

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

حل دستگاه نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی بوسیله عملگر تراکمی F - تعمیم یافته مر-کلر، اندازه نافرردگی و روش هموتویی اختلالات بهبود یافته

محسن ربانی^{۱*}، رضا عرب^۲

(۱) گروه ریاضی، واحد ساری، دانشگاه آزاد اسلامی، ساری، ایران (نویسنده مسئول).

(۲) گروه ریاضی، واحد ساری، دانشگاه آزاد اسلامی، ساری، ایران

تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۲/۲۷

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۶/۱۳

چکیده:

در این مقاله برای اثبات وجود جواب دستگاه نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی، فضای جواب را فضای شامل همه دنباله‌های همگرا با حد متناهی که با نرم مناسب یک فضای باناخ است در نظر می‌گیریم. با ایجاد تعمیمی از عملگرهای تراکمی مر-کلر بنام عملگرهای تراکمی F -تعمیم یافته مر-کلر^۲ و اندازه نافرردگی^۳ به اثبات چند قضیه در خصوص وجود نقطه ثابت می‌پردازیم. با این کار سعی می‌کنیم بعضی از قضایایی که توسط نویسندگان دیگر مانند [9, 3] در خصوص وجود جواب بوسیله قضایای نقطه ثابت ارائه شده است را گسترش دهیم. سپس برای اعتبار و کاربرد قضایای پیشنهادیمان، یک نمونه از دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی را مورد نظر قرار داده و اثبات وجود جواب آن را به کمک قضایای فوق انجام می‌دهیم. در آخر برای توانمندی و جذابیت بیشتر این تحقیق، یک الگوریتم تکراری توسط روش هموتویی اختلالات بهبود یافته و تجزیه ادومین^۴ پدید آورده و از آن برای بدست آوردن جواب تقریبی دستگاه نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی فوق استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: عملگر تراکمی مر-کلر، فضای باناخ، اندازه نافرردگی، معادلات انتگرال، هموتویی اختلالات.

Email: mrabrani@iausari.ac.ir

*عهده‌دار مکاتبات

². Meir-Keeler condensing

³. Measure of noncompactness

⁴. Adomian

۱. مقدمه و مطالب پایه‌ای

بحث معادلات انتگرال خطی و غیرخطی، دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی و در مواردی دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی از اهمیت خاصی در علوم مختلف برخوردار است. در خصوص وجود جواب این نوع معادلات می‌توانید به [6,5,4] مراجعه کنید. ما نیز در این مقاله ضمن گسترش بعضی از نتایج محققان دیگر (مانند منابعی که در چکیده اشاره شد) روی وجود جواب دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی و همچنین حل عددی آن کار خواهیم کرد. لذا ابتدا به معرفی بعضی از مفاهیم پایه و تعاریفی می‌پردازیم که در سراسر این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

\mathbb{R} را مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ، $(E, \|\cdot\|)$ را فضای باناخ حقیقی با عنصر صفر، $\overline{B}(x, r)$ را گوی بسته به مرکز X با شعاع r و \overline{B}_r را بیان گر $\overline{B}(0, r)$ در نظر می‌گیریم. برای زیرمجموعه ناتهی X از E منظور از $conv X$ و \overline{X} به ترتیب بستار و پوسته محدب X می‌نامیم. علاوه بر این \mathcal{M}_E را خانواده زیرمجموعه‌های ناتهی و کراندار از E و \mathcal{A}_E را به عنوان زیر خانواده شامل همه زیرمجموعه‌های نسبتاً فشرده از E در نظر می‌گیریم. در ادامه به تعریف اندازه نافشردگی می‌پردازیم که توسط [11] ارائه شده است.

۱-۱ تعریف: به نگاشت $\mu: \mathcal{M}_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ اندازه نافشردگی در E گویند اگر در شرایط زیر صدق کند:

1. خانواده $\ker \mu = \{X \in \mathcal{M}_E : \mu(X) = 0\}$ ناتهی باشد و $\ker \mu \in \mathcal{A}_E$
2. $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$
3. $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$
4. $\mu(conv X) = \mu(X)$
5. $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \mu(X) + (1-\lambda) \mu(Y)$
، $\forall \lambda \in [0, 1]$

6. اگر $\{X_n\}$ دنباله مجموعه‌های بسته از \mathcal{M}_E به طوری که $X_{n+1} \subset X_n$ برای $n = 1, 2, \dots$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0$ آنگاه $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ ناتهی است.

در 1، خانواده $\ker \mu$ را هسته اندازه نافشردگی μ می‌نامند. یکی از خواص اندازه نافشردگی این است که $X_\infty \in \ker \mu$. در واقع از نامساوی $\mu(X_\infty) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right) \leq \mu(X_n)$ به ازای $n = 1, 2, \dots$ نتیجه می‌شود که $\mu(X_\infty) = 0$ و از آنجا حکم بالا برقرار است. برای یافتن مطالب بیشتر در خصوص اندازه نافشردگی به [12,11] مراجعه گردد. قضیه نقطه ثابت داربو^۱ یک تعمیم بسیار مهم از قضیه نقطه ثابت شودر^۲ است که شامل قضیه وجودی نقطه ثابت باناخ نیز می‌باشد.

۲-۱ قضیه نقطه ثابت شودر [1]. فرض کنید C یک زیر مجموعه بسته و محدب از فضای باناخ E باشد، آنگاه هر نگاشت پیوسته و فشرده $T: C \rightarrow C$ دارای حداقل یک نقطه ثابت است.

