

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک رویکرد پارامتری برای حل مسأله برنامه ریزی چندهدفه کسری خطی فازی

سید هادی ناصری^۱، ام کلثوم خزائی کوه پر^{۲*}

(۲۰۱) دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۱۱/۱۱

چکیده

در این مقاله یک مسأله برنامه ریزی چند هدفه کسری خطی با متغیرها و بردار منابع فازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و الگوریتمی با رویکرد پارامتری جهت حل آن ارائه می‌شود. فرآیند حل پیشنهاد شده برای تعیین جواب بهینه مسأله مبتنی بر رویکرد پارامتری خواهد بود که این امر ضمن انطباق بیشتر جواب با واقعیت، اطلاعات جامع‌تری را در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار خواهد داد. سادگی روش مطرح شده یکی از مزیت‌های الگوریتم پیشنهادی است که امکان درک مطلوب‌تر فرآیند حل را توسط کاربر فراهم می‌آورد. همچنین جهت توصیف فرآیند حل روش پیشنهاد شده، یک مثال عددی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: برنامه ریزی کسری خطی، برنامه ریزی فازی، برنامه ریزی چند هدفه .

۱- مقدمه

برنامه ریزی کسری خطی^۲ (LFP) از جمله موضوعات مورد توجه در برنامه ریزی ریاضی است. طیف گسترده‌ای از مسائل دنیای واقعی ما بر پایه نسبت‌های نسبی از مقادیر فیزیکی و یا اقتصادی هستند. در برنامه ریزی از نسبت تولید به کارمندان، در حوزه مراقبت‌های بهداشتی و بیمارستان از نسبت هزینه به بیمار و همچنین در برنامه ریزی مالی از نسبت بدهی به حقوق مالکین شرکت می‌توان به عنوان مثال‌های کاربردی از این نوع برنامه ریزی نام برد.

برای اولین بار ایزبل و مارلو [۴] یک نمونه از مسائل برنامه ریزی کسری خطی را شناسایی کردند و آن را با استفاده از دنباله‌ای از مسائل برنامه ریزی خطی حل کردند. بعد از آن یک روش تبدیل متغیر توسط چارنز و کوپر [۵] جهت حل این گونه مسائل ارائه شد. گیلومور و گوموری [۶]، مارتوس [۷] و سواراپ [۸]، یک مسأله برنامه ریزی کسری خطی را با استفاده از روشهای مختلف بر پایه روش سیمپلکس بهبودیافته - مطرح شده توسط دانتزیک [۹] - حل کردند. پس از اینکه چادها [۱۰] یک روش برای حل مسأله برنامه ریزی کسری خطی با توابع قدرمطلق مقدار پیشنهاد کرد، چان [۱۱] یک رویکرد برنامه ریزی آرمانی فازی را برای حل این گونه مسائل مطرح کرد. طنطاوی [۱۲، ۱۳] دو رویکرد متفاوت جهت شدنی و رویکرد دوگانگی را برای حل این مسائل پیشنهاد کرد. اخیراً نیز مجتبی و همکاران [۱۴]، یک مسأله برنامه ریزی کسری خطی با ضرایب بازه‌ای را با استفاده از یک تابع هدف بر پایه روش چارنز و کوپر حل کردند.

در مدل‌سازی واقعی یک مسأله برنامه ریزی کسری خطی همانند سایر مدل‌سازی‌های حقیقی ابهام و یا نادقیق بودن پارامترهای مسأله ناشی از ارزیابی‌های

تجربی یا ذهنی متخصصین و سایر عوامل محیطی، امری رایج و گریزناپذیر است. از این رو، پارامترهای فازی به عنوان ابزاری واقع بینانه در مدل‌سازی این گونه مسائل به کار گرفته شد. بلمن و زاده [۱۵] ایده پیشینه کردن تصمیمات را برای مسائل تصمیم‌گیری فازی مطرح کردند. نظریه کلی برنامه ریزی خطی فازی نخستین بار توسط تاناکا و همکاران [۱۶] ارائه شد و پس از آن محققین بسیاری روش‌های مختلفی را در این حوزه مطرح کردند. ([۲۰، ۱۹، ۱۸، ۱۷]). پال و همکاران [۲۱] یک روند برنامه ریزی آرمانی را برای یک مسأله برنامه ریزی چندهدفه کسری خطی فازی مورد مطالعه قرار دادند. از تلاش‌های اخیر محققین در زمینه برنامه ریزی کسری فازی می‌توان به کار چاینادورای و موتوکومار [۲۲] اشاره کرد که یک مسأله برنامه ریزی کسری خطی با ضرایب و متغیرهای فازی تحت عنوان مسأله برنامه ریزی کسری خطی کاملاً فازی را مورد مطالعه قرار داده و روشی برای محاسبه یک جواب بهینه (α, τ) برای آن ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از تبدیل مسأله مورد نظر به یک مسأله برنامه ریزی دو هدفه که خود تبدیل به یک مسأله برنامه ریزی خطی خواهد شد رویکرد خود را مطرح کردند. همچنین ناصری و خزائی کوه پر ([۲۳]، [۱])، ضمن ارائه یک رویکرد بهبودیافته در حل مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب فازی و ضرایب بازه‌ای، کاربرد آن را در مسأله برنامه ریزی چندهدفه کسری خطی با ضرایب فازی به صورت یک الگوریتم یکپارچه مطرح کردند. یکی از کاربردهای برنامه ریزی کسری در چارچوب مدل تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی فازی را می‌توان در منبع [۳] ملاحظه کرد. در این مقاله یک مسأله برنامه ریزی چندهدفه کسری خطی با متغیرها و بردار منابع فازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و با یک رویکرد پارامتری،

تعریف ۲ [۲۵]. یک عدد فازی دلخواه را در شکل پارامتری می توان به صورت زوج مرتبی از توابع $(\underline{f}(r), \bar{f}(r))$, $0 \leq r \leq 1$ نمایش داد بطوریکه در شرایط زیر صدق کنند:

(۱) $\underline{f}(r)$ یک تابع کراندار، صعودی یکنواخت و از چپ پیوسته روی $[0, 1]$ می باشد.

(۲) $\bar{f}(r)$ یک تابع کراندار، نزولی یکنواخت و از چپ پیوسته روی $[0, 1]$ می باشد.

(۳) $\underline{f}(r) \leq \bar{f}(r)$, $0 \leq r \leq 1$

۲-۱- حساب روی اعداد فازی پارامتری و رابطه ترتیبی بین آن ها

بر اساس تعریف ۲، فرض کنید $\tilde{x} = (\underline{x}(r), \bar{x}(r))$ و $\tilde{y} = (\underline{y}(r), \bar{y}(r))$ دو عدد فازی در نمایش پارامتری، و k یک اسکالر حقیقی باشد. در این صورت حساب روی این اعداد فازی پارامتری را به صورت زیر تعریف می کنیم (۲۵)، (۲):

i. $\tilde{x} \approx \tilde{y} \Leftrightarrow \underline{x}(r) = \underline{y}(r), \bar{x}(r) = \bar{y}(r)$

ii. $\tilde{x} + \tilde{y} = (\underline{x}(r) + \underline{y}(r), \bar{x}(r) + \bar{y}(r))$

iii. $k\tilde{x} = (k\underline{x}(r), k\bar{x}(r))$, $k \in \mathbb{R}$,

iv. $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = (\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\})$

v. $\tilde{x}/\tilde{y} = (\min\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\}, \max\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\})$, $\tilde{y} \neq \tilde{0}$

$\tilde{y} = (\underline{y}(r), \bar{y}(r))$

تذکر ۱. در فضای همه مجموعه های فازی در نمایش پارامتری تعریف می کنیم: $\tilde{0} = (0, 0)$ و $\tilde{1} = (1, 1)$.

