دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره سیزدهم، بهار ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مشخصه‌سازی n- همریختی‌های جردن روی جبرها

عباس زیوری کاظم‌پور[۱]، اباصلت بداغی [۲]*

[۱] استادیار، بروجرد، دانشگاه آیت الله بروجردی، ایران.
[۲]* دانشیار، گروه ریاضی، واحد گرمسار، دانشگاه آزاد اسلامی، گرمسار، ایران (نویسنده مسئول).
(۲)

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۱۲/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۱/۲۹

چکیده

در این مقاله، نشان می‌دهیم که هر n- همریختی جردن φ از یک جبر یکدار $\mathcal{A}$ به یک جبر φ- جابجایی $\mathcal{B}$ که در شرط زیر صدق می‌کند، یک n- همریختی است.

$$\varphi(a^2) = 0 \Longrightarrow \varphi(a) = 0 \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

واژه‌های کلیدی: n- همریختی، n- همریختی جردن، جبر.

* عهده‌دار مکاتبات

Email: abasalt.bodaghi@gmail.com

۱- مقدمه

فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای مختلط و نگاشت $\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ خطی باشد. φ یک $n-$ همریختی نامیده می‌شود اگر برای هر $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\varphi(a_1 a_2 \dots a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n)$$

مفهوم $n-$ همریختی روی جبرهای مختلط در مقالات[4]، [7] مطالعه شده است. هرشتاین در[8] مفهوم $n-$ همریختی‌های جردن را معرفی نمود. در واقع یک نگاشت φ بین جبرهای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$، $n-$ همریختی جردن نامیده می‌شود اگر

$$\varphi(a^n) = \varphi(a)^n \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

برای سادگی یک 2$-$ همریختی (2$-$ همریختی جردن) را همریختی (همریختی جردن) می‌نامیم. واضح است که هر $n-$ همریختی یک $n-$ همریختی جردن می‌باشد ولی عکس آن درست نیست. مثال‌هایی از $n-$ همریختی جردن وجود دارد که $n-$ همریختی نیستند. برای حالت $n = 2$، در[9] نشان داده شده بعضی همریختی‌های جردن روی حلقه‌های چند جمله‌ای وجود دارد که همریختی نمی‌باشند. در[5] نشان داده شده است که هر $n-$ همریختی جردن بین دو جبر باناخ جابجایی یک $n-$ همریختی می‌باشد که در آن $n \in \{2,3,4\}$. لی در[10] و گسلمن در[6] این مسئله را حالتی که n یک عدد طبیعی و دلخواه می‌باشد تعمیم داده و حل نمودند. اخیرا این چالش توسط بداغی و اینجبز با کمک ماتریس واندرموند در[2] حل شد که روشی متمایز با آنچه در[6] و[10] بود. برای حالت ناجابجایی، زلازکو نتیجه زیر را در[12] ارایه داد (همچنین مقاله[11] را برای روش دیگر ببینید).

قضیه ۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ (نه به طور ضروری جابجایی) و $\mathcal{B}$ یک جبر باناخ جابجایی نیم‌ساده باشند. در این‌صورت هر همریختی جردن $\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک همریختی است.

یادآوری می‌کنیم یک جبر $\mathcal{A}$ نیم‌ساده است هرگاه رادیکال جاکوبسون $\mathcal{A}$ که اشتراک همه ایده‌آل‌های چپ مدولار ماکسیمال $\mathcal{A}$ است، بدیهی باشد، به عبارت دیگر $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$. نتیجه فوق برای 3$-$ همریختی جردن با شرط اضافی یکدار بودن $\mathcal{A}$ در[14] و سپس برای $n-$ همریختی جردن که n یک عدد طبیعی دلخواه می‌باشد، با همان شرط در[1] به اثبات رسید. همچنین برای هر $n \in \{3,4\}$ این قضیه بدون شرط یکدار بودن $\mathcal{A}$ و با شرط اضافی زیر در[3] ثابت شد.

$$\varphi(ab^2) = \varphi(b^2 a). \qquad (a, b \epsilon A) \qquad (۱)$$

برای تمامیت کار مثالی ارایه می‌دهیم که در شرط(۱) صدق می‌کند به طوری‌که جبر $\mathcal{A}$ یکدار نیست.

