دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

احاطه‌گری و نمایش گراف اشتراکی روی فضاهای توپولوژی

حسن برزگر*

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۲/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۵/۲۳

چکیده

فرض کنیم $(X.\tau)$ یک فضای توپولوژیک باشد. گراف اشتراکی روی فضای توپولوژیک $(X.\tau)$، که با $G_\tau(X)$ نمایش داده می‌شود، یک گراف غیرجهت‌دار است که مجموعه رأس‌های آن، زیرمجموعه‌های باز X هستند و دو رأس به هم وصل می‌باشند، اگر اشتراک آنها ناتهی باشد. در این مقاله روابط بین ویژگی‌های توپولوژیکی X و ویژگی‌های گرافی $G_\tau(X)$ بررسی شده است. همچنین برخی رده‌بندی‌ها و نمایش‌هایی برای گراف $G_\tau(X)$ بیان شده است و در نهایت مطالعه‌ای بر روی احاطه‌گری آن صورت گرفته است.

واژگان کلیدی: گراف اشتراکی، فضای توپولوژیک، احاطه‌گری.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: h٥٦bar@tafreshu.ac.ir

۱- مقدمه

در نظریه گراف، گراف اشتراکی یک گراف است که توسط یک الگویی از اشتراک‌های یک خانواده از مجموعه‌ها نمایش داده می‌شود. به طور دقیق‌تر، یک گراف اشتراکی یک گراف است که رأس‌های آن در واقع نماینده‌هایی از یک خانواده از مجموعه‌ها هستند و دو رأس با هم مجاورند اگر و فقط اگر مجموعه‌های متناظرشان دارای اشتراک ناتهی باشند.

در مرجع[۱] نشان داده شده است که هرگراف را می‌توان به صورت یک گراف اشتراکی نمایش داد. بنابراین شایسته است که گراف اشتراکی را برای یک خانواده از مجموعه‌هایی که دارای یک ساختار جبری یا غیرجبری (مثلاً توپولوژیکی) هستند بررسی کنیم.

در این مقاله ما تأثیر خواص توپولوژیکی یک فضای توپولوژیک را بر ویژگی‌های گرافی گراف اشتراکی حاصل از آن فضای توپولوژیک، بررسی خواهیم کرد. بعد از Erdos, در مرجع[۱]، افراد زیادی سعی در مطالعه تأثیر خواص یک ساختار ریاضی (به ویژه خواص جبری) در ویژگی‌های گرافی، گراف اشتراکی نمودند. از آن جمله، گراف اشتراکی نیم‌گروه‌ها توسط Bosak[۱] مطالعه شد. سپس Csakang و Pollakدر[۲] گراف اشتراکی زیرگروه‌های یک گروه متناهی را بررسی کردند و Zlinka[۳] کار بر روی گراف‌های اشتراکی زیرگروه‌های نابدیهی از یک گروه آبلی را ادامه داد. مدت زمان زیادی هم از مطالعه Chakrabart[۴] بر روی گراف اشتراکی حاصل از ایده‌آل‌های یک حلقه نمی‌گذرد.

پژوهش‌های فوق ما را بر آن داشت که گراف اشتراکی، فضای توپولوژیک را تعریف کرده و به مطالعه آن بپردازیم و به طور طبیعی به بررسی سئوالاتی نظیر سئوالات زیر بپردازیم.

۱) برای گراف مورد نظر G، آیا یک فضای توپولوژیک وجود دارد که گراف اشتراکی حاصل از آن یا گراف اشتراکی حاصل از یک زیرمجموعه‌ی توپولوژی آن با G یکریخت باشد.

۲) رده‌بندی‌هایی برای فضاهای توپولوژیک پیدا کنید که تحت آن گراف اشتراکی حاصل، همبند یا کامل و یا ... باشد. همچنین آیا می‌توان پارامترهای گرافی مانند قطر و کمر و ... را در گراف اشتراکی بدست آورد.

۲- تعاریف و مقدمات

در این فصل برخی از مفاهیم و مقدمات نظریه گراف و توپولوژی پایه مورد نیاز در فصل‌های بعد گردآوری شده است. برای مطالعه بیشتر و اطلاعات اضافی در زمینه گراف‌ها می‌توانید به مرجع[۵] و در زمینه فضاهای توپولوژیک می‌توانید به مراجع[۱] و[۶] مراجعه کنید.

تعریف ۱: گراف G، یک زوج مرتب به صورت $G =(V.E)$ است که $V = V(G)$ یک مجموعه‌ی ناتهی، و $E = E(G)$ یک مجموعه از زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. هر عضو V را یک رأس، و هر عضو E مانند $\{u.v\}$ را یک یال گراف می‌نامند و آن را به صورت uv نیز نمایش می‌دهند. V مجموعه‌ی رئوس، و E را مجموعه‌ی یال‌های گراف G می‌نامند. دو رأس u و v را دو رأس مجاور هم می‌نامند، هرگاه $\{u.v\} \in E$. تعداد رئوس گراف G را «مرتبه‌ی گراف G» و تعداد یال‌های آن را «اندازه گراف G» می‌نامند. معمولاً گراف‌ها با استفاده از شکل‌های هندسی به سادگی نمایش داده می‌شوند. گرافی که همه‌ی رئوس آن دو به دو مجاور باشند را گراف کامل می‌نامند. گراف کامل n رأسی را با k_n نمایش می‌دهند. درجه‌ی یک رأس مانند v در گراف G به صورت $d_G(v)$ و یا به اختصار $d(v)$ نمایش داده می‌شود و برابر تعداد یال‌هایی از گراف G است که رأس v بر آنها واقع شده است. معمولاً بیشترین درجه‌ی موجود در بین تمام رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کمترین آنها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهند. رأسی که درجه‌ی آن برابر صفر باشد را رأس تنها یا رأس ایزوله می‌نامند. گراف $H = (V_۱.E_۱)$، یک زیرگراف از گراف $G = (V.E)$ می‌باشد، هرگاه $V_۱ \subseteq V$ و $E_۱ \subseteq E$. زیرگرافِ فراگیر گراف G زیرگرافی از G است که مجموعه رئوس آن با مجموعه رئوس گراف G برابر است.