دو عدد فازی $\tilde{x} = (\underline{x}(r), \bar{x}(r))$ و $\tilde{y} = (\underline{y}(r), \bar{y}(r))$ را در نظر بگیرید. برای معرفی

الگوریتمی جهت حل این گونه از مسائل ارائه می شود که جواب بهینه نهایی را به صورت پارامتری نتیجه خواهد داد. این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است:

در بخش دوم، برخی تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز را بیان می کنیم. در بخش سوم، برنامه ریزی کسری خطی را در محیط های قطعی و فازی مورد توجه قرار خواهیم داد. در بخش چهارم، الگوریتم مورد نظر برای حل مسأله ارائه می شود. در نهایت یک مثال عددی جهت توصیف فرآیند حل با الگوریتم پیشنهادی در این بخش مطرح خواهد شد.

۲- تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش برخی تعاریف و مفاهیم اولیه ای که مورد نیاز است را ارائه می کنیم.

تعریف ۱ [۲۴]. نگاشت $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ را یک عدد فازی گوئیم به شرطی که در موارد زیر صدق کند:

(۱) f نیم پیوسته بالایی است.

(۲) در نقاط خارج از بازه $[c, d] \subset \mathbb{R}$ داریم: $f(x) = 0$

(۳) اعداد حقیقی a, b وجود دارند بطوریکه $c \leq a \leq b \leq d$ و تابع $f(x)$ روی $[c, a]$ به طور یکنواخت صعودی و روی $[b, d]$ به طور یکنواخت نزولی است. همچنین به ازای هر $x \in [a, b]$ داریم: $f(x) = 1$

قرارداد ۱: مجموعه همه اعداد فازی (معرفی شده در تعریف ۱) را با $F(\mathbb{R})$ نشان می دهیم.

اکنون تعریف دیگری از یک عدد فازی با دیدگاه پارامتری را معرفی می کنیم که در ادبیات فازی، معادل با تعریف ۱ می باشد.

حالت تک هدفه و چندهدفه مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۳-۱- مسأله برنامه ریزی کسری خطی

تعریف ۳ [۵]. یک مسأله برنامه ریزی کسری خطی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\max Z(x) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + p}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + q} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

s.t.

$$x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}, \quad (1)$$

که در آن S مجموعه ای ناتهی و کراندار است، $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $b \in \mathbb{R}^m$ ، $c, d \in \mathbb{R}^n$ و $p, q \in \mathbb{R}$. اکنون برای برخی از مقادیر x ممکن است $D(x)$ برابر با صفر شود. از این رو جهت جلوگیری از وقوع این شرایط، باید داشته باشیم:

$\{x \geq 0, Ax \leq b \Rightarrow D(x) > 0\}$ و یا $\{x \geq 0, Ax \leq b \Rightarrow D(x) < 0\}$ بدون از دست دادن کلیت برای سهولت، فرض می‌کنیم شرط زیر برای مسأله برنامه ریزی کسری خطی داده شده در (۱) برقرار باشد:

$$x \geq 0, Ax \leq b \Rightarrow D(x) > 0. \quad (2)$$

تعریف ۴ [۲۷]. دو مسأله برنامه ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max F(x) & \quad \text{و} \quad \max G(x) \\ \text{s.t. } x \in S & \quad (i) \quad \text{s.t. } x \in Q \\ & \quad (ii) \end{aligned}$$

در این صورت مسائل (i) و (ii) معادل هم هستند اگر و فقط اگر یک نگاشت یک به یک f از مجموعه شدنی مسأله (i) به روی مجموعه شدنی مسأله (ii) وجود داشته باشد بطوریکه برای همه $x \in S$ ، داشته باشیم:

$$F(x) = G(f(x)).$$

ترتیب روی این اعداد فازی، با الگوبری از رویکرد گوتچل و واکسمن [۲۶]، شاخص oh را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$oh(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_0^1 r[(\underline{x}(r) - \underline{y}(r)) + (\bar{x}(r) - \bar{y}(r))] dr$$

در این صورت ترتیب زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \tilde{x} \lesssim \tilde{y} & \Leftrightarrow oh(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0 \\ \tilde{x} < \tilde{y} & \Leftrightarrow oh(\tilde{x}, \tilde{y}) < 0 \end{aligned}$$

همچنین می‌نویسیم $\tilde{x} \gtrsim \tilde{y}$ اگر $(\tilde{x} > \tilde{y})$ و تنها اگر $(\tilde{y} < \tilde{x})$. حال اگر متر d روی مجموعه همه اعداد فازی پارامتری را به صورت

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \\ d((\underline{x}(r), \bar{x}(r)), (\underline{y}(r), \bar{y}(r))) &= \\ \sup\{\max & \\ \{|\underline{x}(r) - \underline{y}(r)|, |\bar{x}(r) - \bar{y}(r)|\}; & 0 \leq \\ r \leq 1\} & \end{aligned}$$

در نظر بگیریم [۲۶]، کراندار روی یک مجموعه از اعداد فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳. یک مجموعه از اعداد فازی را کراندار گوئیم هرگاه یک عدد حقیقی M وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر عدد فازی \tilde{x} متعلق به این مجموعه داشته باشیم:

$$d(\tilde{x}, \tilde{0}) < M$$

۳- برنامه ریزی کسری خطی

در این بخش، شکل کلی از مسائل برنامه ریزی کسری خطی را معرفی نموده و سپس روش چارنز و کوپر [۵] را که مبتنی بر تبدیل خطی جهت حل این گونه مسائل است، ارائه خواهیم کرد. در زیربخش دوم، مسأله برنامه ریزی کسری خطی فازی در دو

آن $x^* = \frac{y^*}{t^*}$ و مقدار توابع هدف در این نقاط با هم برابر است.

تعریف ۵ [۲۷]. مسأله برنامه ریزی کسری خطی (۱) را با شرط (۲) در نظر بگیرید. مسأله (۱) یک برنامه ریزی کسری مقعر-محدب استاندارد است، هرگاه $N(\cdot)$ روی S مقعر بوده و به ازای برخی از مقادیر $x \in S$ داشته باشیم $N(x) \geq 0$ و همچنین $D(\cdot)$ روی S مثبت و محدب باشد.

قضیه ۳ [۲۹, ۳۰]. اگر مسأله (۱) یک برنامه ریزی کسری مقعر-محدب استاندارد باشد که در یک نقطه x^* به مقدار بیشینه (مطلق) برسد، آنگاه مسأله تبدیل یافته مرتبط (۵)، همان مقدار بیشینه را در یک نقطه (t^*, y^*) بدست می‌آورد، که در آن $x^* = y^*/t^*$. علاوه بر این، مسأله (۵) یک تابع هدف مقعر و یک مجموعه شدنی محدب دارد. در مسأله (۱) فرض کنید $N(x)$ برای هر $x \in S$ ، مقعر و منفی و $D(x)$ روی S مقعر و مثبت است. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \max_{x \in S} \frac{N(x)}{D(x)} &\Leftrightarrow \min_{x \in S} \frac{-N(x)}{D(x)} \\ &\Leftrightarrow \max_{x \in S} \frac{D(x)}{-N(x)}, \end{aligned}$$

که در آن $-N(x)$ ، محدب و مثبت است. بنابراین، مسأله (۱) به یک مسأله برنامه ریزی کسری استاندارد مقعر-محدب تبدیل شده است. از این رو با استفاده از قضیه ۱، مسأله (۱) به مسأله برنامه ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & tD\left(\frac{y}{t}\right) \\ \text{s.t.} \quad & A\left(\frac{y}{t}\right) - bt \leq 0, \\ & -tN\left(\frac{y}{t}\right) \leq 1, \\ & t, y \geq 0. \end{aligned}$$

قضیه ۱ [۵, ۲۸]. فرض کنید که هیچ نقطه $(y, 0)$

با $y \geq 0$ برای مسأله برنامه ریزی خطی

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T y + pt \\ \text{s.t.} \quad & d^T y + qt = 1, \\ & Ay - bt \leq 0, \end{aligned} \quad (۳)$$

$$t \geq 0, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

شدنی نباشد. در این صورت با فرض برقراری شرط (۲)، مسأله (۱) با مسأله برنامه ریزی خطی (۳) معادل است.