۳-۱ قضیه نقطه ثابت داربو [2]. فرض کنید Ω زیرمجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E باشد و همچنین $T: \Omega \rightarrow \Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری که ثابت $k \in [0, 1)$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:

$\mu(TX) \leq k \mu(X)$ ، $\forall X \subset \Omega$ ، $X \neq \emptyset$
آنگاه T دارای نقطه ثابت در مجموعه Ω است. در سال 1969 مر-کلر [15]، قضیه نقطه ثابت را در فضای متریک (X, d) برای نگاشت‌هایی مانند T با خاصیت زیر گسترش داده است.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 ; \quad (1)$$

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$d(Tx, Ty) < \varepsilon, \forall x, y \in X$$

¹.Darbo

².Schauder

$$\varepsilon \leq F(\mu(X)) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow F(\mu(TX)) < \varepsilon.$$

که در آن $F \in \mathbb{F}$.

اولین قضیه اصلی مان بصورت زیر می باشد.

۲-۳ قضیه. فرض کنید C یک زیرمجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E بوده و μ یک اندازه نافشردگی دلخواه روی E باشد. همچنین اگر $C \rightarrow C$ یک عملگر پیوسته و F -تعمیم یافته مر-کلر باشد، آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت در C دارد.

اثبات. فرض کنید $C_0 = C$ ، دنباله $\{C_n\}$ را طوری می سازیم که $C_{n+1} = \text{Conv}(TC_n)$ برای $n \geq 0$. همچنین داریم:

$$TC_0 = TC \subseteq C = C_0,$$

$$C_1 = \text{Conv}(TC_0) \subseteq C = C_0,$$

علاوه بر این با ادامه روند فوق خواهیم داشت:

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \dots$$

اگر عدد طبیعی $N \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که $T(C_N) = 0$ ، آنگاه C_N فشرده است. بنابراین از قضیه ۱-۲ نتیجه می شود که T یک نقطه ثابت دارد.

حال فرض می کنیم که $\mu(C_n) > 0, \forall n \geq 0$ ، در این صورت با تعریف $\varepsilon_n = F(\mu(C_n))$ و همچنین بوسیله تعریف C_n و $\delta_n = \delta(\varepsilon_n) > 0$ خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{n+1} = F(\mu(C_{n+1})) = F(\mu(\text{Conv}(TC_n))) \\ = F(\mu(TC_n)) < F(\mu(C_n)) = \varepsilon_n$$

علاوه بر این $\{\varepsilon_n\}$ یک دنباله کاهشی و مثبت از اعداد حقیقی است لذا، $\gamma \geq 0$ وجود دارد به طوری که $\varepsilon_n \rightarrow \gamma, n \rightarrow \infty$.

حال ادعا می کنیم $\gamma = 0$ است. چون در غیر این صورت اگر $\gamma > 0$ باشد، آنگاه وجود دارد n_0 ی که به ازای $n > n_0$ نتیجه می دهد که $\gamma \leq \varepsilon_n \leq \gamma + \delta(\gamma)$ ، از

طرفی طبق تعریف عملگر تراکمی مر-کلر $\varepsilon_{n+1} < \gamma$ بنابراین $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$ می گردد که تناقض با رابطه بالاست. بنابراین $\gamma = 0$ و از آنجا

شرط فوق را شرط تراکمی (یا انقباضی) از نوع مر-کلر می نامند. یک نتیجه مشهور به عنوان تابع مر-کلر می باشد، در [19] یک تعمیم آن به صورت زیر بیان شده است.

۱-۴ تعریف. فرض کنید Ω زیرمجموعه ناتهی از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی روی E باشد. گوییم عملگر $T: \Omega \rightarrow \Omega$ یک تابع تراکمی تعمیم یافته مر-کلر است، اگر داشته باشیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0; \forall X \subset \Omega, \quad (2)$$

$$\varepsilon \leq \mu(X) + \phi(\mu(X)) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\mu(TX) + \phi(\mu(TX)) < \varepsilon.$$

که در آن $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ تابع پیوسته است.

۱-۵ قضیه. فرض کنید Ω یک زیرمجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E بوده و μ یک اندازه نافشردگی دلخواه روی E باشد. همچنین اگر $T: \Omega \rightarrow \Omega$ عملگر پیوسته و تعمیم یافته تراکمی مر-کلر باشد، آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت دارد و مجموعه نقاط ثابت T در Ω فشرده اند. اثبات [19].

۲. قضیه جدید نقطه ثابت برای F -تعمیم یافته از عملگر تراکمی مر-کلر

در این بخش ابتدا دو تعریف زیر را مطرح می کنیم.

۱-۲ تعریف: فرض کنید \mathbb{F} کلاس همه توابع پیوسته به صورت $F: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ باشد که در شرط زیر صدق می کند:

$$F(0) = 0 < F(t), \forall t > 0.$$

۲-۲ تعریف: فرض کنید C یک زیرمجموعه ناتهی از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی روی E باشد. گوییم عملگر $T: C \rightarrow C$ یک عملگر F -تعمیم یافته مر-کلر است، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta(\varepsilon) > 0$ به طوری که برای هر $X \subseteq C$ داشته باشیم: (۳)

اثبات. فرض کنید $F(t) = \int_0^t f(s) ds > 0, \forall t > 0$ و سپس قضیه ۲-۳ را بکار ببرید.

