دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس میزان سود دریافتی در رقابت برای رسیدن به یک سطح استاندارد

اکرم دهنوخلجی[۱]، جعفر صادقی[۲]، بهجت حلاجی[۳*]، نرگس سلطانی[۴]

(۱) استادیار گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
(۲و۳و۴) دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۶/۲۶   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۰۷

چکیده

رتبه‌بندی کامل واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) یکی از مباحث مهم تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) است. منظور از رتبه‌بندی کامل پیدا کردن ترتیبی برای تمامی واحدها، اعم از کارا و ناکارا به‌طور همزمان می‌باشد. بیشتر روش‌های ارائه‌شده برای رتبه‌بندی غالباً واحدهای کارا را در نظر می‌گیرند. رتبه‌بندی واحدهای ناکارا توسط مدل‌های اولیه تحلیل پوششی داده‌ها نیز، به خاطر نادیده گرفتن اسلک‌ها خالی از اشکال نیست. در این مقاله، دو روش جدید برای رتبه‌بندی کامل واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه‌شده است. در هر دو روش، رقابتی بین واحدها ایجاد می‌گردد تا همگی به‌طور همزمان با وزن مشترک کارا شوند، سپس نسبت به مقدار سودی که هر واحد در این رقابت به‌دست می‌آورد تا به این سطح استاندارد برسد، واحدها رتبه‌بندی می‌شوند. در روش اول با تعریف درجه رضایت‌مندی، رضایت واحدها در این رقابت سنجیده می‌شود و رضایت واحدهایی که کمترین رضایت‌مندی را دارند؛ بهبود می‌یابد. در روش دوم، با تشکیل جدول سود متقاطع، وزن‌های بهینه همه واحدها در رقابت لحاظ می‌گردد. در پایان، روش‌های پیشنهادی با یک مثال کاربردی نشان داده شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده، رتبه‌بندی، سطح استاندارد، وزن مشترک، سود.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: bita_math60@yahoo.com

۱- مقدمه

یکی از اهداف تحلیل پوششی داده‌ها، ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده و مشخص کردن واحدهای کارا و ناکارا می‌باشد. چارنز و همکاران [۱] با ارائه مدل شعاعی CCR، یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه کردند. در ادامه بنکر و همکاران [۲] با در نظر گرفتن شرط بازده به مقیاس متغیر، مدل شعاعی BCC را ارائه دادند. در مدل آن‌ها، واحدهایی که نمره کارایی ۱ را می‌گیرند کارا و در غیر این صورت ناکارا محسوب می‌شوند. پس از محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده، به دلیل کسب امتیاز کارایی یکسان برای واحدهای کارا، هدف بعدی که مورد توجه قرار گرفت، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده بود که در این راستا کارهای زیادی صورت گرفته است.

سکستون و همکاران [۳] روش کارایی متقاطع را برای رتبه‌بندی ارائه دادند. آن‌ها کارایی هر واحد را n بار با استفاده از وزنهای به‌دست‌آمده از مدل مضربی CCR محاسبه و نتایج حاصل را در ماتریسی ذخیره و میانگین کارایی ستونی را معیاری برای رتبه‌بندی تعریف کردند. این روش مشکلاتی در بر دارد، ازجمله این‌که اگر مسئله پاسخ بهینه چندگانه داشته باشد، نحوه انتخاب یک جواب بهینه برای محاسبه ماتریس موردنظر اهمیت پیدا می‌کند. برای رفع مشکلات این روش کارهای زیادی توسط پژوهشگران مختلف انجام شده است [مراجع۴ -۶ را ببینید]. یکی از روش‌های مهم دیگر برای رتبه‌بندی واحدهای کارای رأسی توسط اندرسون و پترسون [۷] پیشنهاد شد. روش آنها بدین‌صورت است که واحد تصمیم‌گیرنده از مجموعه مشاهدات حذف می‌شود و با استفاده از مدل تحلیل پوششی داده‌ها، آن واحد نسبت مجموعه امکان تولید حاصل از واحدهای باقی‌مانده ارزیابی می‌شود. ازجمله مشکلات این روش ناپایداری و نشدنی بودن در برخی از موارد و همچنین عدم رتبه‌بندی واحدهای کارای غیر رأسی می‌باشد. برای رفع اشکالات روش اندرسون-پترسون مطالعات بسیاری انجام گرفته است [۸-۱۰].

سینوانی استرن و همکاران [۱۱] یک روش رتبه‌بندی واحدها با تلفیق تکنیک‌های DEA و تحلیل سلسله مراتبی (AHP) ارائه نمودند. جهانشاهلو و همکاران [۱۲] نیز یک سیستم رتبه‌بندی بر اساس تأثیر واحدهای تصمیم‌گیرنده روی واحدهای ناکارا ارائه داده‌اند. در مطالعه دیگری، جهانشاهلو همکاران [۱۳] از نرم یک برای رتبه‌بندی واحدهای کارا استفاده کردند و ثابت کردند که این مدل همواره شدنی و پایدار می‌باشد. تورگرسن و همکاران [۱۴] با توجه به مفهوم نقطه مرجع، یک روش رتبه‌بندی ارائه دادند که در آن واحدی که به دفعات بیشتر در مجموعه مرجع سایر واحدها ظاهر می‌شود رتبه بهتری کسب می‌کند. فرایدمن و سینوانی استرن [۱۵] با استفاده از روش‌های آماری واحدها را رتبه‌بندی کردند. گولانی [۱۶] و دهنوخلجی و همکاران [۱۷]، با استفاده از تکنیک‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره و DEA یک روش رتبه‌بندی ارائه دادند. در سال‌های اخیر نیز روش‌های رتبه‌بندی مختلفی در زمینه فازی ارائه گردیده است که از آن میان می‌توان به [۱۸-۲۰] اشاره نمود.

