنابراین $P_2=P$ و مشابه قبل می‌توان دید که در این حالت P در شرط ج صدق می‌کند.

نتیجه ٤-۲. فرض کنید L یک مشبکه دلخواه متناهی باشد. در این صورت $W([2]\times L)=W(L)+1$.

۵- مطالعه تحلیل آزاد $J([2]\times L.[2])$ به کمک ایدآل $J(L.[2])$.

در این بخش به مطالعه تحلیل آزاد $J([2]\times L.[2])$ به کمک تحلیل آزاد $J(L.[2])$ می‌پردازیم.

ابتدا قرار دهید

$S_1=\mathbb{K}[x_{l.j};l\epsilon L.j\epsilon[2]]$

و $S=\mathbb{K}[x_{(i.l).j};i.j\epsilon[2].l\epsilon L]$

اگر $Hom_{Lat}(L.[2])=(\theta_1.\dots.\theta_m)$ آن‌گاه به وضوح $J(L.[2])=(u_{\theta_1}.\dots.u_{\theta_m})$ ایدآل حلقه S_1

و

$J([2] \times L.[2]) = (u_{\phi_1}. \dots . u_{\phi_m}. u_{\phi_{m+1}})$

ایدآل حلقه S است که در آن طبق نتیجه ۳,۲ برای هر $1 \leq i \leq m$،

$u_{\phi_i} = \mu(u_{\theta_i})\pi(u_{\theta_i})$

و $\mu.\pi: S_1 \to S$ همریختی‌های هستند که به ترتیب با ضوابط زیر بیان می‌شوند.

$\mu(x_{l.j}) = x_{(2.l).j}$

و

$\pi(x_{l.j}) = x_{(1.l).j}$

همچنین $u_{\phi_{m+1}} = \prod_{l \in L} x_{(1.l).1} \prod_{l \in L} x_{(2.l).2}$ حال قرار دهید $I = (u_{\phi_1}. \dots . u_{\phi_m})$ و همریختی حلقه‌ای $\psi: S_1 \to$ را که $\psi(x_{l.1}) = x_{(2.l).1}$ و $\psi(x_{l.2}) = x_{(1.l).2}$ در نظر می‌گیریم. با توجه به گزاره ۲,۲,۱ کتاب[1] می‌توان دید که(۸)

$(J = I: u_{\phi_{m+1}} = (\psi(u_{\theta_1}). \dots . \psi(u_{\theta_m}))$

با در نظر گرفتن دنباله دقیق کوتاه زیر

$$0 \to \frac{S}{J}(-deg\, u_{\phi_{m+1}}) \to \frac{S}{I} \to \frac{S}{J([2] \times L.[2])} \to 0$$

می‌توان پایاهای عددی $\frac{S}{J([2]\times L.[2])}$ را به کمک پایاهای عددی $\frac{S}{I}$ و $\frac{S}{J}$ محاسبه نمود.

در ادامه در مورد تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{J([2]\times L.[2])}$ بحث می‌کنیم.

فرض کنید

$$\dots \xrightarrow{d_3} \oplus S_1(-\beta_{2.j}) \xrightarrow{d_2} \oplus S_1(-\beta_{1.j}) \xrightarrow{d_1} S_1 \to \frac{S_1}{J(L.2])} \to 0$$

S_1- تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S_1}{J(L.[2])}$ باشد. برای محاسبه تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{I}$ کافی است در ماتریس‌های نگاشت‌های دیفرانسیل تحلیل فوق هر متغیر $x_{l.j}$ با $x_{(1.l).j}x_{(2.l).j} = \mu(x_{l.j})\pi(x_{l.j})$ جایگزین شود.

بنابراین تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{I}$ به صورت زیر است.

(۹)

$$\dots \to \oplus S(-\beta'_{2.2j}) \xrightarrow{\tilde{d}_2} \oplus S(-\beta'_{1.2j}) \xrightarrow{\tilde{d}_1} S \to \frac{S}{I} \to 0$$

که در آن $\beta'_{i.2j} = \beta_{i.j}$

لذا $pd\left(\frac{S}{I}\right) = pd(\frac{S_1}{J(L.[2])})$.

و اعداد بتی مدرج $\frac{S}{I}$ به سادگی با مراجعه به اعداد بتی $\frac{S_1}{J(L.[2])}$ قابل استخراج هستند.