۳. اندازه نافرردگی هاسدورف^۱.

در این بخش اندازه نافرردگی هاسدورف را در دنباله فضاها و حل‌پذیری دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی در فضای C_0 مورد توجه قرار می‌دهیم. طبق [10] اندازه نافرردگی هاسدورف در فضای $(C_0, \|\cdot\|_{C_0})$ را به χ نمایش داده و به صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم:

$$\chi(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_{x(t) \in D} (\max_{k \geq n} |x_k(t)|)] \quad (۴)$$

جایی که $x(t) = (x_i(t))_{i=1}^{\infty} \in C_0$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}_+$ و $D \in \mathfrak{M}_{C_0}$.

در این مقاله وجود جواب دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی در فضای C_0 را با استفاده از عملگرهای تراکمی $-F$ تعمیم یافته مر-کلر گسترش می‌دهیم. بدین منظور دستگاه معادلات انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

(۵)

$$\begin{cases} x_n(t) = f_n(t, x(t), \int_0^{\infty} g_n(t, s, x(s)) ds), \\ x(t) = (x_i(t))_{i=1}^{\infty}, x_i(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \\ i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

فرض کنید:

$$(A_1). \text{ توابع } f_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{\infty} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$$

پیوسته و

$$K_n = \sup_n \{ |f_n(t, x^0(t), 0)| : t \in \mathbb{R}_+ \} < \infty$$

جایی که $x_n^0(t) = 0$ و $x^0(t) = (x_n^0(t))_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$

به ازای هر $t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$. همچنین توابع پیوسته

$$a_n, b_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$|f_n(t, x(t), p(t)) - f_n(t, y(t), q(t))| \leq$$

$$a_n(t) \max_{i \geq n} |x_i(t) - y_i(t)| + b_n(t) |p(t) - q(t)|,$$

$\mathcal{E}_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. چون دنباله $\{C_n\}$ تو در تو است

لذا از شرط (6) تعریف ۱-۱، نتیجه می‌گیریم که $C_{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ و همچنین در C بسته و محدب می‌باشد. علاوه بر این می‌دانیم که C_{∞} عضوی از $\ker \mu$ است. بنابراین C_{∞} فشرده بوده و تحت نگاشت T تغییرناپذیر است. از قضیه ۱-۲ نتیجه می‌شود که T دارای نقطه ثابت در C_{∞} است و چون $C_{\infty} \subseteq C$ ، پس T دارای نقطه ثابت در C می‌باشد.

۲-۴ نتیجه. اگر $F(t) = t$ در قضیه ۲-۳ اختیار گردد، آنگاه قضیه ۲-۲ در [3] بدست می‌آید.

۲-۵ نتیجه. اگر در قضیه ۲-۳،

$$F(t) = t + \varphi(t), \forall t \in [0, \infty)$$

که در آن $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ تابع پیوسته با شرط $\varphi(0) = 0$ و

$\varphi(t) > 0$ به ازای هر $t > 0$ اختیار گردد، آنگاه قضیه ۱-۵ بدست می‌آید. حال به یک نتیجه از نقطه ثابت از نوع انتگرالی می‌پردازیم.

۲-۶ نتیجه. فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، کراندار،

بسته و محدب از فضای باناخ E و $T : C \rightarrow C$ یک

تابع پیوسته باشد. همچنین فرض کنید برای هر $\varepsilon > 0$

وجود داشته باشد $\delta(\varepsilon) > 0$ به طوری که برای هر

$$X \subseteq C \text{ داشته باشیم}$$

$$\varepsilon \leq \int_0^{\mu(X)} f(s) ds \leq \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\mu(TX)} f(s) ds < \varepsilon$$

که در آن μ یک اندازه نافرردگی دلخواه است و

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

یک تابع انتگرال‌پذیر لبگ، جمع‌پذیر، نامنفی به طوری که

$$\int_0^{\varepsilon} f(s) ds > 0 \quad \forall \varepsilon > 0, T \text{ حداقل دارای یک}$$

نقطه ثابت در C است.

¹.Hausdorff

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_{c_0} &= \max_{n \geq 1} \left| f_n \left(t, x(t), \int_0^\infty g_n(t, s, x(s)) ds \right) \right| \\ &\leq \max_{n \geq 1} \left| f_n \left(t, x(t), \int_0^\infty g_n(t, s, x(s)) ds \right) \right| \\ &\quad - f_n(t, x^0(t), 0) \\ &+ \max_{n \geq 1} |f_n(t, x^0(t), 0)| \\ &\leq \max_{n \geq 1} \left\{ a_n(t) \max_{i \geq n} |x_i(t)| + b_n(t) \int_0^\infty g_n(t, s, x(s)) ds \right\} \\ &\quad + k_n \\ &\leq A_0 \|x(t)\|_{c_0} + G + k. \end{aligned}$$

بنابراین رابطه $(1-A_0)\|x(t)\|_{c_0} \leq G+k$ و از آنجا

$$\text{نامساوی } \|x(t)\|_{c_0} \leq \frac{G+k}{1-A_0} = d \text{ بدست می‌آید.}$$

فرض کنید $\bar{B} = \bar{B}(x^0(t), d)$ یک گوی بسته به مرکز $x^0(t)$ و شعاع d باشد بنابراین \bar{B} زیرمجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از C_0 است.