اثبات: برای اثبات به منبع [۲۸] رجوع کنید. اکنون دو مسأله مرتبط زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & tN\left(\frac{y}{t}\right) \\ \text{s.t.} \quad & A\left(\frac{y}{t}\right) - bt \leq 0, \\ & tD\left(\frac{y}{t}\right) = 1, \\ & t > 0, y \geq 0, \end{aligned} \quad (۴)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & tN\left(\frac{y}{t}\right) \\ \text{s.t.} \quad & A\left(\frac{y}{t}\right) - bt \leq 0, \\ & tD\left(\frac{y}{t}\right) \leq 1, \\ & t > 0, y \geq 0, \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن مسأله (۴) با استفاده از تبدیل $t = \frac{1}{D(x)}$ و $y = tx$ در (۱) بدست آمده و مسأله (۵) از جایگذاری محدودیت تساوی $tD\left(\frac{y}{t}\right) = 1$ با محدودیت نامساوی $tD\left(\frac{y}{t}\right) \leq 1$ در (۴) بدست آمده است.

قضیه ۲ [۲۹]. برای برخی $N(\eta) \geq 0, \eta \in S$ اگر مسأله (۱) در $x = x^*$ به مقدار بیشینه (مطلق) برسد، آنگاه مسأله (۳) در یک نقطه $(t, y) = (t^*, y^*)$ به مقدار بیشینه (مطلق) می‌رسد که در

دو قضیه زیر نشان می‌دهند که قضایای ۱ و ۲ در حالتی که متغیرها و بردار منابع مسأله فازی هستند نیز برقرار است.

قضیه ۴. فرض کنید که هیچ نقطه (\tilde{y}, \tilde{z}) با $\tilde{y} \succeq \tilde{z}$

\tilde{z} برای مسأله برنامه ریزی خطی فازی

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T \tilde{y} + p \tilde{t} \\ \text{s.t.} \quad & d^T \tilde{y} + \tilde{t} q \approx \tilde{\gamma}, \\ & A \tilde{y} - \tilde{b} \tilde{t} \lesssim \tilde{z}, \end{aligned} \quad (۸)$$

$$\tilde{t} \succeq \tilde{z}, \tilde{y} \succeq \tilde{z}, \tilde{y} \in (F(\mathbb{R}))^n, \tilde{t} \in F(\mathbb{R})$$

شدنی نباشد. در این صورت با فرض برقراری شرط (۷)، مسأله FLFP (۶) با مسأله برنامه ریزی خطی فازی (۸) معادل است.

اثبات: برای \tilde{x} شدنی از مسأله (۶)، تعریف می‌کنیم

$$\tilde{t} \approx \tilde{z} \quad \text{به طوری که} \quad q(\tilde{x}) = (\tilde{y}, \tilde{t})$$

$$\tilde{y} \succeq \tilde{z} \quad \text{و} \quad \tilde{y} \approx \tilde{t} \tilde{x} \quad \text{در نتیجه} \quad \tilde{y} \approx \tilde{z} / (d^T \tilde{x} + q)$$

$\tilde{z} > \tilde{z}$. همچنین با استفاده از لم ۱، داریم:

$$A \tilde{y} - \tilde{b} \tilde{t} \approx \tilde{t} (A \tilde{x} - \tilde{b}) \lesssim \tilde{z}$$

۹

$$d^T \tilde{y} + \tilde{t} q \approx \tilde{t} (d^T \tilde{x} + q) \approx \tilde{\gamma}$$

بنابراین (\tilde{y}, \tilde{t}) برای مسأله (۸) شدنی است. بعکس

اگر (\tilde{y}, \tilde{t}) برای مسأله (۸) شدنی باشد و هیچ نقطه

(\tilde{y}, \tilde{z}) ی برای (۸) شدنی نباشد، آنگاه $\tilde{x} \approx \tilde{z}$

$\tilde{z} > \tilde{z}$ ، \tilde{t} در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\tilde{x} \succeq \tilde{z}, A \tilde{x} - \tilde{b} \approx \frac{A \tilde{y} - \tilde{b} \tilde{t}}{\tilde{t}} \approx \tilde{z}$$

در نتیجه $q(\cdot)$ مجموعه جواب شدنی مدل (۶) را به

صورت یک به یک به روی مجموعه جواب شدنی مدل

(۸) می‌نگارد. بعلاوه تابع هدف مرتبط به صورت زیر

است:

در بخش بعد یک مسأله برنامه ریزی کسری خطی فازی در دو حالت تک هدفه و چندهدفه معرفی می‌شود. سپس یک الگوریتم برای حل این گونه مسائل تشریح می‌شود.

۳-۲- مسأله برنامه ریزی کسری خطی فازی

در این بخش ابتدا یک مسأله برنامه ریزی کسری خطی تک هدفه در محیط فازی معرفی می‌شود و سپس برنامه ریزی کسری خطی را در حالت چندهدفه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳-۲-۱- مسأله برنامه ریزی کسری خطی فازی

تک هدفه

تعریف ۶ [۲۸]. یک مسأله برنامه ریزی کسری

خطی فازی در حالت تک هدفه را که در آن متغیرها

و بردار منابع فازی هستند، با $FLFP^z$ نشان می‌

دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{Z}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{N}(\tilde{x})}{\tilde{D}(\tilde{x})} = \frac{\sum_{j=1}^n c_j \tilde{x}_j + p}{\sum_{j=1}^n d_j \tilde{x}_j + q} \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{x} \in \tilde{S}, \end{aligned} \quad (۶)$$

بطوریکه $p, q \in \mathbb{R}$ و $c, d \in \mathbb{R}^n$ همچنین

$$\tilde{S} = \{ \tilde{x} \in (F(\mathbb{R}))^n : A \tilde{x} \lesssim \tilde{b}, \tilde{x} \succeq \tilde{z} \},$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \tilde{b} \in (F(\mathbb{R}))^m.$$

با استدلالی مشابه حالت قطعی شرط زیر را برای مدل

(۶) در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{x} \succeq \tilde{z}, A \tilde{x} \lesssim \tilde{b} \Rightarrow \tilde{D}(\tilde{x}) > \tilde{z}$$

(۷)

لم ۳۱۱ [۳۱]. برای اعداد فازی \tilde{x}, \tilde{y} و روابط زیر را

داریم:

i. $\tilde{x}(\tilde{y} + \tilde{z}) \approx \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{z}$

ii. $\tilde{x}(\tilde{y} - \tilde{z}) \approx \tilde{x}\tilde{y} - \tilde{x}\tilde{z}$

$$\tilde{S} = \{\tilde{x} \in (F(\mathbb{R}))^n : A \tilde{x} \lesssim \tilde{b}, \tilde{x} \gtrsim \tilde{\tau}\}$$

$$\tilde{b} \in (F(\mathbb{R}))^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

دو مجموعه اندیس زیر را در نظر بگیرید:

$$L = \{l \mid \tilde{N}_l(\tilde{x}) \gtrsim \tilde{\tau}, \text{ for some } \tilde{x} \in \tilde{S}\},$$

$$L^c = \{l \mid \tilde{N}_l(\tilde{x}) < \tilde{\tau}, \text{ for each } \tilde{x} \in \tilde{S}\},$$

بطوریکه $L \cup L^c = \{1, \dots, k\}$

فرض کنید به ازای هر l ، $\tilde{D}_l(\cdot)$ روی \tilde{S} که مجموعه ای ناتهی و کراندار است، مثبت باشد. همچنین فرض کنید \tilde{t} حداقل مقدار $\frac{\tilde{\tau}}{d_l \tilde{x} + q_l}$ و $\frac{-\tilde{\tau}}{c_l \tilde{x} + p_l}$ به ترتیب برای $l \in L$ و $l \in L^c$ باشد. در این صورت برای $l \in L$ داریم: $\tilde{t} \lesssim \frac{\tilde{\tau}}{d_l \tilde{x} + q_l}$ و برای $l \in L^c$ خواهیم داشت: $\tilde{t} \lesssim \frac{-\tilde{\tau}}{c_l \tilde{x} + p_l}$.