همچنین برای محاسبه تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{J}$ با توجه به رابطه(۸)، کافی است در ماتریس‌های نگاشت‌های دیفرانسیل تحلیل $\frac{S_1}{J(L.[2])}$ هر متغیر $x_{l.1}$ با $x_{(2.l).1}$ و هر متغیر $x_{l.2}$ با $x_{(1.l).2}$ جایگزین شود.

در نتیجه تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{J}$ عبارت است از

$$\dots \oplus S(-\beta''_{2.j}) \xrightarrow{\check{d}_2} \oplus S(-\beta''_{1.j}) \xrightarrow{\check{d}_1} S \to \frac{S}{J} \to 0 \qquad (10)$$

که در آن $\beta''_{i.j} = \beta_{i.j}$.

اما برای محاسبه یک تحلیل آزاد از $\frac{S}{J([2]\times L.[2])}$ می‌توان از تکنیک مخروط نگارنده استفاده کرد.

توجه کنید که تحلیل آزادی که برای $\frac{S}{J([2]\times L.[2])}$ به کمک مخروط نگارنده محاسبه می‌شود لزوما مینیمال نمی‌باشد اما همواره داریم:

$$pd(\frac{S}{J([2]\times L.[2])}) \leq \max\{pd\left(\frac{S}{I}\right). pd(\frac{S}{I: u_{\phi_{m+1}}}) + 1\}$$

با داشتن اعداد بتی $\frac{S_1}{J(L.[2\})}$، با توجه(۹) و(۱۰)، اعداد بتی $\frac{S}{I}$ و $\frac{S}{I: u_{\phi_{m+1}}}$ به سادگی محاسبه می‌شوند. به ویژه

$$pd\left(\frac{S}{I}\right) = pd\left(\frac{S}{I: u_{\phi_{m+1}}}\right) = pd(\frac{S_1}{J(L.[2])})$$

پس

نتیجه ۵-۱. فرض کنید L یک مشبکه متناهی باشد. در این صورت

$$.pd\left(\frac{S}{J([2]\times L.[2])}\right) \leq pd\left(\frac{S_1}{J(L.[2])}\right) + 1$$

برهان. فرض کنید $pd\left(\frac{S_1}{J(L.[2])}\right) = t$ و $\beta_{i.j}$ و $\beta'_{i.j}$ و $\beta''_{i.j}$ همان اعداد بتی باشند که پیش از نتیجه معرفی شدند، یعنی $\{\beta_{i.j}\}$ دنباله اعداد بتی $\frac{S_1}{J(L.[2])}$، $\{\beta'_{i.j}\}$ دنباله اعداد بتی $\frac{S}{I}$ که $\beta'_{i.2j} = \beta_{i.j}$ و $\{\beta''_{i.j}\}$ دنباله اعداد بتی $\frac{S}{I:u_{\phi_{m+1}}}$ که $\beta''_{i.j} = \beta_{i.j}$. در این صورت طبق تکنیک مخروط نگارنده یک تحلیل آزاد مینیمال برای $\frac{S}{J([2]\times L.[2])}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$0 \to \oplus S\left(-(\beta''_{t.j} + 2\,|L\,|)\right) \to \oplus S\left(-\beta'_{t.2j}\right) \oplus S(-(\beta''_{t-1.j} + 2|L|)) \to \cdots \to \oplus S(-\beta'_{2.2j}) \oplus\oplus S(-(\beta''_{1.j} + 2|L|)) \to \oplus S(-\beta'_{1.2j}) \oplus S(-2|L|) \to S \to \frac{S}{J([2]\times L.[2])} \to 0$$

که یک تحلیل آزاد با طول $t+1$ است پس $pd\left(\frac{S}{J([2]\times L.[2])}\right) \le t+1$.

در ادامه تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{J([2]\times[n].[2])}$ را به کمک مخروط نگارنده به طور صریح حساب می‌کنیم.