تعریف ۲: اگر $G = (V.E)$ یک گراف و $a.b \in V$، هر دنباله به صورت $x.x_۱x_۲ \dots x_n$ از رئوس گراف که $a = x.$ و $b = x_n$ و $x_ix_{i+۱} \in E$ برای هر $i = ۰.۱.۲. \dots . n-۱$ و $x_{\{i\}}$ها تکراری نباشد را یک مسیر به طول n بین دو رأس a و b می‌نامند. معمولاً گرافی که تنها از یک مسیر به طول n رأس تشکیل شده باشد را با P_n نمایش می‌دهند. هر مسیر بسته را دور می‌نامند و تعداد یال‌های واقع

بر دور را طول دور می‌نامند. معمولاً گرافی که تنها از یک دور به طول n تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهند. گرافی که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد را گراف همبند می‌نامند. گرافی که همبند نباشد را گراف ناهمبند می‌نامند. به هر زیرگراف همبند ماکسیمال (یعنی زیرگراف سره‌ای از یک زیرگرافِ همبندِ گرافِ G نباشد) از یک گراف، یک مؤلفه همبندی آن گراف گویند.

تعریف ۳: طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس a و b از گراف G را فاصله‌ی a و b می‌نامند و به صورت $d_G(a.b)$ نمایش می‌دهند.
مجموعه‌ی تمام رئوسی از گراف G که مجاور با رأس v باشند را مجموعه‌ی همسایه‌ها و یا همسایگی باز رأس v می‌نامند و با $N(v)$ نمایش می‌دهند. همسایگی بسته‌ی رأس v را به صورت $N[v]$ نمایش می‌دهند و داریم $N[v] = N(v) \cup \{v\}$

تعریف ٤: هر گراف بدون دور را یک جنگل می‌نامند. یک گراف همبند و بدون دور را یک درخت می‌نامند. هر زیرگراف فراگیر از گراف G که یک درخت باشد را یک درخت فراگیر از G می‌نامند.

تعریف ۵: هر رأس با درجه یک را یک برگ و رأس متصل به یک برگ را یک رأس حمایتی می‌نامند.
فرض کنیم $S \subseteq V(G)$ زیرگراف القایی توسط S، که آن را با $G[S]$ یا $< S >$ نمایش می‌دهند، گرافی است که رئوس آن اعضای S باشند و یال‌های آن یال‌هایی از G باشند که هر دو سر آنها به رئوسی از S وصل باشد.

تعریف ٦: فرض کنیم $v \in V(G)$، به بیشترین فاصله‌ی رئوس G از رأس v خروج از مرکز رأس v گوییم و با $e(v)$نمایش می‌دهیم. در این صورت قطر و شعاع گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{e(v) | v \in V(G)\}$$
$$\mathrm{rad}(G) = \min\{e(v) | v \in V(G)\}$$

تعریف ۷: کمر گراف G برابر است با طول کوتاه‌ترین دور در گراف G و آن را با $g(G)$ نمایش می‌دهیم.

اکنون برخی مفاهیم مقدماتی توپولوژی کلاسیک را معرفی خواهیم کرد. اثبات قضایای این بخش را می‌توان در مراجع[۱] و[۶] یافت.

تعریف ۸: یک توپولوژی در مجموعه X گردایه‌ای مانند τ_X از زیر مجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:
(۱) X و ϕ به τ_X تعلق دارند.
(۲) اجتماع دلخواه هر خانواده از اعضای τ_X به τ_X تعلق دارد.
(۳) اشتراک متناهی از اعضای τ_X به τ_X تعلق دارد.
مجموعه X را که برای آن توپولوژی مانند τ_X (یا به طور اختصار τ) مشخص شده است، فضای توپولوژیک می‌نامیم و معمولاً آن را با نماد $(X.\tau_X)$ نمایش می‌دهیم. زیرمجموعه‌های X که متعلق به τ_X باشند را زیرمجموعه‌های باز X و متمم آنها را زیرمجموعه‌های بسته X می‌نامیم. واضح است که $\tau_X \subseteq p(X)$ که در آن $p(X)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های X است. اگر $\tau_X = p(X)$ ، آنگاه τ_X را توپولوژی گسسته و اگر $\tau_X = \{\phi . X\}$، آنگاه τ_X را توپولوژی بیمایه می‌نامیم. زیرمجموعه‌های $\phi.X$ را زیرمجموعه‌های باز بدیهی X و $\tau^*{}_X = \tau_X \backslash \{\phi.X\}$ را زیر مجموعه‌های باز نابدیهی X می‌نامیم.

تعریف ۹: یک پایه توپولوژیکی در X ،گردایه‌ای است از زیر مجموعه‌های X مانند β به طوری‌که:
الف) به ازای هر $x \in X$، حداقل یک عنصر پایه مانند B موجود باشد که $x \in B$.
ب) اگر $B_۱.B_۲$ دو عضو پایه باشند و $x \in B_۱ \cap B_۲$، آنگاه عضوی از پایه مانند $B_۳$ وجود داشته باشد به طوری‌که $x \in B_۳ \subseteq B_۱ \cap B_۲$.

تعریف ۱۰: اگر β یک پایه توپولوژی در X باشد، توپولوژی تولید شده توسط β را تمام زیرمجموعه‌های X مانند u در نظر می‌گیریم که به ازای هر $x \in u$، عضوی از پایه مانند $B \in \beta$ وجود داشته باشد که $x \in B \subseteq u$

به وضوح هر عضو پایه یک زیر مجموعه باز در X است ($\beta \subseteq \tau_X$)

مثال ۱۱. گردایه همه زیر مجموعه‌های تک عضوی مجموعه X، یک پایه برای X است که توپولوژی القایی آن همان توپولوژی گسسته است.
حال می‌خواهیم بستار و درون یک زیر مجموعه از X را معرفی کنیم.

تعریف۱۲: فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد. درون مجموعه A که آن را با A° نمایش می‌دهیم عبارت است از اجتماع همه مجموعه‌های باز مشمول در A و بستار مجموعه A که آن را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم عبارت است از اشتراک همه مجموعه‌های بسته شامل A.

قضیه ۱۳. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X است.
الف) $x \in \overline{A}$ اگر و فقط اگر هر مجموعه باز شامل x، مجموعه A را قطع کند.
ب) اگر β پایه‌ای برای فضای توپولوژیک $(X.\tau_X)$ باشد، آنگاه $x \in \overline{A}$ اگر و فقط اگر هر عضو پایه مانند B که شامل x است مجموعه A را قطع کند.

تعریف ۱٤: فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X و $x \in A$ باشد. x را یک نقطه حدی مجموعه A می‌خوانیم اگر هر زیر مجموعه باز شامل xمجموعه A را در نقطه‌ای غیر از خود A قطع کند. مجموعه نقاط حدی را با A' نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۵. اگر A زیر مجموعه‌ای از $(X.\tau_X)$ باشد، آنگاه $\overline{A} = A \cup A'$.

نتیجه ١٦. زیرمجموعه‌ای از یک فضای توپولوژیک بسته است اگر و فقط اگر شامل همه نقاط حدی خود باشد.