اخیراً لی و همکاران [۲۰] روشی برای تخصیص هزینه ثابت به واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه داده‌اند. در این روش ابتدا یک متغیر جدید از جنس ورودی به تمام واحدها اضافه می‌شود. سپس مقدار هزینه تخصیص یافته به نحوی به دست می‌آید که رابطه مستقیمی با کارایی واحدها داشته باشد. به‌عبارت‌دیگر واحدی که کارایی بالاتری دارد متحمل هزینه بیشتر شود. در این پژوهش هزینه متناسب با مقدار سود مجازی به واحدهای تصمیم‌گیرنده تخصیص می‌یابد. با توجه به تعریفی که از درجه رضایتمندی ارائه‌شده است، مقدار هزینه تخصیصی تحمیل شده در کار لی و همکاران با درجه رضایتمندی رابطه عکس دارد. لازم به ذکر است این مفهوم در پژوهش خدابخشی و همکاران [۲۱] نیز مورد استفاده قرار گرفته است که مقدار هزینه تخصیص، نسبت مجموع وزن‌دار شده خروجی به مجموع وزن‌دار شده ورودی در نظر گرفته شده است. همچنین در مطالعه دیگری، خدابخشی و همکاران [۲۲] از ایده پژوهش قبلی خود برای رتبه‌بندی استفاده نمودند که در برخی موارد رتبه‌بندی درستی به دست نمی‌دهد.

در پژوهش حاضر دو روش برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارایه می‌شود. در روش اول، الگوریتمی چند مرحله‌ای برای رتبه‌بندی منحصربه‌فرد همه واحدهای تصمیم‌گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها بر مبنای کار لی و همکاران [۲۰] ارائه شده است. استفاده از این ایده جهت رتبه‌بندی واحدها در این پژوهش برای نخستین بار انجام شده است. در این روش شرایط و ویژگی‌های جدیدی برای هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده ایجاد می‌شود، به‌طوری‌که رقابتی بین واحدها برای دریافت سود بیشتر و رسیدن به سطح استاندارد و مطلوب ایجاد می‌کند. این کار با اضافه کردن یک شاخص ورودی جدید به همه واحدها صورت گرفته است که می‌تواند کلیه واحدها را به سطح استاندارد برساند و در پایان با تعریف مفهوم درجه رضایتمندی بر مبنای سود دریافتی، الگوریتمی ارائه‌شده است که تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده را به‌صورت منحصربه‌فردی رتبه‌بندی می‌کند. الگوریتم و مدل ارائه‌شده بر اساس فرض اساسی اخذ رتبه بالاتر در صورت کسب سود بیشتر (متفاوت با تعریف ارائه‌شده توسط لی و همکاران) استفاده شده است. در روش دوم، با تشکیل جدول سود متقاطع، معیاری برای رتبه‌بندی ارایه می‌کنیم که علاوه بر وزن‌های بهینه واحد تحت ارزیابی، وزن‌های بهینه سایر واحدهای تصمیم‌گیرنده نیز در رقابت برای به‌دست آوردن سود لحاظ می‌گردد.

در این مقاله در بخش ۲، پیشینه‌ای از تحلیل پوششی داده‌ها که مورد نیاز است آورده می‌شود. بخش ۳ یک روش جدید رتبه‌بندی با استفاده از درجه رضایت‌مندی به همراه الگوریتمی برای به دست آوردن یک رتبه‌بندی منحصربه‌فرد ارائه می‌کند. در بخش ۴، روش پیشنهادی دوم که بر اساس جدول سود متقاطع است، برای رتبه بندی ارایه میگرد. در بخش ۵ یک مثال عددی با داده‌های حقیقی آورده و در بخش پایانی به نتیجه‌گیری و جمع‌بندی نهایی می‌پردازیم.

۲- تحلیل پوششی داده‌ها

تعداد n واحد تصمیم‌گیرنده متجانس را در نظر بگیرید. فرض کنید که DMU_j به ازای $\mathrm{j}=1,..,\mathrm{n}$ بردار ورودی $x_j=(\mathrm{x}_{1j},\ldots,\mathrm{x}_{mj})$ را برای تولید بردار خروجی $y_j=(\mathrm{y}_{1j},\ldots,\mathrm{y}_{sj})$ مصرف کند. امتیاز کارایی DMU_P که واحد تحت ارزیابی نامیده می‌شود، با استفاده از مدل زیر که به مدل کسری CCR در ماهیت ورودی معروف است، به دست می‌آید [۱].

$$\theta_p^* = \max \ \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip}}$$

$$s.t. \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \ (j=1,\ldots,n) \qquad (۱)$$

$$u_r \ge 0, \ v_i \ge 0.$$

در مدل (۱)، u_{rj} و v_{ij} به ترتیب وزن‌های r امین خروجی و i امین ورودی DMU_j می‌باشند. تعبیر مدل (۱) این است که هر واحد به‌طور جداگانه وزن‌ها را به‌گونه‌ای برگزیند که کارایی آن ماکزیمم شود. با استفاده از تبدیل چارنز و کوپر [۱] مدل (۱) می‌تواند به‌صورت مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر که به مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی معروف است، نوشته شود:

$$\theta_p^* = \max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip} = 1, \qquad (۲)$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, (j=1,\ldots,n)$$

$$u_r \ge 0, \ v_i \ge 0$$

تعریف ۱. فرض کنید θ_P^* مقدار بهینه تابع هدف مدل (۲) باشد. به θ_P^* امتیاز کارایی DMU_P اطلاق می‌شود. اگر $\theta_P^*=1$، آنگاه DMU_P کارا است. در غیر این صورت DMU_P ناکاراست.

می‌توان ثابت کرد که همواره $0<\theta_P^* \le 1$ و درنتیجه برای واحدهای ناکارا داریم: $\theta_P^*<1$.