مثال ۲: فرض کنید

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} u & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \ u, a, b, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

در این صورت $\mathcal{A}$ با ضرب و جمع معمولی و نرم ماتریس‌ها یک جبر بوده که یکدار و جابجایی نیست. نگاشت $h: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$h\left(\begin{bmatrix} u & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = u$$

برای هر $X \in \mathcal{A}$ داریم $h(X^3) = h(X)^3$. بنابراین h یک 3$-$ همریختی جردن است. در حقیقت، برای هر $X = \begin{bmatrix} u & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$ داریم:

$$X^3 = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 a & u^2 b + uac \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس $h(X^3) = u^3 = h(X)^3$. یعنی h یک 3$-$ همریختی جردن است. از طرف دیگر برای هر

$$X = \begin{bmatrix} u & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A} \quad \text{و} \quad Y = \begin{bmatrix} v & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$$

خواهیم داشت:

$$X^2 Y = \begin{bmatrix} u^2 v & u^2 \alpha & u^2 \beta + ua\gamma \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$YX^2 = \begin{bmatrix} vu^2 & vua & vub + vac \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$h(x^2y) = u^2v = vu^2 = h(yx^2)$$

توجه می‌کنیم که برای هر $n \geq 3$ و برای هر $X \in \mathcal{A}$ داریم: $h(X^n) = h(X)^n$.

بعضی نتایج قابل توجه و مهم در مورد همریختی جردن و پیوستگی خودکار آنها روی جبرهای باناخ توسط نویسندگان می‌تواند در منابع[13] ، [15] و [16] قابل دسترس باشد.

در این مقاله تحت شرایط و فرضیات ویژه نشان می‌دهیم که یک n– همریختی جردن ψ بین جبرهای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ یک n– همریختی است.

برای ساده شدن محاسبات در این نوشتار برای هر دو عنصر a و b، ما از نماد ضرب لی $[a.b] = ab - ba$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک نگاشت بین جبرهای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ باشد. گوییم $\mathcal{B}$، φ– جابجایی است اگر برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $[\varphi(a), \varphi(b)] = 0$. توجه کنید که هر جبر جابجایی یک جبر I – جابجایی است که در آن I نگاشت همانی می‌باشد.

مثال ۳: فرض کنید

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} u & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : u, a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$ و

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

نگاشت $\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} u & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در این صورت $\mathcal{B}$ یک جبر غیر جابجایی بوده که φ– جابجایی است.

نتایج اصلی

در سراسر این مقاله عنصر یکه جبر یکدار $\mathcal{A}$ را با e نمایش می‌دهیم. این بخش را با یک لم اساسی که همواره مورد نیاز است آغاز می‌کنیم.

لم ٤. فرض کنید φ یک n– همریختی جردن از یک جبر یکدار $\mathcal{A}$ به یک جبر φ– جابجایی $\mathcal{B}$ باشد. در این‌صورت برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم:

$$\varphi(a) = \varphi(e)^{n-1}\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(e)^{n-1}.$$

برهان. فرض کنید φ یک همریختی جردن باشد. برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم:

$$\varphi((a+3e)^2 - 2(a+2e)^2 + a^2 = \varphi(a+3e)^2 - 2\varphi(a+2e)^2 + \varphi a^2$$

طبق فرض داریم $\varphi(e)^2 = \varphi(e)$. رابطه بالا نتیجه می‌دهد که: (۲)

$$2\varphi(\mathrm{a}) = \varphi(\mathrm{a})\varphi(\mathrm{e}) + \varphi(\mathrm{e})\varphi(\mathrm{a}) \qquad (\mathrm{a} \in \mathcal{A}).$$