تعریف ۱۷: الف) فضای توپولوژیک $(X.\tau_X)$ را **فضای هاسدورف** خوانیم در صورتی که به ازای هر دو نقطه متمایز $x_1.x_2$ از X، همسایگی‌هایی مانند $u_1.u_2$ به ترتیب از $x_1.x_2$ یافت شوند که اشتراکشان تهی باشد.
ب) فضای توپولوژیک $(X.\tau)$ را فضای T_1 خوانیم در صورتی که هر دو نقطه متمایز $x_1.x_2$ از X همسایگی‌هایی داشته باشند که شامل نقطه دیگر نباشد.
ج) فضای توپولوژیک $(X.\tau)$ را فضای $T.$ خوانیم در صورتی که به ازای هر دو نقطه $x_1.x_2$ از X ، حداقل یکی از $x_1.x_2$دارای یک همسایگی باشد که شامل نقطه دیگر نباشد.
از تعریف ۱۷ براحتی دیده می‌شود که هر فضای توپولوژیک هاسدورف، فضایی T_1 و هر فضای T_1 یک فضای $T.$ است.

قضیه ۱۸. در هر فضای T_1، هر زیرمجموعه متناهی بسته است.

تعریف ۱۹: فرض کنیم X فضایی توپولوژیک باشد. جداسازی از X عبارتست از زوج $u.v$ از زیرمجموعه‌های باز ناتهی جدا از هم X که اجتماعشان مساوی X است. فضای X را در صورتی همبند خوانند که برای آن هیچ جداسازی وجود نداشته باشد.

لم ۲۰. فضای X همبند است اگر و فقط اگر تنها زیر مجموعه‌های X که در X هم باز و هم بسته‌اند مجموعه‌های تهی و خود X باشند.

قضیه ۲۱. تصویر هر فضای همبند تحت نگاشت پیوسته، همبند است.

۳- گراف اشتراکی روی فضاهای توپولوژیکی

در این بخش به بررسی روابط موجود بین یک فضای توپولوژیک و گراف اشتراکی حاصل از آنها می‌پردازیم. ارتباطی که بین خواص توپولوژیکی فضای توپولوزیک $(X.\tau)$ و ویژگی‌های متناظر گرافی در گراف اشتراکی آن وجود دارد، مورد مطالعه قرار گرفته است. به طور خاص، رده‌بندی‌هایی برای خواصی مانند همبندی، کامل بودن، قطر و کمر گراف در این فصل بررسی شده است.

تعریف ۲۲: فرض کنید $(X.\tau_X)$ یک فضای توپولوژیکی دلخواه باشد. گراف اشتراکی $G(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

گراف $G(X)$ یک گراف غیرجهت‌دار و ساده است که یک تناظر یک به یک بین رأس‌های آن و زیرمجموعه‌های باز نابدیهی X وجود دارد به طوری‌که دو رأس از گراف مجاور هستند، اگر زیرمجموعه‌های باز متناظر با آنها در $(X.\tau)$ دارای اشتراک ناتهی باشند.

در این نوشتار رأس متناظر با زیرمجموعه باز $u \in \tau_X$ را با a_u و یال بین رأس‌های a_u و a_v را با $a_u a_v$ نمایش می‌دهیم. همچنین از نماد τ_X^* برای نمایش زیرمجموعه‌های باز نابدیهی X یعنی $\tau_X \setminus \{\phi.X\}$ استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال $G(X) = K_1$ اگر و فقط اگر یک زیرمجموعه غیر بدیهی $\phi \neq u \neq X$ وجود داشته باشد به طوری‌که $\tau_X = \{\phi.u.X\}$، که فضای سرپینسکی نامیده می‌شود، و مثال دیگر این که $G(X) = K_2$ اگر و فقط اگر زیرمجموعه‌های غیربدیهی $u \subseteq v$ وجود داشته باشند که $\tau = \{\phi.u.v.X\}$. اگر τ_X توپولوژی ناگسسته باشد آنگاه $G(X)$ گراف پوچ است. همچنین اگر $a \in X$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $u \in \tau_X^*$ داشته باشیم $a \in u$، در این صورت $G(X)$ گرافی کامل است.

قضیه ۲۳. برای فضای توپولوژیک دلخواه $(X.\tau_X)$ گراف $G(X)$ کامل است اگر و فقط اگر به ازای هر $u \in \tau_X^*$ داشته باشیم $\overline{u} = X$

برهان. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $G(X)$ گرافی کامل باشد و $u \in \tau_X^*$ می‌دانیم $u \cap (\overline{u})^c = \phi$ و $(\overline{u})^c \in \tau_X$. اگر $(\overline{u})^c \neq \phi$ آنگاه رأس‌های متناظر با $(\overline{u})^c$ و u با هم مجاور نیستند که تناقض با کامل بودن $G(X)$ دارد. پس $(\overline{u})^c = \phi$ و در نتیجه $\overline{u} = X$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم a و b دو رأس دلخواه از $G(X)$ و u و v به ترتیب زیرمجموعه‌های باز متناظر با a و b در τ_X^* باشند. عضو $y \in v$ را در نظر بگیرید. طبق فرض $y \in X = \overline{u}$. طبق تعریف بستار، اشتراک هر زیرمجموعه باز حول y با u ناتهی است. پس $u \cap v \neq \phi$ و در نتیجه a و b مجاور هستند. یعنی $G(X)$ کامل می‌باشد.

در نتیجه زیر چند حالت خاص از قضیه ۲۳ که در واقع شرایط کافی برای کامل بودن $G(X)$ هستند بیان شده است.

نتیجه ٢٤. در هر یک از حالت‌های زیر گراف $G(X)$ یک گراف کامل است:

(۱) اگر $\left(\bigcap_{u\in\tau_X^*} u\right)^{\circ} \neq \phi$.

(۲) τ_X^* تحت رابطه شمول یک زنجیر باشد.

(۳) τ_X یک زیرمجموعه باز نابدیهی مشمول در هر زیرمجموعه باز ناتهی داشته باشد.

برهان. (۱) به ازای $v \in \tau_X^*$ واضح است که $\phi \neq \left(\bigcap_{u\in\tau_X} u\right)^{\circ} \subseteq v^{\circ} = v$ پس به ازای هر $u.v \in \tau_X^*$ داریم $\phi \neq \left(\bigcap_{u\in\tau_X} u\right)^{\circ} \subseteq u \cap v$ و در نتیجه $G(X)$ کامل است.

(۲) اگر $u.v \in \tau_X^*$، چون τ_X^* تحت رابطه شمول یک زنجیر است، $u \subseteq v$ یا $v \subseteq u$ می‌باشد. پس $u \cap v \neq \phi$ و در نتیجه $G(X)$ گرافی کامل است.

(۳) این حالت، حالت خاصی از قسمت(۱) می‌باشد.