برای $\tilde{\tau} > \tilde{t}$ ، قرار دهید: $\tilde{y} \approx \tilde{t} \tilde{x}$. اکنون با استفاده از قضایای ۴، ۵ و نامساوی های یاد شده، می توان یک مسأله برنامه ریزی چندهدفه خطی معادل را برای مسأله (۹) به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\max \quad \left\{ \tilde{t} \tilde{N}_l \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{t}} \right), \text{ for } l \in L; \tilde{t} \tilde{D}_l \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{t}} \right), \text{ for } l \in L^c \right\}$$

$$\text{s.t.} \quad \tilde{t} \tilde{D}_l \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{t}} \right) \lesssim \tilde{\tau}, \text{ for } l \in L,$$

$$-\tilde{t} \tilde{N}_l \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{t}} \right) \lesssim \tilde{\tau}, \text{ for } l \in L^c,$$

$$A \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{t}} \right) - \tilde{b} \tilde{t} \lesssim \tilde{\tau},$$

$$\tilde{y} \gtrsim \tilde{\tau}, \tilde{t} \gtrsim \tilde{\tau} \quad (10)$$

مشابه استدلالی که در [۲۸] برای مدل قطعی نشان داده شده است و همچنین با استفاده از خواص مجموعه های فازی، مجموعه محدودیت های مسأله (۱۰) نیز همواره مجموعه ای ناتهی محدب است که دارای جواب شدنی می باشد (جهت مشاهده جزئیات بیشتر در رابطه با خواص مجموعه های فازی محدب

$$\frac{c^T \tilde{x} + p}{d^T \tilde{x} + q} \approx \frac{c^T \tilde{y} + p \tilde{t}}{d^T \tilde{y} + q \tilde{t}} \approx \frac{c^T \tilde{y} + p \tilde{t}}{\tilde{\tau}} \approx c^T \tilde{y} + p \tilde{t}$$

در نتیجه معادل بودن مورد نظر نتیجه می شود.

قضیه ۵. برای برخی مقادیر $\tilde{\eta} \in \tilde{S}$ ، $\tilde{N}(\tilde{\eta}) \gtrsim \tilde{\tau}$ ، اگر مسأله (۶) در $\tilde{x} = \tilde{x}^*$ به مقدار بیشینه (مطلق) برسد، آنگاه مسأله (۸) در یک نقطه $(\tilde{y}, \tilde{t}) = (\tilde{y}^*, \tilde{t}^*)$ به مقدار بیشینه (مطلق) می رسد که در آن $\frac{\tilde{y}^*}{\tilde{t}^*} \approx \tilde{x}^*$ و مقدار توابع هدف در این نقاط با هم برابر است.

اثبات: با تعمیم اثبات قضیه ۳ و با استفاده از روابط حساب فازی نتیجه مورد نظر بدست می آید.

۳-۲-۲- مسأله برنامه ریزی چندهدفه کسری خطی فازی

تعریف ۷ [۲۸]. یک مسأله برنامه ریزی چندهدفه کسری خطی فازی را که در آن متغیرها و بردار منابع فازی هستند، با FMOLFP نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\max \quad \{ \tilde{Z}_1(\tilde{x}), \tilde{Z}_2(\tilde{x}), \dots, \tilde{Z}_k(\tilde{x}) \}$$

$$\text{s.t.} \quad \tilde{x} \in \tilde{S}, \quad (9)$$

بطوریکه برای هر $l \in \{1, \dots, k\}$ داریم: $\tilde{Z}_l(\tilde{x}) =$

$$c_l, d_l \in \mathbb{R}^n \quad \frac{\tilde{N}_l(\tilde{x})}{\tilde{D}_l(\tilde{x})} = \frac{\sum_{j=1}^n c_{lj} \tilde{x}_j + p_l}{\sum_{j=1}^n d_{lj} \tilde{x}_j + q_l}$$

و $p_l, q_l \in \mathbb{R}$

همچنین

گام سوم: با توجه به ماهیت متغیرهای \bar{t} و \bar{y} ، دو زیرمسئله چندهدفه قطعی زیر را جهت حل مدل (۱۲) تشکیل دهید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \{\bar{t} \cdot N_l \left(\frac{y'}{\bar{t}} \right), \text{ for } l \in L ; \\ & \bar{t} \cdot D_l \left(\frac{y'}{\bar{t}} \right), \text{ for } l \in L^c \} \\ \text{s.t.} \quad & \bar{t} \cdot D_l \left(\frac{y'}{\bar{t}} \right) \leq 1, \text{ for } l \in L , \\ & -\bar{t} \cdot N_l \left(\frac{y'}{\bar{t}} \right) \leq 1, \text{ for } l \in L^c , \\ & A \left(\frac{y'}{\bar{t}} \right) - \underline{b}(\cdot) \bar{t} \leq 0 , \\ & \underline{y}', \bar{t}' \geq 0 , \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \{\underline{t} \cdot N_l \left(\frac{\bar{y}}{\underline{t}} \right), \text{ for } l \in L ; \\ & \underline{t} \cdot D_l \left(\frac{\bar{y}}{\underline{t}} \right), \text{ for } l \in L^c \} \\ \text{s.t.} \quad & \underline{t} \cdot D_l \left(\frac{\bar{y}}{\underline{t}} \right) \leq 1, \text{ for } l \in L , \\ & -\underline{t} \cdot N_l \left(\frac{\bar{y}}{\underline{t}} \right) \leq 1, \text{ for } l \in L^c , \\ & A \left(\frac{\bar{y}}{\underline{t}} \right) - \bar{b}(\cdot) \underline{t} \leq 0 , \\ & \bar{y}', \underline{t}' \geq 0 . \end{aligned} \quad (14)$$

با حل جداگانه مسائل (۱۳) و (۱۴) توسط عملگر \min زیرمن [۳۴]، به ترتیب به جواب های $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n, \bar{t}'\}$ و $\{\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n, \underline{t}'\}$ متناظر با $r = 0$ می‌رسیم.

تذکر ۴: جهت بکارگیری عملگر \min زیرمن، ابتدا برای هر یک از توابع هدف مسئله مورد نظر یک تابع عضویت معرفی می‌کنیم. در اینجا روند حل با استفاده از روش مذکور را برای مدل (۱۳) بیان می‌کنیم. به طریق مشابه این روند قابل تعمیم برای مدل های (۱۴)، (۱۶) و (۱۷) خواهد بود:

ابتدا تابع عضویت را برای هر یک از توابع هدف مدل (۱۳)، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای $l \in L$

و برنامه ریزی محدب فازی، منابع [۳۲] و [۳۳] پیشنهاد می‌گردد).

صورت پارامتری مسئله (۱۰) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \max \quad & \{(\underline{t}, \bar{t}) \tilde{N}_l \left(\frac{(y, \bar{y})}{(\underline{t}, \bar{t})} \right), \text{ for } l \in L ; \\ & (\underline{t}, \bar{t}) \tilde{D}_l \left(\frac{(y, \bar{y})}{(\underline{t}, \bar{t})} \right), \text{ for } l \in L^c \} \\ \text{s.t.} \quad & (\underline{t}, \bar{t}) \tilde{D}_l \left(\frac{(y, \bar{y})}{(\underline{t}, \bar{t})} \right) \lesssim \tilde{\gamma}, \text{ for } l \in L , \\ & -(\underline{t}, \bar{t}) \tilde{N}_l \left(\frac{(y, \bar{y})}{(\underline{t}, \bar{t})} \right) \lesssim \tilde{\gamma}, \text{ for } l \in L^c , \\ & A \left(\frac{(y, \bar{y})}{(\underline{t}, \bar{t})} \right) - (\underline{b}(r), \bar{b}(r)) (\underline{t}, \bar{t}) \lesssim \tilde{\gamma} , \\ & \underline{y}, \bar{y} \geq 0 , \underline{t}, \bar{t} \geq 0 , \\ & 0 \leq r \leq 1 , \end{aligned} \quad (11)$$

۴- الگوریتم حل

در این بخش با توجه به مقدمات بیان شده در بخش های قبل، یک الگوریتم با رویکرد برنامه ریزی پارامتری جهت حل مسئله (۹) ارائه می‌کنیم.