از طرف دیگر: (۳)

$$[\varphi(a), \varphi(e)] = \varphi(a)\varphi(e) - \varphi(e)\varphi(a) = 0 \quad (a \in \mathcal{A})$$

از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$$\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(e) = \varphi(e)\varphi(a) \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

برای حالت $n = 3$ داریم: (۴)

$$\varphi\left((a+2e)^3 - 2(a+e)^3 + a^3\right) = \varphi(a+2e)^3 - 2\varphi(a+e)^3 + \varphi(a)^3$$

چون $\varphi(e)^3 = \varphi(e)$. رابطه(۴) نتیجه می‌دهد که : (۵)

$$3\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(e)^2 + \varphi(e)^2\varphi(a) + \varphi(e)\varphi(a)\varphi(e).$$

از φ– جابجایی $\mathcal{B}$ داریم: (۶)

$$\varphi(a)\varphi(e) = \varphi(e)\varphi(a) \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

از روابط (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که:

$$\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(e)^2 = \varphi(e)^2\varphi(a).$$

به طور مشابه برای $n \geq 4$ نیز حکم برقرار است.

قضیه ۵. هر همریختی جردن φ از یک جبر یکدار $\mathcal{A}$ به یک جبر φ– جابجایی $\mathcal{B}$ یک همریختی است اگر

$$\varphi(a^2) = 0 \Longrightarrow \varphi(a) = 0 \quad (a \in \mathcal{A}). \quad (۷)$$

برهان. فرض کنید φ یک همریختی جردن باشد. برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داریم: (۸)

$$\varphi(ab + ba) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a).$$

چون $\mathcal{B}$ یک جبر φ - جابجایی است، (۸) نتیجه می‌دهد که: (۹)

$$\varphi(ab+ba)=2\varphi(a)\varphi(b).$$

برای بدست آوردن نتیجه مطلوب کافیست نشان دهیم که $\varphi(ab-ab)=0$. چون φ یک همریختی جردن است، لذا برای هر $a,b\in\mathcal{A}$،

$$\varphi([a,b]^2)=[\varphi(a),\varphi(b)]^2.$$

از طرفی بنابر فرض

$$([a,b]^2)=[\varphi(a),\varphi(b)]^2=0 \qquad (۱۰)$$

با شرط(۷) از رابطه(۱۰) نتیجه می‌شود که $\varphi(ab-ab)=0$ و از این‌رو رابطه(۹) و تساوی اخیر نتیجه دلخواه را نشان می‌دهد.

قضیه ٦. هر ۳- همریختی جردن φ از یک جبر یکدار $\mathcal{A}$ به یک جبر φ-جابجایی $\mathcal{B}$ که شرط(۷) صادق باشد، یک ۳- همریختی است.

برهان. فرض کنید φ یک ۳- همریختی جردن باشد. برای هر $a\in\mathcal{A}$ داریم: (۱۱)

$$\varphi\big((a+e)^3-a^3\big)=\varphi(a+e)^3-\varphi(a)^3$$

چون برای هر $a\in\mathcal{A}$ داریم: $[\varphi(a),\varphi(e)]=0$ رابطه(۱۱) نشان می‌دهد که: (۱۲)

$$\varphi(a^2)+3\varphi(a)+\varphi(e) = 3\varphi(a)^2\varphi(e) + 3\varphi(a)\varphi(e)+\varphi(e)^3.$$

از رابطه(۱۲) و لم ۴ داریم: (۱۳)

$$\varphi(a^2)=\varphi(a)^2\varphi(e) \qquad a\in\mathcal{A}\ )$$

حال نگاشت $f:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ را با ضابطه:

$f(a)\coloneqq\varphi(a)\varphi(e)$ برای هر $a\in\mathcal{A}$ تعریف می‌کنیم. بنابر رابطه(۱۳) نگاشت f یک همریختی جردن و $\mathcal{B}$ یک f- جابجایی است. قضیه ۵ نشان می‌دهد که f یک همریختی و در شرط(۷) صدق می‌کند. از تعریف f و لم ۴ نتیجه می‌گیریم که:

$$\varphi(a)\varphi(e)=\varphi(a)$$

و

$$\begin{aligned}\varphi(abc)&=f(abc)\varphi(e)\\&=f(a)f(b)f(c)\varphi(e)\\&=(\varphi(a)\varphi(e))\,(\varphi(b)\varphi(e))(\varphi(c)\varphi(e))\,\varphi(e)\\&=\varphi(a)\,(\varphi(b)\varphi(e)^2)(\varphi(c)\varphi(e)^2)\\&=\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c).\end{aligned}$$

برای تعمیم قضایای ۵ و ۶ به لم بعدی نیاز داریم که برهان آن در[5] آورده شده است.

لم ۷. فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر و $\mathcal{A}$ یکدار با عنصر واحد e باشند. اگر $\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ یک n- همریختی جردن باشد، در این صورت برای هر $a\in\mathcal{A}$ داریم:

$$\varphi(a^2)=\varphi(a)^2\varphi(e)^{n-2}.$$

در بخش مقدمه بیان نمودیم اسحاقی گرجی در[5] نشان داد که هر n- همریختی جردن $\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ یک n- همریختی است که در آن $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $\mathcal{B}$ یک جبر باناخ جابجایی نیم‌ساده است. در قضیه بعدی، ما شرایط بیان شده روی $\mathcal{B}$ را به ترتیب φ- جابجایی و رابطه(۷) کاهش می‌دهیم.

قضیه ۸. با شرایط قضیه ۵ هر n- همریختی جردن φ از یک جبر یکدار $\mathcal{A}$ به یک جبر φ- جابجایی $\mathcal{B}$ یک n- همریختی است.

برهان. نگاشت $f:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ را با ضابطه $f(a)\coloneqq\varphi(a)\varphi(e)^{n-2}$ برای هر $a\in\mathcal{A}$ تعریف می‌کنیم. بنابر لم ۷، f یک همریختی جردن و $\mathcal{B}$ یک f- جابجایی است. از این‌رو بنابر قضیه ۵، f یک همریختی است و در شرط(۷) صدق می‌کند. حال از قضیه ۵ و تعریف f نتیجه می‌شود که: (۱۴)

$$f(a)\varphi(e)=\varphi(a)\varphi(e)^{n-1}=\varphi(a).$$

بنابر لم ۴ و رابطه(۱۴) داریم:

$$\begin{aligned}\varphi(a_1a_2\dots a_n)&=f(a_1a_2\dots a_n)\varphi(e)=\\&f(a_1)f(a_2)\dots .f(a_n)\varphi(e)\\(\varphi(a_2)\varphi(e)^{n-1})\dots(\varphi(a_n)\varphi(e)^{n-1})\,\varphi(e)&=\\&\varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n)\varphi(e)^{(n-1)^2}=\\&\varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n)\end{aligned}$$

مثال ۹: فرض کنید φ نگاشت و $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای مثال ۳ باشند. در این‌صورت φ یک n- همریختی جردن و به

ویژه یک n- همریختی است که در شرط(۷) صدق می‌کند در حالی که $\mathcal{A}$ یکدار نیست.
همان‌طور که در بخش پیشین متذکر شدیم هر n– همریختی جردن $\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ بین دو جبر باناخ جابجایی یک n– همریختی می‌باشد. در پیامد بعدی این نتیجه را با یک شرط ضعیف‌تر یعنی φ- جابجایی روی $\mathcal{B}$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰. هر n– همریختی جردن φ از یک جبر جابجایی $\mathcal{A}$ به یک جبر φ- جابجایی $\mathcal{B}$ یک n– همریختی است. علاوه بر آن اگر $\mathcal{A}$ یکدار باشد، آن‌گاه نگاشت

$$\psi(a) := \varphi(a)\varphi(e)^{\frac{n-k}{k-1}}(a \in \mathcal{A})$$

یک k– همریختی جردن برای هر $n \geq k+1$ است.