۳- روشی جدید برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده

در این بخش روشی جدید برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر مبنای روش ارائه‌شده توسط لی و همکاران [۲۰] پیشنهاد شده است. اساس این روش این است که شرایط و ویژگی‌هایی برای همه واحدها ایجاد می‌گردد، به‌طوری‌که واحدها به یک سطح استاندارد و مطلوب برسند که این مهم به مقایسه منصفانه‌تر واحدها منجر می‌شود. سپس با توجه به میزان بهره‌گیری از سود دریافتی در رقابت برای رسیدن به سطح مطلوب و استاندارد، واحدها با هم مقایسه و رتبه‌بندی می‌شوند. حال سؤالی که پیش می‌آید این است که اولاً شرایط استاندارد برای واحدهای تصمیم‌گیرنده چیست؟ ثانیاً چطور بایستی به این شرایط استاندارد رسید؟
منطقی است که در ارزیابی توسط مدل (۲)، هر واحد تمایل به کسب اندازه کارایی یک دارد. به‌علاوه، اگر بتوان وزن‌های ورودی و خروجی را به‌گونه‌ای به دست آورد که همه واحدها هم‌زمان با وزن مشترک نیز ارزیابی شوند، مقایسه واحدها منصفانه‌تر خواهد بود. بر این اساس سطح استاندارد به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲. واحدهای تصمیم‌گیرنده در سطح استاندارد قرار دارند، هرگاه همه آن‌ها به‌طور هم‌زمان با استفاده از وزن مشترک کارا شوند. به‌عبارت‌دیگر در ارزیابی واحدها با مدل (۲)، همه واحدها با وزن مشترک امتیاز کارایی یک را کسب نمایند.
در عمل رسیدن به شرایط استاندارد برای واحدهای تصمیم‌گیرنده غیرممکن است. بر این اساس باید شرایطی برای واحدها ایجاد نمود که بتوانند به این سطح استاندارد برسند. بدین منظور یک شاخص مجازی ورودی چنان به همه واحدها اضافه می‌شود که مجموع مقادیر این شاخص برای کل واحدها، برابر با یک شود. به‌عبارت‌دیگر ورودی جدید $m+1$ ام با مقدار r_j به ازای $j=1,\dots,n$ به‌گونه‌ای به هر واحد اختصاص داده می‌شود که روابط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \dfrac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + r_j} = 1, \quad (j=1,\dots,n) \\ \sum_{j=1}^{n} r_j = 1, \qquad (r_j \geq 0) \\ u_r \geq 0,\ v_i \geq 0,\ r_j \geq 0. \end{cases} \tag{۳}$$

در معادلات فوق، وزن ورودی جدید r_j، واحد در نظر گرفته شده است. حال اگر بتوان مقادیر (u_r, v_i, r_j) را چنان پیدا کرد که در سیستم (۳) صدق نمایند، همه واحدها به سطح استاندارد رسیده‌اند، یعنی همه آن‌ها با در نظر گرفتن ورودی مجازی جدید، به‌طور هم‌زمان با وزن مشترک به سطح کارایی ۱ رسیده‌اند و چون اضافه کردن ورودی جدید r_j به واحد jام به ازای $j=1,\dots,n$ باعث شده همه واحدها به سطح استاندارد برسند، میزان استفاده از آن معیاری برای رتبه‌بندی خواهد بود. توجه داشته باشید که چون همه واحدها به‌طور هم‌زمان با وزن مشترک ارزیابی می‌شوند، واحدهایی که از قبل کارا بوده اند نیز وزن‌های متفاوتی می‌گیرند.
حال سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا می‌توان مقادیر ورودی‌های جدید را به‌گونه‌ای پیدا کرد که همه واحدها به سطح استاندارد برسند. به‌عبارت‌دیگر آیا معادلات (۲) همواره دارای جواب شدنی می‌باشند؟ برای پاسخ به این سؤال قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱. همواره می‌توان مقادیر ورودی جدید r_j را به‌گونه‌ای به واحد jام به ازای $j=1,\dots,n$ اختصاص داد که همه واحدها به سطح استاندارد برسند.
برهان. فرض کنید $y=\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{S} y_{rj}$، $y_j=\sum_{r=1}^{S} y_{rj}$، به ازای هر r: $u_r=1/y$، به ازای هر i: $v_i=0$ و به ازای هر j $r_j=1y_j/y$. در این صورت $\Gamma=(v_i,u_r,r_j)$ یک جواب شدنی برای

معادلات (۳) می‌باشد؛ زیرا

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip} + r_p} = \frac{\frac{1}{y} y_p}{\frac{1}{y} y_p} = 1, _{(p=1,..,n)} \qquad (۴)$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1 y_j}{y} = \frac{1}{y} \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

بنابراین $\Gamma = (v_i, u_r, r_j)$ یک جواب شدنی برای سیستم (۳) است.

نتیجه ۱. در ارزیابی DMU_j با ورودی اضافی r_j به ازای $j = 1,...,n$ با استفاده از مدل (۲)، همه واحدها با وزن مشترک مقدار کارایی یک را کسب می‌کنند.

برهان. با توجه به برهان قضیه ۱ بدیهی است.

به اعتقاد ما وقتی همه واحدها با توجه به ویژگی بیان‌شده، به سطح استاندارد می‌رسند، واحدی که سود بیشتری کسب می‌کند دارای رتبه بالاتری نسبت به بقیه واحدها می‌باشد. قضیه زیر نشان می‌دهد که ورودی اضافی r_j برای واحد jام مشخص کننده سود واحد jام (DMU_j) برای رسیدن به سطح استاندارد می‌باشد و ازاین‌رو معیار مناسبی برای رتبه‌بندی است.