قضیه ۲-۵. تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{J([2]\times[n].[2])}$ عبارت است از

$$0 \to S^n(-(3n+1)) \to S^n(-(2n+2)) \oplus S^{n+1}(-3n) \to S^{n+2}(-2n) \to S \to \frac{S}{J([2]\times[n].[2])} \to 0$$

برهان. بنا به مطالب پیش از قضیه ابتدا باید $Hom_{Lat}([n].[2])$ را بیابیم. به سادگی می‌توان دید که

$$Hom_{Lat}([n].[2]) = \{\theta_0.\dots.\theta_n\}$$

که در آن برای هر $0 \le i \le n$،

$$\theta_i : [n] \to [2]$$
$$j \longmapsto \begin{cases} 2 & i > j \\ 1 & i \le j \end{cases}$$

پس

$$J([n].[2]) = \left(u_{\theta_0}.\dots.u_{\theta_n}\right) = \left(\prod_{i=1}^{i=t} x_{i.1}\prod_{j=t+1}^{n} x_{j.2}\ \ ; 0 \le t \le n\right)$$

در این صورت به وضوح برای $0 \le i \le n$،

$$\left(u_{\theta_0}.\dots.u_{\theta_i}\right) : u_{\theta_{i+1}} = (x_{i+1.2})$$

بنابراین ایدآل $J([n].[2])$ دارای کسرهای خطی نسبت به مجموعه مولد داده شده است و طبق نتیجه ۲,۷ از مقاله[10]، تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S_1}{J([n].[2])}$ به صورت زیر است.

$$0 \to S_1^n(-n-1) \to S_1^{n+1}(-n) \to S_1 \to \frac{S_1}{J([n].[2])} \to 0$$

از طرفی بنا به رابطه(۹)، تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{I}$ به صورت زیر است.

$$0 \to S^n(-(2n+2)) \to S^{n+1}(-2n) \to S \to \frac{S}{I}$$

همچنین تحلیل آزاد مینیمال از $\frac{S}{J}(-\deg(u_{\phi_{n+1}}))$ با توجه(۱۰) و این که در این جا $\deg(u_{\phi_{n+1}}) = 2n$، عبارت است از

$$0 \to S^n\left(-(3n+1)\right) \to S^{n+1}(-3n) \to S(-2n) \to \frac{S}{J}(-2n) \to 0$$

اگر تکنیک مخروط نگارنده را برای دنباله کوتاه دقیق

$$0 \to \frac{S}{J}(-2n) \to \frac{S}{I} \to \frac{S}{J([2]\times[n].[2])} \to 0$$

به کار ببریم، به تحلیل آزاد مدرج

$$0 \to S^n(-(3n+1)) \to S^n(-(2n+2)) \oplus S^{n+1}(-3n) \to S^{n+2}(-2n) \to S \to \frac{S}{J([2]\times[n].[2])} \to 0$$

برای $\frac{S}{J([2]\times[n].[2])}$ دست می‌یابیم. حال چون در تحلیل آزاد مدرج فوق در درجات همولوژی متوالی مدول‌های آزاد با شیفت درجه یکسان وجود ندارد، پس با توجه به قضیه ۷,۵ مرجع(۸)، تحلیل فوق یک تحلیل مینیمال است.

فهرست منابع

[1] J. Herzog and T. Hibi (2011). Monomial ideals, Graduate Texts in Mathematics.

[2] J. Herzog, T. Hibi (2005). Distributive lattices, bipartite graphs and alexanderduality. J. Algebriac Combin.

[3] V. Ene, J. Herzog, F. Mohammadi (2011). Monomial ideals and toric rings of Hibi type arising from a finite poset. European J.

[4] G. FIøystad, B.M. Greve and J. Herzog (2017). Letterplace and Co-letterplace ideals of poset. Journal of Pure and Applied Algebra.

[5] J. Herzog, A.A. Qureshi and A. Shikama . Alexander duality for monomial ideals associated with isotone maps between posets, Journal of algebra and its applications.

[6] M. Juhnke-Kubitzke, L. Katthän, S. Saeedi Madani (2016). Algebraic properties of ideals of poset homomorphisms, Journal of Algebraic Combinatorics.

[7] L. Sharifan, A.A. Estaji, G. Malekbala. Primary decomposition of ideals of lattice homomorphisms, The Electronic Jornal of Combinators, to appear.

[8] I. Peeva, Graded. syzygies (2011). Algebra and Applications.

[9] D. Eisenbud (1995). Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics.

[10] L. sharifan and M. Varbaro (2008). Graded betti numbers of ideals with linear quotients, LE MATEMATICHE.