برهان. اثبات قسمت اول حکم شبیه برهان‌های[1] و[10] است. برای قسمت دوم فرض کنید $k=2$ و $n \geq 3$. همچنین فرض کنید $\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک n– همریختی جردن باشد که بنابر فرض یک n– همریختی است. از این‌رو داریم: (۱۵)

$$\varphi(a_1 a_2 \dots a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n) \quad (a_1. a_2. \dots. a_n \in \mathcal{A}).$$

با قرار دادن $a_1 = a_2 = a$ و $a_3 = \cdots = a_n = e$ در رابطه (۱۵) برای هر $n \geq 3$،

$$.\, \varphi(a^2) = \varphi(a)^2 \varphi(e)^{n-2}$$

به طور مشابه برای هر k دلخواه و هر $n \geq k+1$، خواهیم داشت: (۱۶)

$$\varphi(a^k) = \varphi(a)^k \varphi(e)^{n-k}.$$

فرض کنید $k \geq 2$ دلخواه و $n \geq k+1$. از تعریف ψ و رابطه(۱۶) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}\psi(a^k) &= \varphi(a^k)\varphi(e)^{\frac{n-k}{k-1}} \\ &= \varphi(a)^k \varphi(e)^{n-k} \varphi(e)^{\frac{n-k}{k-1}} \\ &= \varphi(a)^k \varphi(e)^{\frac{k}{k-1}(n-k)} = \psi(a)^k.\end{aligned}$$

بنابراین ψ یک k– همریختی جردن است که این برهان را تکمیل می‌کند.

فهرست منابع

[1] G An, (2017). Characterization of n - Jordan homomorphism, Linear and Multilinear algebra.

[2] A Bodaghi and H Inceboz, (2018). N - Jordan homomorphisms on commutative algebras, Acta, Math, Univ, Comenianae.

[3] A Bodaghi and H.Inceboz, (2018). Extension of Zelazko's theorem ot n - Jordan homomorphisms, Adv, Pure, Appl, Math.

[4] J.Bracic and M.S Moslehian, (2007). On automatic continuity of 3-homomorphisms on Banach algebras, Bull, Malaysian Math.

[5] M Eshaghi Gordji, (2009). N - Jordan homomorphisms, Bull, Aust, Math.

[6] E Gselmann, (2014). On approximate n - Jordan homomorphisms, Annales Math, Silesianae.

[7] Sh Hejazian, M Mirzavaziri and M.S Moslehian, (2005). N - homomorphisms, Bull. Iranian Math.

[8] I.N Herstein, (1956). Jordan homomorphisms, Trans. Amer. Math.

[9] N Jacobson and C.E Rickart, (1950). Jordan homomorphisms of rings, Trans, Amer, Math.

[10] Y.H Lee, (2013). Stability of n-Jordan homomorphisms from a Normed Algebra to a Banach Algebra.

[11] T Miura, S.E Takahasi and G Hirasawa, (2005). Hyers – Ulam - Rassias stability of Jordan homomorphisms on Banach algebras.

[12] W Zelazko, (1968). A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras, Studia Math.

[13] A Zivari - Kazempour, (2014). A characterization of Jordan homomorphism on Banach algebras, Chinese J, Math.

[14] A Zivari - Kazempour, (2016). A characterization of 3 - Jordan homomorphism on Banach algebras, Bull, Aust, Math.

[15] A Zivari - Kazempour, (2018). A characterization of Jordan and 5-Jordan homomorphisms between Banach algebras, Asian - Eropean J, Math.

[16] A Zivari - Kazempour, (2018). Automatic continuity of n - Jordan homomorphisms on Banach algebras, Commun, Korean Math