عملگر $X = (X_i)$ روی $C(\mathbb{R}_+, \bar{B})$ را به ازای هر $t \in \mathbb{R}_+$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(Xx)(t) = \{(X_i x)(t)\} = \{f_i(t, x(t), v_i(x))\},$$

که در آن

$$x(t) = (x_i(t)) \in \bar{B}, x_i(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \forall i \in \mathbb{N}.$$

چون برای هر $t \in \mathbb{R}_+$ تعریف کردیم، لذا بوسیله فرض (A_3) خواهیم داشت:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (X_i x)(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(t, x(t), v_i(x)) = 0,$$

بنابراین $(Xx)(t) \in c_0$.

چون $\|(Xx)(t) - x^0(t)\|_{c_0} \leq d$ پس X یک خود نگاشت روی \bar{B} است. ما باید نشان دهیم که X پیوسته است یعنی عضو $C(\mathbb{R}_+, \bar{B})$ می‌باشد بدین منظور فرض کنید $\mathcal{E} > 0$ دلخواه و نیز $y(t) = (y_i(t))_{i=1}^\infty$ و $z(t) = (z_i(t))_{i=1}^\infty \in c_0$ با شرط

که در آن

$$x(t) = (x_i(t))_{i=1}^\infty, y(t) = (y_i(t))_{i=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty.$$

(A_2) . توابع

$$g_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$$

تابع G_n وجود دارد به طوری که:

$$G_n = \sup \left\{ b_n(t) \left| \int_0^\infty g_n(t, s, x(s)) ds \right| : t, s \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

همچنین

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ b_n(t) \left| \int_0^\infty [g_n(t, s, x(s)) - g_n(t, s, y(s))] ds \right| \right\} = 0,$$

و

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ b_n(t) \left| \int_T^\infty g_n(t, s, x(s)) ds \right| : t \in \mathbb{R}_+ \right\} \right\} = 0.$$

(A_3) . تعریف عملگر $X : \mathbb{R}_+ \times c_0 \rightarrow c_0$ که به

صورت زیر عمل می‌کند:

$$X(t, x(t)) = (Xx)(t) =$$

$$(f_1(t, x(t), v_1(x)), f_2(t, x(t), v_2(x)), \dots),$$

$$\text{که در آن } v_n(x) = \int_0^\infty g_n(t, s, x(s)) ds.$$

(A_4) . روابط $G_n \rightarrow 0$ و $K_n \rightarrow 0$ و همچنین $n \rightarrow \infty$ $n \rightarrow \infty$

$$\text{و } \sup G_n = G, \sup K_n = K$$

$$0 < A_0 < 1 \text{ که در آن } \sup \{a_n(t) : t \in \mathbb{R}_+\} = A_0$$

برقرارند.

(A_5) . اگر $F \in \mathbb{F}$ و $t \in [0, \infty]$ آنگاه نامساوی

$$F(A_0 t) \leq A_0 F(t)$$

برقرار است.

۱-۳ قضیه. تحت فرضیات $(A_1) - (A_5)$ دستگاه

نامتناهی (δ) حداقل یک جواب به صورت زیر دارد

$$x(t) = (x_i(t))_{i=1}^\infty \in c_0, t \in \mathbb{R}_+$$

و همچنین $x_i(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ برای هر $i \in \mathbb{N}$.

اثبات. با استفاده از (δ) و $(A_1) - (A_5)$ برای هر

$t \in \mathbb{R}_+$ داریم:

$$(۶) \quad \varepsilon \leq F(\chi(\bar{B})) < \varepsilon + \delta \Rightarrow F(\chi(X(\bar{B}))) < \varepsilon.$$

اما داریم:

$$F(\chi(X(\bar{B}))) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x(t) \in \bar{B}} \left\{ \max_{k \geq n} |f_k(t, x(t), v_k(x))| \right\}\right) \leq F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x(t) \in \bar{B}} \left\{ \max_{k \geq n} \left(a_n(t) \max_{i \geq k} |x_i(t)| + K_k \right) \right\}\right) \leq A_0 F(\chi(\bar{B})).$$

بنابراین به نامساوی

$$F(\chi(X(\bar{B}))) \leq A_0 F(\chi(\bar{B})) < \varepsilon$$

از آن نتیجه می‌شود $F(\chi(X(\bar{B}))) < \frac{\varepsilon}{A_0}$ حال با انتخاب

$$\varepsilon \leq F(\chi(\bar{B})) < \varepsilon + \delta, \quad \delta = \frac{\varepsilon(1-A_0)}{A_0}$$

به نامساوی

دست می‌یابیم که اثبات شرط (۶) کامل است و X یک F -تعمیم عملگر تراکمی مر-کلر روی $\bar{B} \subset c_0$ می‌باشد. لذا X در تمام شرایط قضیه ۲-۳ صدق می‌کند و در نتیجه دارای نقطه ثابت در \bar{B} است و از آنجا دستگاه (۵) دارای یک جواب در فضای c_0 می‌باشد.