قضیه ۲. سیستم (۳) و سیستم زیر با هم معادل می‌باشند (دارای مجموعه جواب یکسانی می‌باشند).

$$r_j = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}, _{(j=1,...,n)} \qquad (۵-۱)$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = 1 \quad r_j \geq 0, \qquad (۵-۲)$$

$$u_r \geq 0,\ v_i \geq 0,\ r_j \geq 0.$$

برهان. با ساده کردن روابط $\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + r_j} = 1$ به ازای $j = 1,...,\mathrm{n}$ در سیستم (۳)، نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

رابطه (۵-۱) نشان‌دهنده این است که ورودی جدید r_j برابر است با تفاضل مجموع خروجی‌های وزن‌دار شده (درآمد) و مجموع ورودی‌های وزن‌دار شده (هزینه) می‌باشد و می‌تواند به‌عنوان سود دریافتی واحد jام قلمداد شود. رابطه (۵-۲) نشان می‌دهد که مجموع سود دریافتی واحدها برابر واحد است. ازاین‌رو بین واحدها رقابتی برای کسب سود بیشتر ایجاد می‌شود. چون اگر واحدی مایل به دریافت سود بیشتری باشد بایستی مقدار سود واحد (واحدهای) دیگر کاهش یابد تا رابطه (۵-۲) برقرار شود.

بنابراین مقادیر r_j به ازای $j = 1,...,n$ که از سیستم (۳) (سیستم ۵) حاصل می‌شود، بیانگر میزان سود هر واحد تصمیم‌گیرنده در رسیدن به سطح استاندارد است. لذا هرچه مقدار ورودی جدید r_j یا به‌عبارت‌دیگر سود یک واحد بیشتر باشد، آن واحد در رتبه بالاتری قرار می‌گیرد.

سیستم معادلات (۳) لزوماً دارای جواب منحصربه‌فرد نیست. ازاین‌رو ممکن است رتبه‌بندی‌های متفاوتی از روش فوق به دست آید. برای رفع این مشکل ابتدا میزان انعطاف هر واحد نسبت به ورودی $m+1$ام به دست می‌آید و سپس با تعریف درجه رضایت از رتبه‌بندی، رتبه‌بندی منحصربه‌فردی را برای همه واحدها حاصل می‌شود.

برای به دست آوردن انعطاف مقادیر ورودی جدید مدل‌های زیر به ازای $p = 1,...,n$ حل می‌شود:

$$\min r_p \, (\max \mathrm{r}_p)$$

$$s.t. \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + r_j} = 1, \ _{(j=1,...,n)} \qquad (۶)$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = 1$$

$$u_r \geq 0,\ v_i \geq 0,\ r_j \geq 0.$$

مدل (۶) یک‌بار در حالت مینیمم سازی و یک‌بار در حالت ماکزیمم سازی به ازای $p = 1,...,n$ حل می‌شود .

مقادیر بهینه L_p و U_p به ازای $p=1,\dots,n$ حاصل می‌شود. در این صورت:

$$r_p \in \left[L_p, U_p\right], \quad (p=1,\dots,n) \tag{۷}$$

رابطه (۷) بازه تغییرات r_j را برای اینکه DMU_j به سطح استاندارد برسد، نشان می‌دهد.

واضح است که هر واحد تصمیم‌گیرنده مایل است بیشترین سود را در سطح استاندارد داشته باشد. ازاین‌رو واحد pام به دنبال کسب بیشترین سود ممکن یعنی U_P است تا در رتبه بالاتری قرار بگیرد و به‌هیچ‌وجه مایل به دریافت کمترین سود ممکن، یعنی L_P، نیست. اکنون مفهوم درجه رضایت‌مندی واحد pام از سود دریافتی r_p تعریف می‌شود:

تعریف ۳. درجه رضایت‌مندی واحد pام از میزان سود دریافتی برای رسیدن به سطح استاندارد برابر است با

$$d_p = \frac{r_p - L_P}{U_p - L_P} \tag{۸}$$

با توجه به تعریف ۳، همواره $d_P \in [0,1]$. در حالتی که $d_P = 1$، واحد pام از رتبه کسب شده در بین واحدها رضایت کامل دارد، چون دارای بیشترین سود ممکن یعنی U_p می‌باشد. در حالتی که $d_P = 0$، واحد pام کمترین رضایت از کسب کمترین سود ممکن L_p را دارد؛ اما در اغلب موارد غیر ممکن است که همه واحدها بیشترین درجه رضایت‌مندی را داشته باشد چون در عمل کسب بیشترین درجه رضایت‌مندی برای همه واحدها به‌طور هم‌زمان غیر ممکن است. لازم به ذکر است تعریف فوق با آنچه پیش از این استفاده شده متفاوت است. درجه رضایت‌مندی تعریف‌شده توسط لی و همکاران [۲۰] با مقدار هزینه تحمیل شده به واحدها رابطه عکس دارد؛ یعنی هر چه یک واحد هزینه کمتری داشته باشد درجه رضایت‌مندی بالاتری به آن اختصاص داده می‌شود؛ اما تفاوت عمده تعریف ارائه‌شده در این مقاله عکس این مطلب را می‌رساند. به‌عبارت‌دیگر هر چه سود واحدی بیشتر باشد درجه رضایت‌مندی آن واحد نیز بیشتر است.

ازاین‌رو اگر از دیدگاه تخصیص هزینه ثابت به مسئله نگاه کنیم هدف واحدها دریافت کمترین سود می‌باشد تا کمترین هزینه را پرداخت نماید اما از دیدگاه رتبه‌بندی، واحدها دنبال بیشترین سود ممکن می‌باشند تا بتوانند درجه رضایتمندی بیشتری را کسب کنند و در رتبه بالاتر قرار بگیرند.