توجه کنید که $u \in \tau_X^*$ را مینیمال می‌نامیم اگر شامل هیچ زیرمجموعه باز سره‌ای در X غیر از تهی نباشد.

قضیه ۲۵. فرض کنیم گراف اشتراکی $G(X)$ از فضای توپولوژیک $(X.\tau_X)$ گرافی کامل باشد. در این صورت:

(۱) اگر $(X.\tau_X)$ فضای توپولوژیک $T_\circ$ باشد که دارای زیرمجموعه‌های باز می‌نیمال در X است، در این صورت τ_X فقط یک زیرمجموعه باز می‌نیمال دارد که تک عضوی است و مشمول در هر زیرمجموعه باز دیگر می‌باشد(۲). اگر $(X.\tau_X)$ فضای توپولوژیک T_1 باشد که دارای زیرمجموعه‌های باز می‌نیمال در X است، در این صورت $|X| = ۱$.

(۳) اگر $(X.\tau_X)$ فضای توپولوژیک هاسدورف باشد، آنگاه $|X| = ۱$.

برهان (۱). فرض کنیم u یک زیرمجموعه باز می‌نیمال در X باشد که $|u| > ۱$. همچنین فرض کنیم a و b دو عضو مختلف u باشند. چون $(X.\tau_X)$ فضای توپولوژیک

T_0 است، زیرمجموعه باز $v_b \in \tau_X^*$ شامل b وجود دارد که $a \notin v_b$ (یا زیرمجموعه باز $u_a \in \tau_X^*$ وجود دارد که $b \notin u_a$). در این صورت $b \in u \cap v_b \subseteq u$. پس $u \cap v_b$ ناتهی است و چون u می‌نیمال است داریم $u = u \cap v_b$. بنابراین $u \subseteq v_b$ که نتیجه می‌دهد $a \in v_b$ و این با فرض $a \notin v_b$ در تناقض است. پس $|u| = ۱$. حال نشان می‌دهیم u تنها زیرمجموعه باز می‌نیمال در X است. فرض کنیم $v \in \tau_X^*$ یک زیرمجموعه باز می‌نیمال در X باشد. چون $G(X)$ گراف کامل است، طبق **قضیه ۲۳**، $\overline{v} = X$. پس $\phi \neq u \cap v \subseteq v$ و در نتیجه $u \cap v = v$. پس $v \subseteq u$ و چون u نیز می‌نیمال است داریم $v = u$. پس u تنها زیرمجموعه باز می‌نیمال در τ_X^* است. حال فرض کنیم $u = \{a\}$ و $v \in \tau_X$ یک زیرمجموعه باز ناتهی از X باشد. چون گراف $G(X)$ کامل است، پس $u \cap v \neq \phi. X$. بنابراین $a \in v$ و در نتیجه $u \subseteq v$.

(۲) طبق قسمت (۱)، τ_X^* دارای تنها یک زیر مجموعه باز می‌نیمال از مرتبه یک مانند $u = \{a\}$ در X می‌باشد. چون $(X.\tau_X)$فضای توپولوژیک T_1 است، به ازای هر $b \neq a$ زیرمجموعه باز $v_b \in \tau_X^*$ وجود دارد که $a \notin v_b$ بنابراین $u \cap v = \phi$ و این با فرض کامل بودن $G(X)$ در تناقض است. بنابراین $X = \{a\}$ یعنی $|X| = ۱$.

(۳) فرض کنیم a و b دو عضو مجزا در X باشند. چون $(X.\tau_X)$ هاسدورف است. پس زیرمجموعه‌های باز u_a و v_b به ترتیب شامل a و b در X وجود دارند که $u_a \cap v_b = \phi$، که این با کامل بودن $G(X)$ در تناقض است. پس $|X| = ۱$.

در زیر مثالی آورده شده است که نشان می‌دهد با وجود برقراری شرایط قضیه ۲۵ (۱)، لزوماً $|X| = ۱$ نمی‌باشد.

مثال ۲۶. فرض کنیم $X = \{a.b.c\}$ و $\tau_X = \{\phi.\{a\}.\{a.b\}.\{a.b.c\}\}$ باشند. فضای توپولوژیک $(X.\tau_X)$ در شرایط قضیه ۲۵ (۱)، صدق می‌کند ولی واضح است که $|X| \neq ۱$.

حال به بررسی روابط بین همبندی در گراف و همبندی در فضاهای توپولوژیکی می‌پردازیم.

لم ۲۷. برای فضای توپولوژیک $(X.\tau_X)$، گراف $G(X)$ همبند گرافی نمی‌باشد اگر و فقط اگر $\tau_X^* = \{u.v\}$ به طوری‌که u و v یک افراز از X باشند (به عبارت دیگر $G(X) = \overline{K_۲}$).

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنیم $G(X)$ همبند گرافی نباشد. در این صورت دو رأس a و b در $G(X)$ وجود دارند که مسیری از آن دو نمی‌گذرد. پس زیرمجموعه‌های باز ناتهی متناظر آنها که با u_a و u_b نمایش می‌دهیم دارای اشتراک تهی می‌باشند. اگر $u_a \cup u_b \neq X$ در این صورت مسیری به صورت $a - c - b$ که c رأس متناظر $u_a \cup u_b$است، در $G(X)$ وجود دارد که تناقض می‌باشد. پس $u_a \cup u_b = X$ یعنی u_a و u_b یک افراز برای X تشکیل می‌دهند. حال نشان می‌دهیم τ_X^* دارای عضو دیگری به غیر از u_a و u_b نمی‌باشد. فرض کنیم $u_۱ \in \tau_X^* \setminus \{u_a.u_b\}$ چون u_a و u_b یک افراز برای X تشکیل می‌دهند، پس $\phi \neq u_۱ \cap u_a \subsetneqq u_a$ یا $\phi \neq u_۱ \cap u_b \subsetneqq u_b$. بدون این که از کلیت مسئله کاسته شود، فرض کنیم $\phi \neq u_۱ \cap u_a \subsetneqq u_a$. در این صورت $(u_۱ \cap u_a) \cup u_b \neq X$. بنابراین مسیری به صورت $a - c - b$ که c رأس متناظر $(u_۱ \cap u_a) \cup u_b$ است، در $G(X)$ وجود دارد که تناقض می‌باشد. پس $\tau_X^* = \{u_a.u_b\}$.

($\Rightarrow$) اگر $\tau_X^* = \{u.v\}$ و u و v یک افراز از X باشند، واضح است که $G(X) = \overline{K_۲}$ همبند گرافی نمی‌باشد.