۳-۲ مثال. دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_n(t) = \frac{1}{t+n^2} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|x_i(t)|}{2i^2} \quad (۷)$$

$$+ \frac{1}{n^3 e^t} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x_n(s)) + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s)\right)}{(s+1)^2 \left(2 + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s)\right)\right)} ds, \quad n \in \mathbb{N}$$

در این مساله توابع f_n, v_n و g_n عبارتند از

$$f_n(t, x(t), v_n(x(t))) = \frac{1}{t+n^2} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|x_i(t)|}{2i^2}$$

$$+ \frac{1}{n^3 e^t} v_n(x(t)), \quad v_n(x(t)) = \int_0^{\infty} g_n(t, s, x(s)) ds,$$

$$t \in \mathbb{R}_+ \text{ برای هر } \|y-z\|_{c_0} < \frac{\varepsilon}{2A_0}$$

خواهیم داشت:

$$|(X_n y)(t) - (X_n z)(t)| = |f_n(t, y(t), v_n(y)) - f_n(t, z(t), v_n(z))| \leq A_0 \max_{i \geq n} |y_i(t) - z_i(t)| + b_n(t) |v_n(y) - v_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + b_n(t) \left| \int_0^{\infty} [g_n(t, s, y(s)) - g_n(t, s, z(s))] ds \right|$$

با استفاده از (A_2) می‌توانیم $T > 0$ انتخاب کنیم به طوری که $t > T$

$$|b_n(t) \int_0^{\infty} [g_n(t, s, y(s)) - g_n(t, s, z(s))] ds| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|(X_n y)(t) - (X_n z)(t)| < \varepsilon$$

حال فرض می‌کنیم $t \in [0, T]$ به کمک فرضیات بالا خواهیم داشت:

$$|(X_n y)(t) - (X_n z)(t)| \leq A_0 \max_{i \geq n} |y_i(t) - z_i(t)| + b_n(t) \left| \int_T^{\infty} [g_n(t, s, y(s)) - g_n(t, s, z(s))] ds \right| + b_n(t) \left| \int_0^T [g_n(t, s, y(s)) - g_n(t, s, z(s))] ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + BgT + b_n(t) \left| \int_T^{\infty} [g_n(t, s, y(s)) - g_n(t, s, z(s))] ds \right|$$

که در آن $B = \sup_n \{b_n(t) : t \in [0, T]\}$ و

$$g = \sup_n \{|g_n(t, s, y(s)) - g_n(t, s, z(s))| : t, s \in [0, T]\}.$$

از پیوستگی g_n روی مجموعه فشرده $[0, T] \times [0, T] \times c_0$ به $g \rightarrow 0$ دست می‌یابیم. علاوه بر

این از (A_2) می‌توانیم T را طوری انتخاب کنیم که آخرین جمله تقریب بالا بقدر کافی کوچک باشد. همچنین وقتی که $\|y(t) - z(t)\|_{c_0} \rightarrow 0$ آنگاه

$$|(X_n y)(t) - (X_n z)(t)| \rightarrow 0$$

روی $\bar{B} \subset c_0$ پیوسته است. اکنون باید ثابت کنیم که X یک عملگر تراکمی F -تعمیم یافته مر-کلر است! بدین منظور برای هر $\varepsilon > 0$ ما باید $\delta > 0$ را طوری پیدا کنیم که شرط زیر برقرار گردد:

پیوستگی f_n و g_n بدیهی است و بدین ترتیب تمام فرضیات $(A_1) - (A_5)$ برقرار می‌باشند. با استفاده از قضیه ۴-۱ نتیجه می‌گیریم که دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی (۷) دارای یک جواب در فضای C_0 است. حال که اطمینان یافته‌ایم دستگاه فوق دارای جواب است، به ایجاد یک الگوریتم تکراری برای دستیابی به یک جواب تقریبی از دستگاه (۷) می‌پردازیم.

۴. ایجاد الگوریتم تکراری با تلفیق روش هموتوبی اختلالات اصلاح شده و چندجمله‌ای‌های ادومین

روش‌های مختلفی برای حل عددی دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی توسط محققان مختلفی ارایه شده است که به عنوان نمونه می‌توان به روش‌هایی مانند استفاده از توابع پایه در روش تصویری، استفاده از تبدیل ديفرانسیلی، حساب تغییرات تکراری، هم محلی گسسته، تجزیه ادومین به ترتیب در [22, 21, 20, 13, 9] اشاره کرد. اما روش هموتوبی اختلالات که یک روش نیمه تحلیلی است در سال‌های اخیر کارایی‌هایی در حل مسایل غیرخطی از خود نشان داده است در این خصوص به منابع [14, 8, 7] مراجعه کنید. همچنین در [18, 17] به بهبود روش هموتوبی و ایجاد دیدگاه جدید یعنی استفاده از بخش‌های فقط غیرخطی برای گسستن مساله غیرخطی بزرگتر به مسایل کوچکتر صورت گرفته است. در اینجا از روش هموتوبی اختلالات تعریف شده در [18, 17] در حالت چندمتغیره و چندجمله‌ای‌های ادومین برای حل مثال ۳-۲ استفاده می‌کنیم. لذا ابتدا دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی مثال فوق را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x_n(t) - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|x_i(t)|}{2i^2} - \quad (۸)$$

$$\frac{1}{n^3 e^t} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x_n(s)) + \sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))}{(s+1)^2 \left(2 + \sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))\right)} ds - \frac{1}{t+n^2} = 0, n \in \mathbb{N}$$

تعریف کلی از معادله (۸) می‌تواند به صورت زیر بیان گردد:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) - h(t, n) = 0 \quad (۹)$$

$$g_n(t, s, x(s)) = \frac{\sin(x_n(s)) + \sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))}{(s+1)^2 \left(2 + \sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))\right)}$$