مسئله چندهدفه زیر برای پیدا کردن بهترین رتبه‌بندی واحدها فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max \min \{d_1, d_2, \dots, d_n\} \\
&s.t. \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + r_j} = 1, \quad (j=1,\dots,n) \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} r_j = 1 \\
&\qquad u_r \ge 0,\ v_i \ge 0,\ r_j \ge 0.
\end{aligned} \tag{۹}$$

مدل (۹) درجه رضایتمندی واحدهایی با کمترین درجه رضایتمندی را تا حد ممکن ماکزیمم می‌کند. درنتیجه درجه رضایتمندی همه واحدها ماکزیمم می‌گردد. مدل (۹) یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه است که با تغییر متغیر $z = \min\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$، به مدل تک هدفه زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\max z \\
&s.t. \quad z \le d_j = \frac{r_j - L_j}{U_j - L_j} \quad (j=1,\dots,n) \\
&\qquad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + r_j} = 1 \quad (j=1,\dots,n) \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} r_j = 1, \\
&\qquad u_r \ge 0,\ v_i \ge 0,\ r_j \ge 0.
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

با حل مدل (۱۰) مقادیر r_j به ازای هر $j=1,\dots,n$ به دست می‌آید و ترتیبی که از این مدل برای مقادیر r_j

به دست می‌آید، به یک رتبه‌بندی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده منجر می‌شود. ولی این رتبه‌بندی به دلیل وجود جواب‌های بهینه چندگانه، یکتا نمی‌باشد. برای به دست آوردن یک رتبه‌بندی منحصربه‌فرد، از الگوریتم زیر که توسط لی و همکاران [۲۰] ارائه‌شده است، استفاده می‌کنیم.

الگوریتم رتبه‌بندی

گام ۱. فرض کنید $l=1$ و $(d_1^*, u_1^*, v_1^*, r_1^*)$ جواب بهینه مدل (۱۰) با مقدار تابع هدف بهینه z_1^* باشد و قرار دهید $J_0=\{1,2,...,n\}$. بنا بر تعریف ۳، درجه رضایت‌مندی هر واحد را محاسبه می‌کنیم. دو مجموعه به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$J_1=\{j \mid d_j = z_1^*, \quad \forall j \in J_0\} \tag{۱۱}$$

$$J_2=\{j \mid d_j > z_1^*, \quad \forall j \in J_0\} \tag{۱۲}$$

بدیهی است که $J_0 = J_1 \cup J_2$. به ازای هر $j \in J_1$، قرار دهید $r_j^* = r_{1j}^*$.

اگر $|J_1| = m+s$، آنگاه الگوریتم خاتمه می‌یابد و جواب بهینه $(d_1^*, u_1^*, v_1^*, r_1^*)$ منحصر به فرد می‌باشد. در غیر این صورت به گام ۲ می‌رویم.

گام ۲. قرار دهید $l=l+1$ و مدل زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned}
z_l^* &= \max z \\
s.t.\quad & d_j = z_1^*, \qquad (j \in J_1) \\
& d_j = z_2^*, \qquad (j \in J_3) \\
& \vdots \\
& d_j = z_{l-1}^*, \qquad (j \in J_{2l-3}) \\
& d_j = \frac{r_j - L_j}{U_j - L_j} \geq z\ , \quad (j \in J_{2l-1}) \\
& \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + r_j} = 1, \quad (j = 1, ..., n) \\
& \sum_{j=1}^{n} r_j = 1, \\
& u_r \geq 0,\ v_i \geq 0, r_j \geq 0.
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

فرض کنید $(d_l^*, u_l^*, v_l^*, r_l^*)$ جواب بهینه مدل (۱۳) با مقدار بهینه تابع هدف z_l^* باشد. اگر به ازای هر $j \in \{1,...,n\}$، $d_{lj}^* = d_{l-1j}^*$ آنگاه به ازای هر $j \in J_0$، قرار دهید $r_j^* = r_{lj}^*$ و جواب حاصل منحصربه‌فرد است و الگوریتم خاتمه می‌یابد. در غیر این صورت، دو مجموعه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$J_{2l-1}=\{j \mid d_j = z_l^* \ \forall j \in J_{2l-2}\} \tag{۱۴}$$

$$J_{2l} = \{j \mid d_j > z_l^* \ \forall j \in J_{2l-2}\} = J_{2l-2} - J_{2l-1} \tag{۱۵}$$

به ازای هر $j \in J_l$ قرار می‌دهید: $r_j^* = r_{lj}^*$.

اگر $|J_l| = m+s$، آنگاه الگوریتم با جواب بهینه منحصربه‌فرد $(d_{1j}^*, u_{1r}^*, v_{1i}^*, r_{1j}^*)$ خاتمه می‌یابد ، در غیر این صورت به گام ۲ می‌رویم.

بعد از خاتمه الگوریتم فوق مقادیر r_j^* حاصل می‌شود که معیاری برای یک رتبه‌بندی یکتا است.

قضیه ۳. الگوریتم فوق یک رتبه‌بندی منحصربه‌فرد برای واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه می‌دهد.

برهان. با توجه به برهان ارائه‌شده در پیوست D در مرجع [۲۰] قابل اثبات است.

در روش پیشنهادی در این بخش، فقط وزن‌های بهینه واحد تحت ارزیابی در رقابت برای به دست آوردن سود لحاظ گردیده است. برای آنکه وزن‌های بهینه سایر واحدها نیز در رقابت سود لحاظ گردند، در بخش بعد روش جدید دیگری با تشکیل جدول سود متقاطع ارایه می‌دهیم.

۴- رتبه‌بندی بر اساس جدول سود متقاطع

در روش بخش قبل، وزن‌های بقیه DMUها در رتبه‌بندی DMU مورد ارزیابی لحاظ نشده‌اند. برای به دست آوردن رتبه‌بندی منصفانه‌تر باید همه وزن‌های بهینه سایر DMUها در رتبه‌بندی در نظر گرفته شوند.
همان‌طور که در بخش قبلی به‌طور مفصل بیان گردید؛ مقادیر r_j به ازای $j=1,...,n$ که از سیستم (۳) (سیستم ۵) حاصل می‌شود، بیانگر میزان سود هر واحد تصمیم‌گیرنده در رسیدن به سطح استاندارد است. لذا هرچه مقدار ورودی جدید r_j یا به‌عبارت‌دیگر سود یک واحد بیشتر باشد، آن واحد در رتبه بالاتری قرار می‌گیرد.
مقادیر r_j حاصل از روش رتبه‌بندی ارائه‌شده در بخش قبل برابر با سود واحد j ام می‌باشد که برای همه واحدها وزن‌های مشترک استفاده می‌شود. در این بخش روش جدیدی برای رتبه‌بندی ارائه می‌دهیم که معیار رتبه‌بندی بر اساس سود متناظر با هر واحد هم با وزن‌های بهینه خود واحد و هم با وزن‌های بهینه بقیه واحدها ارزیابی شود، ازاین‌رو در این رقابت جدید وزن‌های بهینه همه واحدها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.
برای تشکیل جدول سود متقاطع، مدل زیر برای هر واحد p به ازای $p=1,...,n$، حل می‌گردد.