قضیه ۲۸. اگر فضای توپولوژیک $(X.\tau_X)$ همبند توپولوژیک باشد، آنگاه گراف اشتراکی $G(X)$ همبند گرافی است و $\mathrm{diam}(G(x)) \leq ۲$.

برهان. فرض کنیم a و b دو رأس در $G(X)$ باشند و u_a و v_b زیرمجموعه‌های باز آنها در τ_X^* باشند. یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

(۱) $u_a \cap v_b = \phi$ و $u_a \cup v_b = X$، که این حالت تناقض با فرض همبندی $(X.\tau_X)$ دارد.

(۲) $u_a \cap v_b \neq \phi$ و $u_a \cup v_b \neq X$. در این صورت مسیر $a - a_{u_a \cup v_b} - b$ بطول ۲ در $G(X)$ بدست می‌آید.

(۳) اگر $u \cap v \neq \phi$. در این صورت $a_u - a_v$ بطول ۱ را در $G(X)$ خواهیم داشت.

بنابراین فاصله هر دو رأس مجزا در $G(X)$ حداکثر ۲ است و در نتیجه گراف همبند می‌باشد.

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس قضیه ۲۸ در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.

مثال ۲۹. فرض کنیم $X = \{a.b.c.d\}$. در این صورت

$\tau_X = \{\phi.\{a.b\}.\{c\}.\{a.b.c\}.\{c.d\}\}$

یک توپولوژی ناهمبند روی X است، در صورتی که $G(X)$ همبند است و قطر آن ۲ می‌باشد.

قضیه ۳۰. برای هر فضای توپولوژیک $(X.\tau_X)$، گراف اشتراکی $G(X)$ یکی از سه حالت زیر است:

(۱) گراف $G(X)$ گراف تهی است.

(۲) $G(X) = \overline{K_۲}$.

(۳) گراف $G(X)$ همبند گرافی است به طوری‌که $\mathrm{diam}(G(x)) \leq ۲$.

برهان. واضح است که گراف اشتراکی فضاهای توپولوژیک با توپولوژی بیمایه گراف تهی است.

اگر گراف $G(X)$ همبند گرافی نباشد طبق لم ۲۷، $G(X) = \overline{K_۲}$.

حال فرض کنیم $G(X)$ همبند گرافی است. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

(۱) اگر $(X.\tau_X)$ یک فضای توپولوژیکی همبند باشد. طبق قضیه ۲۸، گراف $G(X)$ همبند است و $\mathrm{diam}(G(x)) \leq ۲$.

(۲) اگر فضای توپولوژیک $(X.\tau_X)$، همبند توپولوژیکی نباشد. فرض کنیم a_u و a_v دو رأس از گراف $G(X)$ باشند که زیرمجموعه‌های باز متناظر آنها u و v می‌باشند. فرض کنیم $v = u^c$(این حالت امکان دارد، زیرا فضای $(X.\tau_X)$ همبند توپولوژیکی نمی‌باشد). چون $G(X)$ همبند گرافی است در این صورت یک مسیر می‌نیمال $a_u - a_{u_۱} - \cdots - a_{u_n} - a_v$ در $G(X)$ وجود دارد.

اگر $u_۱ \subseteq u$ در این صورت $u \cap u_۲ \neq \phi$ و می‌توان با حذف رأس $a_{u_۱}$ مسیری بین رأس‌های a_u و a_v بدست آورد که با می‌نیمال بودن مسیر در تناقض است. پس $u_۱ \cap v \neq \phi$ و در نتیجه مسیر به صورت $a_u - a_{u_۱} - a_v$ تبدیل می‌شود. حال فرض کنیم $v \subsetneq u^c$ در این صورت $u_۱ \cup v \neq X$ و مسیر به صورت $a_u - a_{u \cup v} - a_v$ تبدیل می‌شود. در نهایت اگر $u \cap v \neq \phi$، در این صورت مسیر بین a_u و a_v به صورت $a_u - a_v$ است. پس در تمامی حالات $\mathrm{diam}(G(x)) \leq ۲$ می‌باشد.

قضیه ۳۱. برای فضای توپولوژیک$(X.\tau_X)$، گراف اشتراکی $G(X)$ یک درخت است اگر و فقط اگر τ_X^* به یکی از صورت‌های زیر باشد:

(۱) $\tau_X^* = \phi$ که در این حالت $G(X)$ گراف پوچ است.

(۲) $|\tau_X^*| = ۱$ که در این حالت $G(X) = k_۱$.

(۳) $|\tau_X^*| = ۲$ و $\tau_X^* = \{u.v|u \subsetneq v\}$ که در این حالت $G(X) = k_۲$.

(۴) $|\tau_X^*| = ۳$ و $\tau_X^* = \{u.v.u \cup v|u \cap v = \phi.u \cup v \neq X\}$ که در این حالت $G(X) = P_۲$.

برهان. فرض کنیم گراف اشتراکی $G(X)$ یک درخت باشد. حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر $|G(X)| = ۰$ در این صورت گراف $G(X)$ پوچ است و $\tau_X^* = \phi$ می‌باشد.

حالت دوم: اگر $|G(X)| = ۱$. در این حالت $G(X) = k_۱$ و $|\tau_X^*| = |\{u|\phi \neq u \neq X\}| = ۱$.

حالت سوم: اگر $|G(X)| = ۲$. در این حالت $G(X) = k_۲$ و $|\tau_X^*| = |\{u.v|u \subsetneq v\}| = ۲$.

حالت چهارم: اگر $|G(X)| = ۳$. آن‌گاه، $G(X) = P_۲$. حال به بررسی چگونگی τ_X در این حالت می‌پردازیم: چون $G(X) = P_۳$ پس $G(X)$ مسیری به صورت $a - c - b$ می‌باشد که $a.b.c$ رأس‌های متناظر $u_a.u_b.u_c$در τ_X^* هستند. بنابراین داریم $u_a \cap u_c \neq \phi$ و $u_c \cap u_b \neq \phi$ و $u_a \cap u_b \neq \phi$. واضح است

که $u_c \subseteq u_a$ نمی‌باشد، زیرا در غیر این صورت $u_a \cap u_b \neq \phi$ که تناقض است. اگر $u_a \cap u_c \neq u_a$، آنگاه مسیر زیر را در $G(X)$ داریم: $a - a_{u_a \cap u_c} - c - b$ که با $G(X) = P_4$ تناقض دارد. پس $u_a \cap u_c = u_a$ و در نتیجه $u_a \subseteq u_c$. به همین ترتیب $u_b \subseteq u_c$. بنابراین $u_a \cup u_b \subseteq u_c$ که اگر $u_a \cup u_b \neq \phi$ باشد دوری به صورت $a - a_{u_a \cap u_b} - b - c - a$ در درخت $G(X)$ بوجود می‌آید که تناقض است. پس $u_a \cup u_b = u_c$. بنابراین $|\tau_X^*| = 3$ و $\tau_X^* = \{u_a.u_b.u_c | u_a \cap v_b = \phi. u_a \cup u_b = u_c\}$