اگر $x(t) \in C_0$ آنگاه $f_n(t, x(t), v_n(x(t))) \in C_0$

حال اگر $y(t) = (y_i(t)) \in C_0$ آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & |f_n(t, x(t), v_n(x(t))) - f_n(t, y(t), v_n(y(t)))| \\ & \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2i^2} |x_i(t) - y_i(t)| \\ & + \frac{1}{n^3 e^t} |v_n(x(t)) - v_n(y(t))| \\ & \leq \left(\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2i^2}\right) \max_{i \geq n} |x_i(t) - y_i(t)| \\ & + \frac{1}{n^3 e^t} |v_n(x(t)) - v_n(y(t))| \\ & \leq \frac{\pi^2}{12} \max_{i \geq n} |x_i(t) - y_i(t)| \\ & + \frac{1}{n^3 e^t} |v_n(x(t)) - v_n(y(t))| \end{aligned}$$

در اینجا $a_n(t) = \frac{\pi^2}{12}$ و $b_n(t) = \frac{1}{n^3 e^t}$. از طرفی $0 < A_0 < 1$

$$k_n = \sup_n \left\{ \left| \frac{1}{t+n^2} \right|; t \in \mathbb{R}_+ \right\} \leq 1$$

برای $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه $K_n \rightarrow 0$. همچنین

$$\begin{aligned} G_n &= \sup_n \left\{ \frac{1}{n^3 e^t} \left| \int_0^{\infty} \frac{\sin(x_n(s)) + \sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))}{(s+1)^2 \left(2 + \sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))\right)} ds \right|; t, s \in \mathbb{R}_+ \right\} \\ &\leq \sup_n \left\{ \frac{1}{n^3 e^t} 2 \left| \int_0^{\infty} \frac{1}{(s+1)^2} ds \right|; t \in \mathbb{R}_+ \right\} \\ &\leq \sup_n \left\{ \frac{2}{n^3 e^t}; t \in \mathbb{R}_+ \right\} = \frac{2}{n^3}, \end{aligned}$$

بنابراین برای $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه $G_n \rightarrow 0$. علاوه بر

این برای $n \rightarrow \infty$ داریم

$$\left| \frac{1}{n^3 e^t} \int_0^{\infty} [g_n(t, s, x(s)) - g_n(t, s, y(s))] ds \right| \rightarrow 0.$$

بنابراین در تعریف هموتوپیی (۱۱) داریم:

$$(v_n(t) - h_1(t, n)) + \left(p \left[-\sum_{i=n}^{\infty} \frac{|v_i(t)|}{2i^2} - \frac{1}{n^3 e^t} \int_0^{\infty} \frac{\sin(v_n(s)) + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i(s)\right)}{(s+1)^2 \left(2 + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i(s)\right)\right)} ds - h_2(t, n) \right] \right) = 0, \quad (14)$$

حال (۱۲) را در (۱۴) جای گذاری می کنیم،

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,n}(t) - h_1(t, n) \right) + \left(p \left[-\sum_{i=n}^{\infty} \frac{\left| \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,i}(t) \right|}{2i^2} - \frac{1}{n^3 e^t} \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,n}(s)\right) + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,i}(s)\right)}{(s+1)^2 \left(2 + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,i}(s)\right)\right)} ds - h_2(t, n) \right] \right) = 0$$

برای رهایی از بخش غیرخطی در (۱۵) از چندجمله‌ای‌های ادومین به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\left| \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,i}(t) \right|}{2i^2} &= \sum_{j=0}^{\infty} p^j A_{j,n}(t), \\ \frac{\sin\left(\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,n}(s)\right) + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,i}(s)\right)}{\left(2 + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,i}(s)\right)\right)} &= \sum_{j=0}^{\infty} p^j B_{j,n}(s), \\ f(t, n) &= \frac{1}{n^3 e^t}. \end{aligned} \right.$$

که در آن $A_{j,n}$ و $B_{j,n}$ چندجمله‌ای‌های ادومین هستند و با فرضیات فوق رابطه (۱۵) به صورت زیر بیان می گردد:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,n}(t) - h_1(t, n) \right) + \quad (16)$$

که در آن A یک عملگر غیرخطی کلی و h تابع معلوم می باشد. عملگر A را به دو عملگر غیرخطی N_1 و N_2 و همچنین تابع h را به دو تابع h_1 و h_2 تبدیل می کنیم. به عبارت دیگر داریم

$$N_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) + N_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) - h_1(t, n) - h_2(t, n) = 0. \quad (10)$$

البته بسته به نوع مساله هر یک از عملگرهای غیرخطی می توانند طوری انتخاب شوند که روی تعداد مشخصی از متغیرها اثر کنند، حتی می توانند بعضی از آنها خطی نیز باشند. حال طبق (۱۰) به تعریف هموتوپیی که بر خواسته از مفهوم توپولوژی است، خواهیم پرداخت. (۱۱)

$$H(v, p) = N_1(v_1, v_2, \dots, v_n, \dots) - h_1(t, n) + p(N_2(v_1, v_2, \dots, v_n, \dots) - h_2(t, n)) = 0$$

که در آن $p \in [0, 1]$ به عنوان پارامتر و v_i ها به عنوان تقریب x_i ها به ازای $i = 1, 2, \dots$ می باشند و هر یک از v_i ها به صورت سری زیر تعریف می شوند:

$$x_n(t) = v_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,n}(t) \quad (12)$$

با تغییر پارامتر p از صفر تا یک در رابطه (۱۱) از حدس اولیه $N_1(v_1, v_2, \dots, v_n, \dots) - h_1(t, n) = 0$