گام اول: مسئله پارامتری معادل با مسئله (۹) را به صورت مدل (۱۱) در نظر بگیرید. در مدل (۱۱)، مقادیر $r = 0$ و $r = 1$ را جهت یافتن مسائل کمکی اعمال کنید. برای این منظور به گام بعدی بروید.

گام دوم: در مسئله (۱۱)، قرار دهید $r = 0$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \max \quad & \{(\underline{t}', \bar{t}') \tilde{N}_l \left(\frac{(y', \bar{y}')}{(\underline{t}', \bar{t}')} \right), \text{ for } l \in L ; \\ & (\underline{t}', \bar{t}') \tilde{D}_l \left(\frac{(y', \bar{y}')}{(\underline{t}', \bar{t}')} \right), \text{ for } l \in L^c \} \\ \text{s.t.} \quad & (\underline{t}', \bar{t}') \tilde{D}_l \left(\frac{(y', \bar{y}')}{(\underline{t}', \bar{t}')} \right) \leq 1, \text{ for } l \in L , \\ & -(\underline{t}', \bar{t}') \tilde{N}_l \left(\frac{(y', \bar{y}')}{(\underline{t}', \bar{t}')} \right) \leq 1, \text{ for } l \in L^c \\ & \left(\frac{(y', \bar{y}')}{(\underline{t}', \bar{t}')} \right) - (\underline{b}(\cdot), \bar{b}(\cdot)) (\underline{t}', \bar{t}') \leq 0 , \\ & \underline{y}', \bar{y}' \geq 0 , \underline{t}', \bar{t}' \geq 0 . \end{aligned} \quad (12)$$

با حل مدل اخیر به جواب بهینه مطلوب خواهیم رسید.

گام چهارم: در مسأله (۱۱)، قرار دهید $r = ۱$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \max \quad & \{(\underline{t}^1, \bar{t}^1) \tilde{N}_l \left(\frac{(y^1, \bar{y}^1)}{(\underline{t}^1, \bar{t}^1)} \right), \text{ for } l \in L; \\ & (\underline{t}^1, \bar{t}^1) \tilde{D}_l \left(\frac{(y^1, \bar{y}^1)}{(\underline{t}^1, \bar{t}^1)} \right), \text{ for } l \in L^c \} \\ \text{s.t. } & (\underline{t}^1, \bar{t}^1) \tilde{D}_l \left(\frac{(y^1, \bar{y}^1)}{(\underline{t}^1, \bar{t}^1)} \right) \leq ۱, \text{ for } l \in L, \\ & -(\underline{t}^1, \bar{t}^1) \tilde{N}_l \left(\frac{(y^1, \bar{y}^1)}{(\underline{t}^1, \bar{t}^1)} \right) \leq ۱, \text{ for } l \in L^c, \\ & A \left(\frac{(y^1, \bar{y}^1)}{(\underline{t}^1, \bar{t}^1)} \right) - (\underline{b}(۱), \bar{b}(۱)) (\underline{t}^1, \bar{t}^1) \leq ۰, \\ & \underline{y}^1, \bar{y}^1 \geq ۰, \underline{t}^1, \bar{t}^1 \geq ۰. \end{aligned} \quad (۱۵)$$

گام پنجم: دو زیرمسأله چندهدفه قطعی زیر را جهت حل مدل (۱۵) تشکیل دهید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \{ \bar{t}^1 \tilde{N}_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right), \text{ for } l \in L; \\ & \bar{t}^1 \tilde{D}_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right), \text{ for } l \in L^c \} \\ \text{s.t. } & \bar{t}^1 \tilde{D}_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \leq ۱, \text{ for } l \in L, \\ & -\bar{t}^1 \tilde{N}_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \leq ۱, \text{ for } l \in L^c, \\ & A \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) - \underline{b}(۱) \bar{t}^1 \leq ۰, \\ & \underline{y}^1, \bar{t}^1 \geq ۰, \end{aligned} \quad (۱۶)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \{ \underline{t}^1 \tilde{N}_l \left(\frac{\bar{y}^1}{\underline{t}^1} \right), \text{ for } l \in L; \\ & \underline{t}^1 \tilde{D}_l \left(\frac{\bar{y}^1}{\underline{t}^1} \right), \text{ for } l \in L^c \} \\ \text{s.t. } & \underline{t}^1 \tilde{D}_l \left(\frac{\bar{y}^1}{\underline{t}^1} \right) \leq ۱, \text{ for } l \in L, \\ & -\underline{t}^1 \tilde{N}_l \left(\frac{\bar{y}^1}{\underline{t}^1} \right) \leq ۱, \text{ for } l \in L^c, \\ & A \left(\frac{\bar{y}^1}{\underline{t}^1} \right) - \bar{b}(۱) \underline{t}^1 \leq ۰, \end{aligned}$$

$$\mu_l \left(\bar{t}^1 N_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \right) = \begin{cases} \cdot & \bar{t}^1 N_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \leq \cdot \\ \frac{\bar{t}^1 N_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) - \cdot}{\bar{Z}_l^*} & \cdot < \bar{t}^1 N_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) < \bar{Z}_l^* \\ ۱ & \bar{t}^1 N_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \geq \bar{Z}_l^* \end{cases}$$

و برای $l \in L^c$:

$$\mu_l \left(\bar{t}^1 D_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \right) = \begin{cases} \cdot & \bar{t}^1 D_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \leq \cdot \\ \frac{\bar{t}^1 D_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) - \cdot}{\bar{Z}_l^*} & \cdot < \bar{t}^1 D_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) < \bar{Z}_l^* \\ ۱ & \bar{t}^1 D_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \geq \bar{Z}_l^* \end{cases}$$

که در آن ماکسیمم سطح آرمانی \bar{Z}_l^* به صورت زیر تعیین می شود:

هر یک از توابع هدف مدل (۱۳) را با توجه به محدودیت های مسأله ماکسیمم سازی کنید. فرض کنید به ازای $l = ۱, ۲, \dots, k$ ماکسیمم مقدار l امین تابع هدف مدل (۱۳) باشد.

اگر $l \in L$ ، آنگاه قرار دهید: $\bar{Z}_l^* = Z_l^*$ و اگر $l \in L^c$ ، آنگاه قرار دهید: $\bar{Z}_l^* = -\frac{۱}{Z_l^*}$.

اکنون با توجه به توابع عضویت معرفی شده در بالا و همچنین با استفاده از عملگر $\min [۳۴]$ ، مدل زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.t. } & \lambda \leq \mu_l \left(\bar{t}^1 N_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \right); l \in L \\ & \lambda \leq \mu_l \left(\bar{t}^1 D_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \right); l \in L^c \\ & \bar{t}^1 D_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \leq ۱; l \in L \\ & -\bar{t}^1 N_l \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) \leq ۱; l \in L^c \\ & A \left(\frac{y^1}{\bar{t}^1} \right) - \underline{b}(\cdot) \bar{t}^1 \leq ۰ \\ & \underline{y}^1, \bar{t}^1 \geq ۰ \end{aligned}$$

ایجاد نمی‌کند و هر روش دیگری که جواب را بدست دهد، می‌تواند جهت حل این گونه مسائل در مراحل یاد شده به کار گرفته شود.

نکته ۲: توجه به این نکته حائز اهمیت است که در الگوریتم پیشنهادی همواره فرض بر این بوده که مجموعه اندیس‌های L و L^c و یا به عبارتی ماهیت $\tilde{N}_l(\tilde{x})$ به ازای $l = 1, \dots, k$ معلوم می‌باشد. در صورتی که آن‌ها بطور صریح معین نباشند، اما بدانیم که مخرج توابع هدف در فضای جواب مثبت است، در این صورت جهت یافتن مجموعه اندیس‌های L و L^c این گونه عمل می‌کنیم:

(۱) هر یک از توابع هدف $\tilde{Z}_l(\tilde{x})$ را با توجه به محدودیت‌ها و صورت پارامتری مسأله، با بکارگیری روش چارنز و کوپر [۵] بیشینه‌سازی نمایید. به ازای هر $l = 1, \dots, k$ ، \tilde{Z}_l^* را به عنوان مقدار بیشینه $\tilde{Z}_l(\tilde{x})$ در نظر بگیرید.