حالت پنجم: فرض کنیم $|G(X)| \geq 4$. می‌دانیم هر درخت دارای حداقل دو رأس از درجه یک می‌باشد. فرض کنیم رأس $a \in G(X)$ و $\deg(a) = 1$. چون $|G(X)| \geq 4$، راس‌های b و c وجود دارند که $a - c - b$ و $u_a \cap u_b = \phi$. همچنین رأس d در $G(X)$ وجود دارد که فقط یکی از رأس‌های $a.b.c$ مجاور است. اگر d با a مجاور باشد، $\deg(a) = 2$ که تناقض است. مانند حالت چهارم می‌توان استدلال کرد که $u_a.u_b$ افرازی برای u_c هستند بنابراین d نمی‌تواند با b یا c مجاور باشد، زیرا در غیر این صورت $u_a \cap u_c \neq \phi$ و $u_d \cap u_b \neq \phi$ می‌شود. یعنی دور $d - c - b - d$ در درخت $G(X)$ به وجود می‌آید، که تناقض می‌باشد. پس $|G(X)| \leq 3$ است.

نتیجه ۳۲. برای هر فضای توپولوژیک $(X.\tau_X)$، اگر $G(X)$ یک درخت غیرپوچ باشد آنگاه $(X.\tau_X)$ همبند توپولوژیک است و $G(X)$ یک مسیر بطول حداکثر ۲ می‌باشد.

قضیه ۳۳. اگر رأس u در گراف $G(X)$ روی یک دور قرار داشته باشد، طول کوتاهترین دور شامل u برابر با ۳ است.

برهان. فرض کنیم رأس a در گراف $G(X)$ روی یک دور قرار داشته باشد. فرض کنیم دور $a - a_1 - a_2 - \cdots - a_n - a$ یک دور مینیمال شامل a باشد. حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

حالت اول: اگر $u_a \subseteq u_{a_1}$. در این صورت $u_a \cap u_{a_2} \neq \phi$ و دور به صورت $a - a_1 - a_2 - a$ تبدیل می‌شود.

حالت دوم: اگر $u_{a_1} \subseteq u_{a_1}$. در این صورت $u_{a_n} \cap u_{a_1} \neq \phi$ و درنتیجه a_1 با a_n مجاور می‌شود. یعنی دور به صورت $a - a_1 - a_n - a$ تبدیل می‌شود.

حالت سوم: اگر $u_a \subsetneq u_a \cap u_{a_1} \neq \phi$ و $\phi \neq u_a \cap u_{a_1} \subsetneq u_{a_1}$، در این صورت دوری به صورت $a - a_{u_a \cap u_{a_1}} - a_1 - a$ خواهیم داشت.

در تمامی حالات دور شامل a به طول ۳ است.

نتیجه ۳٤. کمر گراف $G(X)$ برابر با ∞ یا ۳ است.

برهان. اگر $G(X)$ درخت باشد، طبق تعریف $girth(G(X)) = \infty$ و در غیر این صورت طبق قضیه ۳۳، کمر $G(X)$ برابر با ۳ است.

قضیه ۳۵. گراف اشتراکی حاصل از توپولوژی $(X.\tau_X)$کامل است اگر و فقط اگر گراف اشتراکی حاصل از عناصر یک پایه دلخواه τ_X کامل باشد.

برهان. فرض کنیم گراف اشتراکی حاصل از توپولوژی $(X.\tau_X)$ کامل باشد. چون هر پایه زیر مجموعه‌ای از τ_X است بنابراین گراف اشتراکی حاصل از هر پایه نیز کامل است.

برعکس: فرض کنیم گراف اشتراکی حاصل از پایه $B = \{u_\alpha | \alpha \in I\}$ کامل باشد و $u.v \in \tau_X^*$. می‌دانیم $u = \bigcup_{u_\alpha \in B} u_\alpha$ و $v = \bigcup_{v_\beta \in B} v_\beta$ که u_α و v_β متعلق به پایه B هستند. پس به ازای هر u_α و v_β داریم $u_\alpha \cap v_\beta \neq \phi$ و در نتیجه $u \cap v \neq \phi$. یعنی $G(X)$ کامل است.

قضیه ٣٦. اگر گراف اشتراکی حاصل از یک پایه دلخواه τ_X همبند گرافی باشد آنگاه گراف اشتراکی حاصل از $(X.\tau_X)$ همبند گرافی است.

برهان. فرض کنیم $u.v \in \tau_X$. آن‌گاه $u = \bigcup_{\alpha \in I} u_\alpha$ و $v = \bigcup_{\beta \in I} v_\beta$ که در آن u_αها و v_βها

عناصر پایه می‌باشند. عضوهای $\alpha_{\cdot} \in I$ و $\beta_{\cdot} \in I$ را انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} u_{\alpha_{\cdot}} \cap u = u_{\alpha_{\cdot}} \neq \phi \Rightarrow & a_u \text{ با } a_{u_{\alpha_{\cdot}}} \text{ مجاور است} \\ v_{\beta_{\cdot}} \cap v = v_{\beta_{\cdot}} \neq \phi \Rightarrow & a_v \text{ با } a_{v_{\beta_{\cdot}}} \text{ مجاور است} \end{cases}$$

و چون $u_{\alpha_{\cdot}}$و $v_{\beta_{\cdot}}$ عناصر پایه هستند، مسیری بین $a_{u_{\alpha_{\cdot}}}$ و $a_{v_{\beta_{\cdot}}}$ وجود دارد. در نتیجه مسیری بین a_u و a_v وجود دارد. یعنی $G(X)$ همبند گرافی است.

در مثال زیر نشان می‌دهیم عکس قضیه فوق برقرار نمی‌باشد.

مثال ۳۶. مجموعه $X = \{a.b.c\}$ به همراه توپولوژی گسسته را در نظر بگیرید. می‌دانیم τ_Xتوسط پایه $B = \{\{a\}.\{b\}.\{c\}\}$ تولید می‌شود. براحتی بررسی می‌شود که گراف حاصل از τ_X همبند و گراف حاصل از پایه B که $\overline{K_3}$ است ناهمبند می‌باشد.

تعداد رأس‌های زیرگراف کاملی از یک گراف که در بین تمامی زیرگراف‌های کامل دارای بزرگترین مرتبه است را عدد خوشه‌ای گراف می‌نامیم و با $|\omega(G(X))|$ نمایش می‌دهیم.

گزاره زیر را در مورد عدد خوشه‌ای بیان می‌کنیم.