$$\begin{aligned} &\max \quad \mathrm{r}_p \\ &s.t.\ r_{jp}=\sum_{r=1}^{s}u_{rp}y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_{ip}x_{ij}\,,\ (j=1,...,n) \\ &\sum_{j=1}^{n}r_{jp}=1 \\ &u_{rp}\geq 0,\ v_{ip}\geq 0\,,\ r_{jp}\geq 0. \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

فرض کنیم v_{ip} $(i=1,\dots m)$ و u_{rp} $(r=1,\dots s)$ جواب بهینه مدل خطی (۱۶) باشد، در این صورت مقدار سود DMU_j با وزن‌های بهینه DMU_p از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$r_{jp}=\sum_{r=1}^{s}u_{rp}y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_{ip}x_{ij}\,,\ (j=1,...,n) \qquad (۱۷)$$

مدل (۱۶) متناظر برای هر واحد حل می‌گردد، درنتیجه n مجموعه از وزن‌های ورودی و خروجی برای n واحد بدست می‌آید، این سودها یک ماتریس $n\times n$ تشکیل می‌دهند که r_{jp} درایه واقع در سطر j ام و ستون p ام می‌باشند که ان را ماتریس سود متقاطع می‌گویند.(جدول ۱).
سطر p ام این ماتریس، اندازه سود متقاطع DMU_p را از دیدگاه هر یک از واحدها ارائه می‌دهد؛ بنابراین میانگین مؤلفه‌های سطر p ام، معیاری برای رتبه‌بندی واحد p ام خواهد بود. به‌عبارت دیگر مقادیر M_p حاصل از رابطه زیر معیاری برای رتبه‌بندی خواهد بود.

$$M_p=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}r_{pj}\,,\ (p=1,...,n) \qquad (۱۸)$$

هر واحدی که دارای میانگین بیشتری باشد در رقابت موفق‌تر بوده است، چون توانسته است در حالت خوش‌بینانه علاوه بر در نظر گرفتن وزن‌های بهینه خود، وزن‌های بهینه سایر واحدها را نیز در نظر بگیرد؛ ازاین‌رو در رتبه بالاتری قرار خواهد گرفت.
در بخش بعد، با یک مثال کاربردی دو روش پیشنهادی در این مقاله را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

جدول (۱): جدول سود متقاطع

r_{11}	r_{12}		r_{1n}
. .	. .	. .	. .
r_{n1}	r_{n2}		r_{nn}

۵- مثال عددی

در این مثال از اطلاعات مربوط به ۱۵ شعبه بانک که در یکی از شهرهای ایران قرار دارند، استفاده می‌کنیم. داده‌های این بانک مربوط به سال ۲۰۱۵ می‌باشد و در جدول ۲ آورده شده است. ورودی‌ها شامل تعداد دستگاه‌های خودپرداز (x_1)، تعداد دستگاه کارت‌خوان (x_2)، تعداد کارت‌های اعتباری (x_3) و تعداد مشتریان الکترونیک (x_4) و خروجی‌ها شامل درصد زمان فعالیت (y_1)، تعداد تراکنش (y_2) و مبلغ تراکنش (y_3) می‌باشد. هر دو روش پیشنهادی در این مقاله را بر روی این مثال پیاده‌سازی می‌کنیم.

نتایج حاصل از هر دو روش ارائه‌شده در بخش ۳ و ۴ در جدول ۳ آورده شده است. در این جدول، ستون‌های دوم و سوم مقادیر θ^{CCR} و θ^{BCC} یعنی مقادیر کارایی به‌دست‌آمده از مدل CCR و BCC در ماهیت ورودی را نشان می‌دهند. در ادامه توضیحات مربوط به هر ستون از این جدول آورده می‌شود.

ابتدا الگوریتم بیان‌شده در بخش ۳ بر روی این مثال پیاده‌سازی می‌شود. با حل مدل (۹) برای هر واحد j، مقادیر ماکزیمم و مینیمم r_j یعنی L_j, U_j، محاسبه می‌شود. این مقادیر در جدول ۳ در ستون‌های چهارم و پنجم گزارش شده است. در ادامه با حل مدل (۱۰) مقدار $z_1^* = 0.3696$ حاصل می‌شود. مقادیر بهینه r_{1j}^* از این مدل نیز در جدول ۳ در ستون ششم ارائه‌شده است. مجموعه $J_1 = \{4,6,8,10,11,12,15\}$ مجموعه اندیس واحدهای تصمیم‌گیرنده که دارای درجه رضایت‌مندی $z_1^* = 0.3696$ می‌باشند و همچنین مجموعه $J_2 = \{1,2,3,5,7,9,13,14\}$ نیز نشان‌دهنده بقیه واحدها است؛ بنابراین $r_j^* = r_{1j}^*$ به ازای هر $j \in J_1$. تعداد معادلاتی که در رابطه $d_j = z_1^*$ صدق می‌کنند برابر با ۷ است ($|J_1| = 7$)؛ اما چون $m + s = 7$، به ازای هر j، قرار می‌دهیم $r_j^* = r_{1j}^*$. بنابراین الگوریتم با ارائه مقادیر منحصربه‌فرد r_j^* به ازای $j = 1,\dots,n$ که معیاری برای رتبه‌بندی است، خاتمه می‌یابد و مقادیر درجه رضایتمندی هر واحد از میزان سود دریافتی در رسیدن به سطح استاندارد، d_j، محاسبه گردیده و در ستون هفتم جدول ۳ گزارش شده است.