(۲) اگر $\tilde{z} \gtrsim \tilde{Z}_l^*$ باشد، آنگاه $l \in L$ و اگر $\tilde{Z}_l^* < \tilde{z}$ ، آنگاه $l \in L^c$.

۵- مثال عددی

در این بخش به منظور تشریح فرآیند حل مدل پیشنهادی به ارائه یک مثال عددی می‌پردازیم که در آن یک مسأله FMOLFP که به صورت مدل (۹) تعریف شده است، با الگوریتم ارائه شده در این مقاله حل خواهد شد. همچنین جهت بررسی اعتبار روش، جواب را در حالت قطعی با جواب بدست آمده از روش چاکرابورتی [۲۸] مقایسه می‌کنیم. مسأله برنامه ریزی چندهدفه کسری خطی فازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \max \quad & \{ \tilde{Z}_1(\tilde{x}), \tilde{Z}_2(\tilde{x}), \tilde{Z}_3(\tilde{x}) \} \\ = \quad & \left(\frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 1}, \frac{4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2}{6\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + 1}, \frac{2\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2 + 1}{\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + 3} \right) \\ \text{s.t.} \quad & 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \gtrsim (r, 2 - r), \\ & \tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2 \lesssim (18 + r, 20 - r), \end{aligned}$$

$$\bar{y}^1, \underline{t}^1 \geq 0. \quad (17)$$

با حل جداگانه مسائل (۱۶) و (۱۷) توسط عملگر \min زیمرمن [۳۴]، به ترتیب به جواب‌های $\{y_1^1, y_2^1, \dots, y_n^1, \bar{t}^1\}$ و $\{\bar{y}_1^1, \bar{y}_2^1, \dots, \bar{y}_n^1, \underline{t}^1\}$ متناظر با $r = 1$ می‌رسیم.

گام ششم: با استفاده از جواب‌های بدست آمده در گام‌های سوم و پنجم، قرار دهید:

$$\begin{aligned} y_j^* &= (y_j^1 - y_j^2)r + y_j^2, \\ \bar{y}_j^* &= (\bar{y}_j^1 - \bar{y}_j^2)r + \bar{y}_j^2, \\ \underline{t}^* &= (\underline{t}^1 - \underline{t}^2)r + \underline{t}^2, \\ \bar{t}^* &= (\bar{t}^1 - \bar{t}^2)r + \bar{t}^2, \end{aligned}$$

و در نتیجه $\tilde{t}^* = (\underline{t}^*, \bar{t}^*)$ ، $\tilde{y}_j^* = (y_j^*, \bar{y}_j^*)$ یک جواب برای مسأله (۱۱) خواهد بود.

گام هفتم: با توجه به تبدیل $\tilde{x} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{t}}$ ، به جواب مسأله اصلی می‌رسیم:

$$\tilde{x}_j^* = \left(\frac{y_j^*}{\underline{t}^*}, \frac{\bar{y}_j^*}{\bar{t}^*} \right)$$

و در نهایت با جایگذاری مقادیر \tilde{x}_j^* در (۶)، مقادیر

هر یک از توابع هدف $\tilde{Z}_l(\tilde{x}^*)$ ، $l = 1, \dots, k$ بدست خواهد آمد.

نکته ۱: شایان ذکر است که در الگوریتم یاد شده، جهت سادگی در گام‌های سوم و پنجم، روش زیمرمن [۳۴] را برای حل مسأله برنامه ریزی چندهدفه خطی قطعی استفاده کرده ایم، در حالی که این انتخاب هیچ گونه محدودیتی را در فرآیند حل

$$\underline{t}^1 = \dots 2631579, \\ \bar{t}^1 = \dots 2631579.$$

$$2\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_r \geq (10 + r, 14 - 3r), \\ \tilde{x}_1 \geq (4 + r, 7 - 2r), \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_r \geq \tilde{z}, 0 \leq r \leq 1 \quad (18)$$

با اعمال گام ششم داریم:

$$\underline{y}_1^* = \dots 65789r + 0.125, \\ \bar{y}_1^* = -\dots 98352r + 0.141414, \\ \underline{y}_r^* = -\dots 1726974r + 0.109375, \\ \bar{y}_r^* = \dots 2644869r + 0.656565, \\ \underline{t}^* = \dots 611377r + 0.20202, \\ \bar{t}^* = -\dots 493421r + 0.3125.$$

اکنون از رابطه $\tilde{x} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{t}}$ جواب مسأله اصلی به صورت زیر است:

$$\tilde{x}_1^* = \left(\underline{x}_1^*, \bar{x}_1^* \right) = \left(\frac{\underline{y}_1^*}{\underline{t}^*}, \frac{\bar{y}_1^*}{\bar{t}^*} \right) \\ = \left(\frac{\dots 65789r + 0.125}{-\dots 493421r + 0.3125}, \right. \\ \left. \frac{-\dots 98352r + 0.141414}{\dots 611377r + 0.20202} \right),$$

$$\tilde{x}_r^* = \left(\underline{x}_r^*, \bar{x}_r^* \right) = \left(\frac{\underline{y}_r^*}{\underline{t}^*}, \frac{\bar{y}_r^*}{\bar{t}^*} \right) \\ = \left(\frac{\dots 2644869r + 0.656565}{-\dots 493421r + 0.3125}, \right. \\ \left. \frac{-\dots 1726974r + 0.109375}{\dots 611377r + 0.20202} \right),$$

که با جایگذاری مقادیر \tilde{x}_r^* و \tilde{x}_1^* در (۱۶)، مقادیر توابع هدف به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\tilde{Z}_1^*(\tilde{x}^*) = \left(\frac{\dots 3304r + 0.19066}{-\dots 493421r + 0.3125}, \right. \\ \left. \frac{\dots 611377r + 0.20202}{\dots 611377r + 0.20202} \right) \\ \times \frac{-\dots 3078r + 0.4124}{-\dots 271r + 0.2508} \\ \left(\frac{\dots 611377r + 0.20202}{-\dots 493421r + 0.3125}, \right. \\ \left. \frac{\dots 3471r + 0.34691}{\dots 3471r + 0.34691} \right), \\ \tilde{Z}_r^*(\tilde{x}^*) =$$

مسأله پارامتری معادل با مسأله (۱۸) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\max \{ (\underline{y}_1, \bar{y}_1) + (\underline{y}_r, \bar{y}_r), 4(\underline{y}_1, \bar{y}_1) \\ + 2(\underline{y}_r, \bar{y}_r), 2(\underline{y}_1, \bar{y}_1) + 4(\underline{y}_r, \bar{y}_r) + \\ (t, \bar{t}) \} \\ \text{s.t. } 2(\underline{y}_1, \bar{y}_1) + (\underline{y}_r, \bar{y}_r) + (t, \bar{t}) \leq 1, \\ 4(\underline{y}_1, \bar{y}_1) + 2(\underline{y}_r, \bar{y}_r) + (t, \bar{t}) \leq 1, \\ (\underline{y}_1, \bar{y}_1) + 2(\underline{y}_r, \bar{y}_r) + 2(t, \bar{t}) \leq 1, \\ 2(\underline{y}_1, \bar{y}_1) - (\underline{y}_r, \bar{y}_r) \\ - (r, 2-r)(t, \bar{t}) \geq 0, \\ (\underline{y}_1, \bar{y}_1) + 4(\underline{y}_r, \bar{y}_r) \\ - (18+r, 20-r)(t, \bar{t}) \leq 0, \\ 2(\underline{y}_1, \bar{y}_1) + 4(\underline{y}_r, \bar{y}_r) - (10+r, 14 \\ - 3r)(t, \bar{t}) \geq 0, \\ (\underline{y}_1, \bar{y}_1) - (4+r, 7-2r)(t, \bar{t}) \geq 0, \\ \underline{y}_1, \bar{y}_1, \underline{y}_r, \bar{y}_r \geq 0, t, \bar{t} \geq 0, 0 \leq r \leq 1 \quad (19)$$