به صورت

$$A(v_1, v_2, \dots, v_n, \dots) - h(t, n) = 0$$

$$x_n(t) = \lim_{p \rightarrow 1} v_n(t)$$

حال برای مساله (۸) عملگرهای N_1 و N_2 تابع h را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$N_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = x_n(t), \quad (13)$$

$$N_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = -\sum_{i=n}^{\infty} \frac{|x_i(t)|}{2i^2}$$

$$-\frac{1}{n^3 e^t} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x_n(s)) + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s)\right)}{(s+1)^2 \left(2 + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s)\right)\right)} ds,$$

$$h(t, n) = \frac{1}{t+n^2} = h_1(t, n) + h_2(t, n).$$

به عنوان نمونه $A_{0,n}(t)$ و $B_{0,n}(s)$ عبارتند از:

$$A_{0,n}(t) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{v_{0,i}(t)}{2i^2},$$

$$B_{0,n}(s) = \frac{\sin(v_{0,n}(s)) + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_{0,i}(s)\right)}{\left(2 + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_{0,i}(s)\right)\right)}. \quad (17)$$

در محاسبات فوق برای بدست آوردن چندجمله‌ای‌های ادومین در برنامه‌نویسی و استفاده از نرم‌افزار متمتیکا، حد بالای i را عدد بزرگی مثل m اختیار می‌کنیم. برای بدست آوردن جواب تقریبی دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی (۷) در الگوریتم ۴-۱، با فرض $m = 2000$ و $n \in \mathbb{N}$ ازای $v_{0,n}(t) = h_1(t, n) = 1$ و $h_2(t, n) = -1 + h(t, n)$ طبق رابطه (۱۲) مولفه‌های جواب تقریبی را تا دو جمله یعنی به صورت $x_n(t) = v_n(t) = v_{0,n}(t) + v_{1,n}(t)$ به ازای چند n متفاوت ارایه می‌کنیم.

$$x_1(t) = v_1(t) = v_{0,1}(t) + v_{1,1}(t) = \quad (18)$$

$$0.82246703 + 0.60460294e^{-t} + \frac{1}{1+t},$$

$$x_3(t) = v_3(t) = v_{0,3}(t) + v_{1,3}(t) =$$

$$0.19746703 + 0.02239270e^{-t} + \frac{1}{9+t},$$

$$x_{30}(t) = v_{30}(t) = v_{0,30}(t) + v_{1,30}(t) =$$

$$0.00840317 + 0.0000028e^{-t} + \frac{1}{3600+t},$$

$$x_{100}(t) = v_{100}(t) = v_{0,100}(t) + v_{1,100}(t) =$$

$$0.00502508 + 6.04602937 \times 10^{-7} e^{-t} + \frac{1}{10000+t},$$

با رسم چندجمله دلخواه مانند $x_1(t), x_3(t), x_{30}(t), x_{100}(t)$ از جملات دنباله $x(t) = (x_i(t))_{i=1}^{\infty}$ ، نشان داده می‌شود که برای i های بزرگتر $X_i(t)$ به محور افقی نزدیکتر می‌شوند. یعنی جملات دنباله به تابع صفر میل می‌کند (به شکل ۱-، مراجعه نمایید).

$$p \left(-\sum_{j=0}^{\infty} p^j A_{j,n}(t) - f(t, n) \right) \int_0^{\infty} \frac{1}{(s+1)^2} \sum_{j=0}^{\infty} p^j B_{j,n}(s) ds - h_2(t, n) = 0$$

با مرتب‌سازی رابطه (۱۶) بر حسب توان‌های p خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} & (v_{0,n}(t) - h_1(t, n)) \\ & + p \left(v_{1,n}(t) - A_{0,n}(t) - f(t, n) \int_0^{\infty} \frac{1}{(s+1)^2} B_{0,n}(s) ds - h_2(t, n) \right) \\ & + p^2 \left(v_{2,n}(t) - A_{1,n}(t) - f(t, n) \int_0^{\infty} \frac{1}{(s+1)^2} B_{1,n}(s) ds \right) \\ & \vdots \\ & + p^j \left(v_{j,n}(t) - A_{j-1,n}(t) - f(t, n) \int_0^{\infty} \frac{1}{(s+1)^2} B_{j-1,n}(s) ds \right) + \dots = 0, \end{aligned}$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب توان‌های p در رابطه اخیر به الگوریتم تکراری زیر می‌رسیم:

۴-۱۱ الگوریتم.

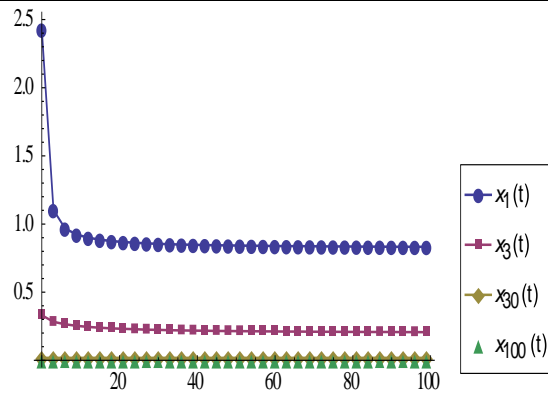
$$\begin{cases} v_{0,n}(t) = h_1(t, n), \\ v_{1,n}(t) = h_2(t, n) + A_{0,n}(t) + f(t, n) \int_0^{\infty} \frac{1}{(s+1)^2} B_{0,n}(s) ds, \\ v_{j,n}(t) = A_{j-1,n}(t) + f(t, n) \int_0^{\infty} \frac{1}{(s+1)^2} B_{j-1,n}(s) ds, j \geq 2 \end{cases}$$