جدول (۲): اطلاعات مربوط به ورودی و خروجی شعبه‌های بانک

DMU	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(x_4)	(y_1)	(y_2)	(y_3)
1	3	235	22495	370	88	31670	102000
2	1	211	9979	184	95	21675	66000
3	1	153	9515	124	87	17416	38000
4	2	117	13239	227	92	13244	30000
5	5	279	19598	537	81	41289	110000
6	4	295	9599	133	86	41685	75000
7	4	303	8745	141	86	64671	126000
8	3	184	19059	272	82	25096	56000
9	3	278	27290	334	81	49415	130000
10	2	279	15058	202	91	54971	172000
11	1	328	11228	381	90	46828	110000
12	1	369	22584	323	79	83316	143000
13	1	206	25611	351	85	39018	133000
14	1	188	10957	106	86	29876	44000
15	4	212	26055	250	80	39206	130000

جدول (۳): نتایج حاصل از اجرای الگوریتم ارائه‌شده برای رتبه‌بندی واحدها

	کارایی BCC	کارایی CCR	روش پیشنهادی بر اساس بهبود درجه رضایتمندی					روش پیشنهادی کارایی سود		روش خدابخشی و آریاوش [22]	
DMU	θ^{CCR}	θ^{BCC}	L_j	U_j	r_j	d_j	رتبه	M_j	رتبه	$\hat{\theta}$	رتبه
1	0.80	0.80	0	0.0812	0.0328	0.4041	13	0.0315	12	0.0434	13
2	1	1	0	0.1408	0.0545	0.3872	9	0.0613	6	0.0739	6
3	1	1	0	0.1413	0.0612	0.4328	8	0.0593	8	0.0730	7
4	1	1	0	0.1764	0.0652	0.3696	6	0.0581	9	0.0566	10
5	0.77	0.79	0	0.0751	0.0298	0.3967	15	0.0135	14	0.0394	15
6	0.97	0.97	0	0.1326	0.049	0.3696	11	0.0254	13	0.0568	9
7	1	1	0.0137	0.2113	0.1367	0.6225	1	0.1405	2	0.0856	3
8	0.83	0.87	0	0.0878	0.0325	0.3696	14	0.0131	15	0.0409	14
9	0.87	0.88	0	0.108	0.0445	0.412	12	0.0411	11	0.0505	12
10	1	1	0.0613	0.249	0.1307	0.3696	2	0.1785	1	0.0877	2
11	1	1	0	0.143	0.0529	0.3696	10	0.0532	10	0.0729	8
12	1	1	0	0.2719	0.1005	0.3696	3	0.0860	4	0.1036	1
13	1	1	0	0.1624	0.0749	0.4615	4	0.1023	3	0.0850	4
14	1	1	0	0.1218	0.0718	0.5894	5	0.0603	7	0.0758	5
15	1	1	0	0.1706	0.0631	0.3697	7	0.0759	5	0.0549	11

نتایج حاصل از روش پیشنهادی دوم؛ یعنی رتبه‌بندی بر اساس کارایی متقاطع سود، در ستون‌های نهم و دهم گزارش شده‌اند. در ستون نهم مقادیر M_j حاصل از رابطه (۱۸)، آمده است و در ستون دهم مقادیر رتبه‌بندی روش آمده است. مقادیر θ^{CCR} و θ^{BCC} یعنی مقادیر کارایی به‌دست‌آمده از مدل CCR و BCC در ماهیت ورودی، نشان می‌دهند این مقادیر، رتبه‌بندی روش حاضر را در برخی موارد تأیید نمی‌کند. برای نمونه در هر دو روش پیشنهادی ما DMU_1 در رتبه بالاتری از DMU_8 قرار گرفته است چون در روش اول که بر اساس درجه رضایتمندی هست داریم:

$r_1 = 0.0328 > 0.0325 = r_8$.

همچنین در روش دوم که بر اساس کارایی متقاطع سود است داریم: $M_1 = 0.0315 > 0.0131 = M_8$؛ درحالی‌که در مدل‌های CCR و BCC، DMU_8 از DMU_1 رتبه بالاتری اتخاذ کرده است زیرا در مدل CCR، $\theta_1^{CCR} = 0.80 < 0.83 = \theta_8^{CCR}$ و در مدل BCC، $\theta_1^{BCC} = 0.80 < 0.87 = \theta_8^{BCC}$.

همچنین نتایج کارایی بر اساس روش پیشنهادی خدابخشی و همکاران [۲۲]، $\hat{\theta}$، نیز محاسبه و بر مبنای آن، رتبه‌بندی ارائه‌شده است؛ که دو ستون آخر جدول ۳ این نتایج را نشان می‌دهد. با توجه به نتایج ارائه‌شده، از مجموع ۱۵ واحد موجود در مثال، ۱۰ واحد بر اساس مدل‌های CCR و BCC کارا و ۵ واحد ناکارا هستند. در رتبه‌بندی به روش خدابخشی و همکاران [۲۲]، واحد ناکارای شماره ۶ رتبه‌ای بهتر و بالاتر از واحد کارای شماره ۱۵ که واحدی کارا است دریافت کرده است؛ در حالی‌که در هر دو روش ارائه‌شده حاضر، این وضعیت وجود ندارد و همه واحدهای کارا در رتبه بالاتری نسبت به واحدهای ناکارا قرارگرفته‌اند. همچنین در روش پیشنهادی اول برخلاف روش خدابخشی و همکاران[۲۲]، وزن‌های ورودی و خروجی همه واحدها مشترک در نظر گرفته شده است که رتبه‌بندی عادلانه‌ای حاصل می‌گردد. در روش پیشنهادی دوم، با تشکیل جدول کارایی متقاطع هم وزن‌های بهینه خود واحد تحت