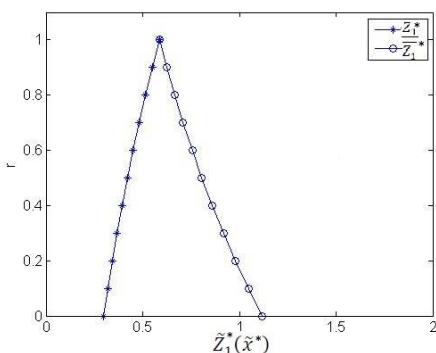
حال با توجه به گام دوم و سوم در الگوریتم مطرح شده در این بخش و با قرار دادن $r = 0$ نتایج زیر را خواهیم داشت:

$$\underline{y}_1^* = 0.125, \quad \bar{y}_1^* = 0.141414, \\ \underline{y}_r^* = 0.109375, \\ \bar{y}_r^* = 0.656565, \\ \underline{t}^* = 0.20202, \quad \bar{t}^* = 0.3125.$$

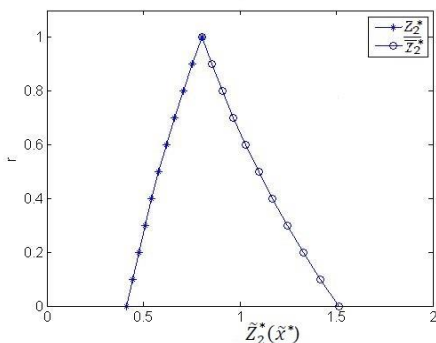
همچنین با بکارگیری گام چهارم و پنجم نتایج زیر حاصل خواهد شد:

$$\underline{y}_1^1 = 0.1315789, \\ \bar{y}_1^1 = 0.1315789, \\ \underline{y}_r^1 = 0.09210526, \\ \bar{y}_r^1 = 0.09210526,$$

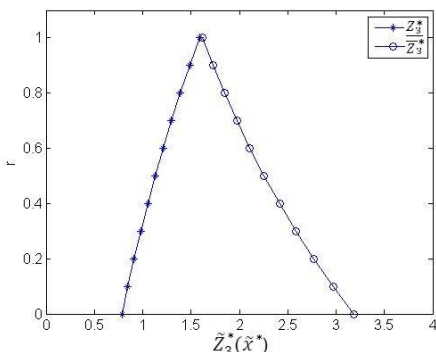
شکل ۲- مقدار بهینه متغیر تصمیم دوم



شکل ۳- مقدار بهینه تابع هدف اول



شکل ۴- مقدار بهینه تابع هدف دوم



شکل ۵- مقدار بهینه تابع هدف سوم

اکنون جهت بررسی اعتبار روش، جواب بدست آمده در مثال مطرح شده را در حالت قطعی (با قرار دادن $r = 1$) با روش مطرح شده توسط چاکرابورتی [۲۸] مقایسه می‌کنیم.

مسئله (۱۸) را در حالت قطعی زیر در نظر بگیرید:

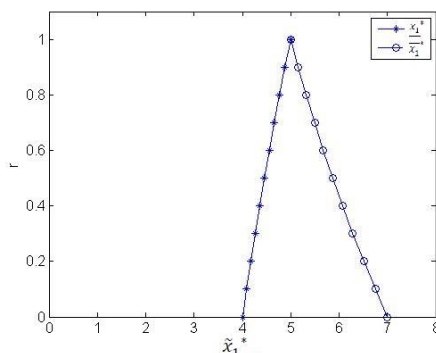
$$\max \{Z_1(x), Z_2(x), Z_3(x)\} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2x_1 + x_2 + 1}, \frac{4x_1 + 2x_2}{6x_1 + 2x_2 + 1}, \frac{2x_1 + 4x_2 + 1}{x_1 + 2x_2 + 3} \right)$$

$$\left(\frac{0.10572r + 0.697}{-0.000493421r + 0.3125}, \frac{0.00611377r + 0.20202}{-0.08728r + 1.0874}, \frac{0.00611377r + 0.20202}{-0.0493421r + 0.3125} \right),$$

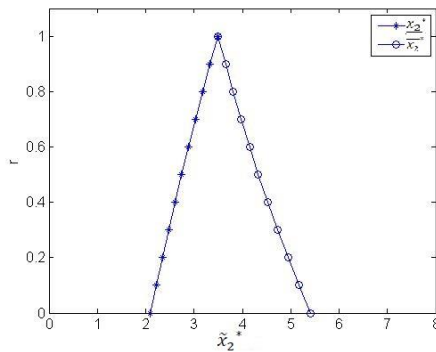
$$\tilde{Z}_r^*(\tilde{x}^*) = \left(\frac{0.11403r + 0.51264}{-0.000493421r + 0.3125}, \frac{0.00611377r + 0.20202}{-0.08728r + 1.0874}, \frac{0.00611377r + 0.20202}{-0.0493421r + 0.3125} \right),$$

$$\left(\frac{0.2604r + 0.4208}{-0.08268r + 0.7204}, \frac{0.00611377r + 0.20202}{-0.0493421r + 0.3125}, \frac{0.00611377r + 0.20202}{-0.0493421r + 0.3125} \right).$$

نتایج بدست آمده را می‌توان در شکل‌های زیر مشاهده کرد.



شکل ۱- مقدار بهینه متغیر تصمیم اول



و در نتیجه

$$\begin{aligned}x_1^* &= ۴.۹۹۹۹۹۸۱, & x_2^* &= ۳.۴۹۹۹۹۸۱, \\Z_1(x^*) &= ۰.۵۸۶۲, & Z_2(x^*) &= ۰.۸۰۲۶, \\Z_3(x^*) &= ۱.۶۶۶۷\end{aligned}$$

که مطابق با جواب بدست آمده از روش مطرح شده در این مقاله در حالت قطعی (به ازای $r = ۱$) می باشد.

۶- نتیجه گیری

همان طور که در مقاله اشاره شد، برنامه ریزی کسری خطی یکی از مباحث کاربردی را در مسأله برنامه ریزی ریاضی مورد توجه قرار می دهد. در این مقاله یک مسأله برنامه ریزی چند هدفه کسری خطی با متغیرها و بردار منابع فازی مورد مطالعه قرار گرفت و الگوریتمی با رویکرد پارامتری جهت حل آن ارائه شد. با توجه به فرآیند حل تشریح شده، ملاحظه شد از جمله مزیت های روش این است که با اعمال این الگوریتم، جواب بهینه مسأله به صورت پارامتری خواهد بود که این امر ضمن اعتبار و انطباق بیشتر جواب با واقعیت، اطلاعات جامع تری را در اختیار تصمیم گیرنده قرار خواهد داد. سادگی روش مطرح شده از مزیت های دیگر الگوریتم پیشنهادی است که امکان درک مطلوب تر فرآیند حل را توسط کاربر فراهم می آورد. همچنین یک مثال عددی جهت درک بهتر رویکرد ارائه شده و کاربرد روش، ارائه شد تا توصیف عددی مناسبی از فرآیند حل را روشن نماید. همچنین با توجه به تحقیقات اندکی که در راستای حل این گونه مسائل انجام شده است، توسعه مدل مطرح شده در این مقاله و بکارگیری آن در مسائل دنیای واقعی جهت ارائه یک مطالعه تطبیقی مؤثر در این حوزه جهت پژوهش های آتی پیشنهاد می شود.

$$\begin{aligned}\text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ & x_1 + 4x_2 \leq 19, \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 11, \\ & x_1 \geq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}\quad (20)$$

طبق روش چاکرابورتی، مسأله معادل با (۲۰)، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\max \quad & \{y_1 + y_2, 4y_1 + 3y_2, 2y_1 + 4y_2 + t\} \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 + t \leq 1 \\ & 6y_1 + 2y_2 + t \leq 1 \\ & y_1 + 2y_2 + 3t \leq 1 \\ & 2y_1 - y_2 - t \geq 0, \\ & y_1 + 4y_2 - 19t \leq 0, \\ & 2y_1 + 4y_2 - 11t \geq 0, \\ & y_1 - 5t \geq 0, \\ & y_1, y_2 \geq 0, t \geq 0.\end{aligned}$$