گزاره ۳۷. فرض کنیم X یک مجموعه متناهی به همراه توپولوژی گسسته باشد. در این صورت

$$|\omega(G(X))| = 2^{|X|-1} - 1$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $|X| = 2n+1$ عددی فرد باشد. می‌دانیم اشتراک هر دو زیر مجموعه از X که هر کدام حداقل $n+1$ عضو داشته باشند ناتهی است. پس

$$\binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n-1} + \cdots + \binom{2n+1}{n+1} \quad (1)$$

یک کران پائین برای $|\omega(G(X))|$ است. از طرفی هر زیرمجموعه n عضوی از X با متمم خودش که یک زیرمجموعه $n+1$ عضوی است دارای اشتراک تهی می‌باشد. پس هیچ زیرمجموعه حداکثر n عضوی را نمی‌توان به مجموعه فوق شامل زیرمجموعه‌های حداقل $n+1$ عضوی اضافه کرد به طوری‌که با تمام آنها دارای مقطع ناتهی باشد. پس

$$|\omega(G(X))| = \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n-1} + \cdots + \binom{2n+1}{n+1}$$

حال با استفاده از اتحادهای

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad *$$

به راحتی بررسی می‌شود که

$$|\omega(G(X))| = \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n-1} + \cdots + \binom{2n+1}{n+1} = \frac{2^{2n+1} - 2}{2} = 2^{2n} - 1 = 2^{|X|-1} - 1$$

حال فرض کنیم $|X| = 2n$.

واضح است که اشتراک هر دو زیر مجموعه از X که یکی از آنها حداقل n عضو و دیگری حداقل $n+1$ عضو داشته باشد، ناتهی می‌باشد.

پس تعداد $\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n+2} + \cdots + \binom{2n}{2n-1}$

زیرمجموعه‌های با حداقل $n+1$ عضوی از X وجود دارد که اشتراک هر دوی آنها ناتهی است. حال تمام زیرمجموعه‌های n عضوی که شامل یک عضو ثابت $a \in X$ می‌باشند را در نظر بگیرید. واضح است که هر دو تا از این مجموعه‌ها، چون شامل عضو a هستند، دارای اشتراک ناتهی و همچنین اشتراک هر کدام از این زیر مجموعه‌های n عضوی با هر زیرمجموعه حداقل $n+1$ عضوی ناتهی است. ازطرفی هر کدام از این زیرمجموعه‌های n عضوی با متمم خود و همچنین هر زیرمجموعه با کمتر از n عضو با متمم خود که حداقل $n+1$ عضو دارد دارای اشتراک تهی است. پس در این حالت با استفاده از اتحادهای (*) داریم:

$$|\omega(G(X))| = \binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n+2} + \cdots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n-1}{n-1}$$

که عبارت فوق برابر است با

$$\frac{2^{2n} - 2 - \binom{2n}{n}}{2} =$$

$$۲^{۲n-۱}-۱-\frac{\binom{۲n}{n}}{۲}+\binom{۲n-۱}{n-۱}=۲^{۲n-۱}-۱$$

بنابراین

$$\left|\omega\left(G(X)\right)\right|=۲^{|X|-۱}-۱$$

توجه کنید که توپولوژی گسسته ظریف‌ترین توپولوژی روی مجموعه X است. بنابراین گراف اشتراکی حاصل از هر توپولوژی روی X، یک زیر گراف از گراف اشتراکی حاصل از توپولوژی گسسته است. بنابراین عدد مذکور در گزاره ۳۶ یک کران بالا برای $\omega(G(X))$ با هر توپولوژی دلخواه روی X می‌باشد.

قضیه ۳۸. فرض کنیم G یک گراف دلخواه باشد. در این صورت یک فضای توپولوژیک $(X.\tau)$ و یک پایه توپولوژیک مانند $B=\{U_۱.U_۲.\ldots\}$ وجود دارد که یک تناظر یک به یک بین گراف G و گراف اشتراکی تولید شده توسط B برقرار است.

برهان. فرض کنیم گراف G دارای n رأس $v_۱.v_۲.\ldots.v_n$ باشد. مجموعه‌های S_i $(۱\leq i\leq n)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S_i=\{v_i\}\cup\left\{v_i \text{ تمام یال‌های مجاور با }\right\}$$

$$i=۱.۲.\ldots.n$$

اگر $F=\{S_۱.\ldots.S_n\}$ آن‌گاه گراف اشتراکی حاصل از F که آن را با G_F نمایش می‌دهیم با گراف G و G_F دارای n رأس می‌باشند و به علاوه به ازای هر i و j که $i\neq j$، اگر S_i و S_j در گراف G_F مجاور باشند، یالی از گراف G وجود دارد که در این حالت با v_i و v_j مجاور است. پس v_i و v_j مجاور خواهند بود. بالعکس اگر رأس‌های v_i و v_j در گراف G مجاور باشند و e یال موجود بین آنها باشد آن‌گاه با توجه به تعریف S_iها لازم است $e\in S_i$ و $e\in S_j$. پس رأس‌های S_i و S_j در گراف G_F مجاور خواهند بود.

تعریف ۳۹: برای گراف G عدد $\gamma(G)$ (عدد اشتراک) را کوچکترین عددی تعریف می‌کنیم که یک فضای توپولوژیک مانند S با $\gamma(G)$ عضو وجود داشته باشد به طوری‌که گراف اشتراکی حاصل از پایه آن با G یکریخت باشد.

قضیه ٤٠. اگر G گرافی همبند با p رأس و q یال باشد $(p\geq ۳)$ آن‌گاه $\gamma(G)\leq q$.

برهان. مجموعه‌های S_i و S را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$S_i=\left\{v_i \text{ تمام یال‌های مجاور با }\right\}\qquad ۱\leq i\leq q.$$

$$S=\bigcup_{i=۱}^{p}S_i=V(G)$$

اگر $F=\{S_۱.S_۲.\ldots.S_p\}$ را یک پایه توپولوژیک در نظر بگیریم، واضح است که $|S|=q$ و $G_F\cong G$. بنابراین طبق تعریف عدد اشتراک $\gamma(G)\leq q$.

٤- زیرمجموعه‌های احاطه‌گر

یکی از دلایل گسترش روزافزون نظریه‌ی گراف و افزایش توجه‌ها به این شاخه از ریاضی که هنوز سه قرن از شروع و پیدایش آن نگذشته است داشتن وجه کاربردی آن و سودمندی استفاده از آن می‌باشد. احاطه‌گری نیز یکی از مفاهیم مطرح شده در نظریه‌ی گراف است که مانند اکثر مفاهیم این شاخه کاربردهای آن، طیف وسیعی از موضوعات، از مسائل عادی که به طور روزمره اتفاق می‌افتد تا مسائل و موضوعات کلان که به کارگیری روش‌های علمی در آنها صرفه فراوان خواهد داشت را در بر می‌گیرد. برای مرور تاریخ احاطه‌گری و درک ارتباط مسائل قدیمی مطرح شده‌ی مرتبط با مفهوم احاطه‌گری، بهتر است ابتدا با برخی تعاریف آشنا شویم.