ارزیابی و هم وزن‌های بهینه بقیه واحدها در محاسبه سود لحاظ گردیده است. بنابراین در رقابت بین واحدها در سطح استاندارد، همه وزن‌های بهینه واحدها دخیل هستند و همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد روش رتبه‌بندی معقولی را ارائه می‌دهد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله دو روش جدید و با نگرشی متفاوت از کارهای قبلی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه شد. ایده اصلی روش پیشتر در مسئله تخصیص هزینه ثابت استفاده شده است، اما روش ارائه‌شده در پژوهش حاضر با بازنگری در الگوریتم و تعاریف مربوطه، در مسئله رتبه‌بندی در تحلیل پوششی داده‌ها مورد استفاده قرار گرفته است و کارایی آن با یک مثال عددی نمایش داده شده است. در روش‌های پیشنهادی یک شاخص ورودی جدید به همه واحدها افزوده شده است تا آن‌ها را به یک سطح ایده‌ال و استاندارد برساند. نشان داده شده است که تعبیر این شاخص جدید برای هر واحد همان سود دریافتی برای رسیدن به سطح مطلوب است. در روش پیشنهادی اول، با تعریف درجه رضایت‌مندی از سود حاصل، الگوریتم اصلاح شده ارائه شد که همه واحدها را به‌طور منحصربه‌فرد رتبه‌بندی می‌کند. در روش پیشنهادی دوم، با تشکیل جدول سود متقاطع روشی دیگر برای رتبه‌بندی ارایه دادیم که علاوه بر وزن‌های بهینه واحد تحت ارزیابی، وزن‌های بهینه سایر واحدها نیز در رقابت بین واحدها لحاظ می‌گردد.

در پایان الگوریتم‌های ارائه‌شده روی یک مثال عددی اجرا و نتایج رتبه‌بندی آن ارائه شد. در مجموع، روش ارائه‌شده در این پژوهش با نگرشی متفاوت، واحدها را رتبه‌بندی می‌کند که بر پایه مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) نیست. بر همین اساس انتظاری برای یکسان شدن رتبه‌های حاصل ازاین‌روش و مدل‌های استاندارد CCR و BCC وجود ندارد. به نظر می‌رسد روش پیشنهادی، روشی منصفانه و مناسب برای رتبه‌بندی است چرا که با ایجاد رقابت بین واحدها، آن‌ها را به شرایطی استانداردی می‌رساند که در آن، مقایسه و درنتیجه رتبه‌بندی عادلانه‌تری قابل ارائه است.

فهرست منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978), Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research 2 (6), 429-444.

[2] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W. (1984), Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, Management Science 30 (9), 1078-1092.

[3] Sexton, T.R., Silkman, R.H., Hogan, A.J. (1986), Data envelopment analysis: Critique and extensions, New Directions for Program Evaluation, 1986 (32), 73-105.

[4] Doyle, J., Green, R. (1994), Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses, Journal of the Operational Research Society 45 (5), 567-578.

[5] Liang, L., Wu, J., Cook, W., Zhu, J. (2008), Alternative secondary goals in DEA cross-efficiency evaluation, International Journal of Production Economics 113 (2), 1025-1030.

[6] Jahanshahloo, G. R., Sadeghi, J., & Khodabakhshi, M. (2017). Fair ranking of the decision making units using optimistic and pessimistic weights in data envelopment analysis. RAIRO-Operations Research, 51(1), 253-260.

[7] Andersen, P., Petersen, N.C. (1993), A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, Management Science 39 (10), 1261-1264.

[8] Chen, Y. (2005), Measuring super-efficiency in DEA in the presence of infeasibility, European Journal of Operational Research 161 (2), 545-551.

[9] Li, S., Jahanshahloo, G.R., Khodabakhshi, M. (2007), A super-efficiency model for ranking efficient units in data envelopment analysis, Applied Mathematics and Computation 184(2), 638-648.

[10] Mehrabian, S., Alirezaee, M.R., Jahanshahloo, G.R. (1999), A complete efficiency ranking of decision making units in data envelopment analysis, Computational Optimization and Applications 14 (2), 261-266.

[11] Sinuany-Stern, Z., Mehrez, A., Hadad, Y. (2000), An AHP/DEA methodology for ranking decision making units, International Transactions in Operational Research 7 (2), 109-124.

[12] Jahanshahloo, G.R., Junior, H.V., Lotfi, F.H., Akbarian, D. (2007), A new DEA ranking system based on changing the reference set, European Journal of Operational Research 181 (1), 331-337.

[13] Jahanshahloo, G.R., Lotfi, F.H., Shoja, N., Touhidi, G.H., Razavian, S.H. (2004), Ranking using l1-norm in data envelopment analysis, Applied Mathematics and Computation 153 (1), 215-224.

[14] Torgersen, A.M., Forsund, F.R.,

Kittelsen, S.A. (1996), Slack-adjusted efficiency measures and ranking of efficient units, Journal of Productivity Analysis 7 (4), 379-398.

[15] Friedman, L., Sinuany-Stern, Z. (1997), Scaling units via the canonical correlation analysis in the DEA context, European Journal of Operational Research 100 (3), 629-637.

[16] Golany, B. (1988), An interactive MOLP procedure for the extension of DEA to effectiveness analysis, Journal of the Operational Research Society 39 (8), 725-734.

[17] Dehnokhalaji, A., Hallaji, B., Soltani, N., & Sadeghi, J. (2017). Convex cone-based ranking of decision-making units in DEA. OR Spectrum, 39(3), 861-880.

[18] Ma, L.C., Li, H.L. (2008), A fuzzy ranking method with range reduction techniques, European Journal of Operational Research 184 (3), 1032-1043.

[19] Bortolan, G., Degani,R. (1985), A review of some methods for ranking fuzzy subsets, Fuzzy Sets and Systems 15 (1), 1-19.

[20] Li, Y., Yang, M., Chen, Y., Liang, L. (2013), Allocating a fixed cost based on data envelopment analysis and satisfaction degree, Omega 41 (1), 55-60.

[21] Khodabakhshi, M., Aryavash, K. (2014), The fair allocation of common fixed cost or revenue using DEA concept. Annals of Operation Research 214 (1), 187-194.

[22] Khodabakhshi, M., Aryavash, K. (2012), Ranking all units in data envelopment analysis, Applied Mathematics Letters 25(12), 2066-2070.