پس از اعمال مدل مطرح شده توسط چاکرابورتی، به مدل زیر می رسیم:

$$\begin{aligned}\max \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \lambda \leq \frac{1}{0.5862069} (y_1 + y_2) \\ & \lambda \leq \frac{1}{0.8026316} (4y_1 + 3y_2) \\ & \lambda \leq \frac{1}{1.772727} (2y_1 + 4y_2 + t) \\ & 2y_1 + y_2 + t \leq 1 \\ & 6y_1 + 2y_2 + t \leq 1 \\ & y_1 + 2y_2 + 3t \leq 1 \\ & 2y_1 - y_2 - t \geq 0, \\ & y_1 + 4y_2 - 19t \leq 0, \\ & 2y_1 + 4y_2 - 11t \geq 0, \\ & y_1 - 5t \geq 0, \\ & y_1, y_2 \geq 0, t \geq 0.\end{aligned}\quad (21)$$

جواب حاصل از حل مدل (۲۱)، به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}\lambda^* &= 0.3711202 \\ y_1^* &= 0.1315789 \\ y_2^* &= 0.09210526 \\ t^* &= 0.02631579\end{aligned}$$

فهرست منابع

- [۱۰] Chadha S.S. (۲۰۰۲). Fractional programming with absolute-value function. *European Journal of Operations Research*, ۱۴۱, ۲۳۳-۲۳۸.
- [۱۱] Chan C.-T. (۲۰۰۵). Fractional programming with absolute-value functions: a fuzzy goal programming approach. *Applied Mathematics and Computation*, ۱۶۷, ۵۰۸-۵۱۵.
- [۱۲] Tantawy S.F. (۲۰۰۸). A new procedure for solving linear fractional programming problems. *Mathematical and Computer Modelling*, ۴۸, ۹۶۹-۹۷۳.
- [۱۳] Tantawy S.F. (۲۰۰۷). Using feasible directions to solve linear fractional programming problems. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, ۱, ۱۰۹-۱۱۴.
- [۱۴] Mojtaba B., Azmin S., Mansour S. (۲۰۱۲). Solving linear fractional programming problems with interval coefficients in the objective function: A new approach. *Applied Mathematical Sciences*, ۶, ۳۴۴۲-۳۴۵۲.
- [۱۵] Bellman R.E., Zadeh L.A. (۱۹۷۰). Decision making in a fuzzy environment. *Management Science*, ۱۷, ۱۴۱-۱۶۴.
- [۱۶] Tanaka H., Okuda T., Asai K. (۱۹۷۳). On fuzzy mathematical programming. *Journal of Cybernetics and Systems*, ۳, ۳۷-۴۶.
- [۱۷] Baky, I.A. (۲۰۱۰). Solving multi-level multi-objective linear programming problems through fuzzy goal
- [۱] خزائی کوه پر ا.، (۱۳۹۶)، بهبود روش های حل مسائل برنامه ریزی کسری خطی چندهدفه با پارامترهای مشکک، پایان نامه دکتری، دانشگاه مازندران، بابلسر.
- [۲] ناصری س ه.، عطاری ح.، (۱۳۹۴)، برنامه ریزی خطی فازی، انتشارات دانشگاه مازندران، بابلسر.
- [۳] ناصری س ه.، غلامی ا.، ابراهیم نژاد ع.، فلاح جلودار م.، (۱۳۹۵)، یک رویکرد جدید مبتنی بر آلفا برش‌ها برای حل مدل تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی فازی، پژوهش های نوین در ریاضی، دوره ۲، شماره ۵، صص ۶۱ تا ۷۰.
- [۴] Isbell J.R., Marlow W.H. (۱۹۵۶). Attrition games. *Naval Research Logistics Quarterly*, ۳, ۱-۹۹.
- [۵] Charnes A., Cooper W.W. (۱۹۶۲). Programming with linear fractional functions. *Naval Research Logistics Quarterly*, ۹, ۱۸۱-۱۸۶.
- [۶] Gilmore P.C., Gomory R.E. (۱۹۶۳). Linear programming approach to the cutting stock problem: Part ۲. *Operations Research*, ۱۱, ۸۶۳-۸۶۷.
- [۷] Martos B. (۱۹۶۴). Hyperbolic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, ۱۱, ۱۳۵-۱۵۵.
- [۸] Swarup K. (۱۹۶۵). Linear fractional functional programming. *Operations Research*, ۱۳, ۱۰۲۹-۱۰۳۶.
- [۹] Dantzig G.B. (۱۹۶۲). *Linear Programming and Extension*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

- [۲۴] Klir G.J., Clair V.S., Yuan B. (۱۹۹۷). Fuzzy set theory: foundation and application. Printice-Hall Inc.
- [۲۵] Ma M., Friedman M., Kandel A. (۱۹۹۹). A new fuzzy arithmetic. Fuzzy Sets and Systems, ۱۰۸, ۸۳-۹۰.
- [۲۶] Goetschel R., Voxman W. (۱۹۸۶). Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Sets and Systems, ۱۸, ۳۱-۴۳.
- [۲۷] Craven B.D. (۱۹۸۸). Fractional Programming. Heldermann Verlag, Berlin.
- [۲۸] Chakraborty M., Gupta S. (۲۰۰۲). Fuzzy mathematical programming for multi objective linear fractional programming problem. Fuzzy Sets and Systems, ۱۲۵, ۳۳۵-۳۴۲.
- [۲۹] Schaible S. (۱۹۷۶). Fractional programming ۱: duality. Management Science, ۲۲, ۶۵۸-۶۶۷.
- [۳۰] Schaible S. (۱۹۷۸). Analyse und Anwendungen Von Quotienten Programmen. Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan.
- [۳۱] Ganesan K., Veeramani P. (۲۰۰۶). Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers. Annals of Operations Research, ۱۴۳, ۳۰۵-۳۱۵.
- [۳۲] Cao B-Y. (۲۰۱۰). Optimal Models and Methods with Fuzzy Quantities. Springer-Verlag Berline Heidelberg.
- [۳۳] Lodwick W.A., Kacprzyk J. (۲۰۱۰). Fuzzy Optimization: Recent advances and programming approach. Applied Mathematical Modeling, ۳۴, ۲۳۷۷-۲۳۸۷.
- [۱۸] Dutta D., Rao J.R., Tiwari R.N. (۱۹۹۳). Effect of tolerance in fuzzy linear fractional programming. Fuzzy Sets and Systems, ۵۵, ۱۳۳-۱۴۲.
- [۱۹] Li D.F., Chen S. (۱۹۹۶). A fuzzy programming approach to fuzzy linear fractional programming with fuzzy coefficients. Journal of Fuzzy Mathematics, ۴, ۸۲۹-۸۳۴.
- [۲۰] Nasseri S.H., Khazaei Kohpar O. (۲۰۱۵). Pareto-optimal solutions in multi-objective linear programming with fuzzy numbers. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, ۹, ۸۲۳-۸۳۳.
- [۲۱] Pal B.B., Moitra B.N., Maulik U. (۲۰۰۳). A goal programming procedure for fuzzy multiobjective linear fractional programming problem. Fuzzy Sets and Systems, ۱۳۹, ۳۹۵-۴۰۵.
- [۲۲] Chinnadurai V., Muthukumar S. (۲۰۱۶). Solving the linear fractional programming problem in a fuzzy environment: Numerical approach. Applied Mathematical Modelling, ۴۰, ۶۱۴۸-۶۱۶۴.
- [۲۳] Nasseri S.H., Khazaei Kohpar O. (۲۰۱۷). An improved approach for solving interval number and fuzzy number LP problems with its application in fuzzy multi-objective linear fractional programming. submitted.

applications. Springer- Verlag Berline Heidelberg.

[۳۴] Zimmermann J. (۱۹۷۶). Description and optimization of fuzzy systems. International Journal of General Systems, ۲, ۲۰۹-۲۱۵.