در الگوریتم فوق $f(t, n) = \frac{1}{t+n^2}$ و $h_2(t, n) = \frac{1}{n^3 e^t}$

که از روی آن برای سادگی محاسبات $h_1(t, n)$ و $h_2(t, n)$ تعیین می‌گردند. همچنین $A_{j,n}$ و $B_{j,n}$

چندجمله‌ای‌های ادومین از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} A_{k,n}(t) = \frac{1}{k! d p^k} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \frac{\left| \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,i}(t) \right|}{2i^2} \right)_{p=0}, \\ B_{k,n}(s) = \frac{1}{k! d p^k} \left(\frac{\sin\left(\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,n}(s)\right) + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,i}(s)\right)}{\left(2 + \sin\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j,i}(s)\right)\right)} \right)_{p=0}. \end{cases}$$



شکل ۱ - نمایش رفتار جملات دنباله

بنابراین با توجه به شکل ۱، $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i(t) \rightarrow 0$ و در نتیجه
 $x(t) = (x_i(t))_{i=1}^{\infty} \in C_0$ یعنی جواب دستگاه معادلات
 انتگرال غیرخطی نامتناهی (۸) را در فضای C_0 به صورت
 یک دنباله با جملات (۱۸) آرایه کرده‌ایم.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله با استفاده از یک تعمیم مناسب از عملگر
 تراکمی مر-کلر و اندازه نافشردگی توانسته‌ایم ضمن وجود
 جواب برای دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی
 بعضی از کارهای نویسندگان دیگر را نیز گسترش دهیم. از
 طرفی از لحاظ عددی دست به یافتن آن جواب زده‌ایم که
 بر جذابیت و توانمندی روش‌مان می‌افزاید. انتظار می‌رود
 که روند پیشنهادی این مقاله برای دستگاه معادلات
 انتگرال چندگانه غیرخطی نامتناهی نیز موثر واقع شود.

- [9] E. Babolian, M. Mordad (2011). A numerical method for solving systems of linear and nonlinear integral equations of the second kind by hat basis functions, *Computers & Mathematics with Applications*.
- [10] J. Banas (1981). Measures of noncompactness in the space of continuous tempered functions, *Demonstratio Math.*
- [11] J. Banas, K. Goebel (1980). Measures of Noncompactness in Banach Spaces, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Dekker, New York.
- [12] J. Banaś and M. Mursaleen, (2014). Sequence spaces and measures of noncompactness with applications to differential and integral equations, Springer, New Delhi.
- [13] E. Celik, Kh. Tabatabaei (2013). Solving a Class of Volterra Integral Equation Systems by the Differential Transform Method, *International Journal of Nonlinear Science*.
- [14] Ji. H. He (2000). A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for nonlinear problems, *International Journal of Non-linear Mechanics*.
- [15] A. Meir, E. Keeler (1969). A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal.*
- [16] C. Ming Chen (2012). Fixed point theory for the cyclic weaker Meir-Keeler function in complete metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.*
- [17] M. Rabbani, (2015). Modified homotopy method to solve non-linear integral equations, *Int. J. Nonlinear Anal.*
- [1] R.P. Agarwal, D. O'Regan (2004). *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press.
- [2] A. Aghajani, J. Banas, N. Sabzali (2013). Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.*
- [3] A. Aghajani, M. Mursaleen, A. Shole Haghghi (2015). Fixed point theorems for Meir-Keeler condensing operators via measure of noncompactness, *Acta Mathematica Scientia.*
- [4] R. Arab (2015). Some fixed point theorems in generalized Darbo fixed point theorem and the existence of solutions for system of integral equations, *J. Korean Math*
- [5] R. Arab, R. Allahyari and A. S. Haghghi (2014). Existence of solutions of infinite systems of integral equations in two variables via measure of noncompactness, *Appl. Math. Comput.*
- [6] R. Arab, R. Allahyari and A.S. Haghghi (2015). Existence of solutions for some classes of integro-differential equations via measure of noncompactness, *Electron. J. Qual Theory Differ.*
- [7] Z. Ayati, J. Biazar (2015). On the convergence of Homotopy perturbation method, *Journal of the Egyptian Mathematical Society.*
- [8] E. Babolian, A. Azizi, J. Saeidian, (2009). Some notes on using the homotopy perturbation method for solving time-dependent differential equations, *Mathematical and Computer Modelling.*

[18] M. Rabbani, (2013). New Homotopy Perturbation Method to Solve Non-Linear Problems, Journal of mathematics and computer Science .

[19] M. Rabbani, R. Arab, A.A. Tabatabai Adnani (2017). New operators via measure of non-compactness, Journal of New Researches in Mathematics.

[20] M. Rabbani, R. Jamali (2012). Solving Nonlinear System of Mixed Volterra-Fredholm Integral Equations by Using Variational Iteration Method, The Journal of Mathematics and Computer Science.

[21] M. Rabbani, S.H. Kiasoltani (2011). Solving of Nonlinear System of Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations by using Discrete Collocation Method, The Journal of Mathematics and Computer Science.

[22] M. Rabbani, R. Zarali (2012). Solution of Fredholm Integro-Differential Equations System by Modified Decomposition Method, The Journal of Mathematics and Computer Science.