تعریف ٤١: مجموعه‌ی $D\subseteq V(G)$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر گویند، هرگاه هر رأس از گراف G، یا در D باشد و یا به رأسی از D متصل باشد. یک مجموعه‌ی احاطه‌گر را مجموعه احاطه‌گر مینیمال گویند، هرگاه با حذف هر عضو آن، مجموعه‌ی باقی‌مانده یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نباشد.

تعریف ۴۲: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، آن را که دارای کوچکترین اندازه است، مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم گراف G گویند و تعداد اعضایش را با $\Gamma(G)$ نمایش می‌دهند. هر مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم از گراف G را یک $\Gamma -$ مجموعه می‌نامند.

گراف G با شرایط بیان شده در قضیه ۳۷ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $B = \{S_۱ . S_۲ . \dots . S_n\}$ یک خانواده از زیر مجموعه‌های S باشد که $G \cong G_B(S)$ توپولوژی τ را توپولوژی تولید شده توسط پایه B روی S در نظر بگیرید. در این صورت G یک زیرگراف از $G_\tau(S)$ است.

واضح است که G یک زیرمجموعه احاطه‌گر از $G_\tau(S)$ می‌باشد.

همچنین اگر B را به عنوان یک زیر پایه و τ' را توپولوژی القایی توسط زیر پایه B در نظر بگیریم، واضح است که $G \leq G_\tau(S) \leq G_{\tau'}(S)$، G یک زیرمجموعه احاطه‌گر از $G_{\tau'}(S)$ نیز می‌باشد.

قضیه ۴۳. عدد احاطه‌گر هر گراف اشتراکی حداکثر ۲ است.

برهان. فضای توپولوژیک $(X.\tau)$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $\tau = \{U_i \subset X \mid i \in I\}$. قرار دهیم $U = \bigcup U_i$. دو اتفاق می‌افتد:

الف) اگر $U \neq X$. در این صورت به ازاء هر $i \in I$، a_{u_i} با a_u مجاور است. پس $\{a_u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف اشتراکی است. یعنی عدد احاطه‌گر برابر ۱ است.

ب) اگر $U = X$. راس $a.$ با ماکسیمم درجه از گراف $G(X)$ به همراه تمامی رئوس مجاورش را حذف می‌کنیم. به همین ترتیب زیر مجموعه‌های باز متناظر با رئوس حذف شده را از τ خذف می‌کنیم. اجتماع زیر مجموعه‌های باز باقیمانده را vبنامیم که یک زیر مجموعه سره از X است. در این صورت $\{a_v . a.\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف اشتراکی است. یعنی عدد احاطه‌گر برابر ۲ است. با استفاده از قضیه‌های ۳۷ و ۴۲ نتیجه می‌شود که هر گراف نمایشی از گراف اشتراکی پایه یک فضای توپولوژیکی است که گراف اشتراکی خود فضا دارای عدد احاطه‌گر حداکثر ۲ است. اگر ω یک کاردینال متناهی یا نامتناهی باشد، مجموعه X با $|X| = \omega$ را می‌توان به عنوان یک فضای توپولوژیک با توپولوژی گسسته در نظر گرفت. می‌دانیم زیر مجموعه‌های تک عضوی X یک پایه برای توپولوژی گسسته می‌باشند که به وضوح گراف اشتراکی تولید شده توسط این پایه یک گراف پوچ از مرتبه ω است که عدد احاطه‌گر آن از مرتبه ω است. در نتیجه عدد احاطه‌گر پایه یک فضای توپولوژیک هر کاردینالی می‌تواند باشد در حالی‌که عدد احاطه‌گر یک فضای توپولوژیک حداکثر ۲ است

لم زیر بوضوح برقرار است.

لم ۴۴. عدد احاطه‌گر یک گراف از مرتبه n برابر با ۱ است اگر و فقط اگر ماکسیمم درجه رأس‌های آن برابر با $n - ۱$ باشد.

حال رده‌بندی زیر را برای فضاهای توپولوژیک نسبت به عدد احاطه‌گر آنها می‌توان ارایه داد.

قضیه ۴۵. برای فضای توپولوژیک $(X.\tau)$:

(۱) $\Gamma\big(G(X)\big) = ۰$ اگر و فقط اگر X یک فضای توپولوژیک با توپولوژی بیمایه باشد.

(۲) $\Gamma\big(G(X)\big) = ۱$ اگر و فقط اگر یک زیرمجموعه باز نابدیهی از X وجود داشته باشد که اشتراک آن با هر عضو پایه فضای توپولوژیک ناتهی باشد.

(۳) در بقیه فضاهای توپولوژیک، $\Gamma\big(G(X)\big) = ۲$.

مقالات متعددی در زمینه زیرمجموعه‌های احاطه کننده و انواع خاص‌تر آن مانند زیرمجموعه‌های احاطه کننده تام، زیرمجموعه‌های احاطه کننده کلی، زیرمجموعه‌های احاطه کننده سراسری و زیرمجموعه‌های احاطه کننده همسایه همبند و ... وجود دارد. دلیل آن هم کاربرد بالای این مفاهیم در شاخه‌های دیگر علوم می‌باشد. به همین جهت افراد زیادی هم زیرمجموعه‌های احاطه کننده را روی گراف‌های حاصل از ساختارهای جبری مطالعه کرده‌اند. در نتیجه مطالعه انواع زیرمجموعه‌های احاطه کننده برای گراف اشتراکی حاصل از یک فضای توپولوژیکی نیز لازم به نظر می‌رسد. که تاکنون این مسأله مورد بررسی قرار نگرفته است.

فهرست منابع

[١] J. Dugundji (١٩٦٦). Topology. Allyn and Bacon.

[٢] B. Csakeny and G. Pollak (١٩٦٩). The graph of subgroups of a finite gruop, Czech Math.

[٣] D.J.S. Robinson (١٩٨٢). A Course in the Theory of Groups. Springer, New York-Heidelberg-Berlin.

[٤] I. Chakrabarty, S. Ghosh, T.K. Sen (٢٠٠٩). Intersection graphs of ideals of rings, Discrete Math.

[٥] D.B. West (٢٠٠٣). Intersection to Graph Teory, Prentices-Hall of India Pvt. Ltd, India.

[٦] J.R. Munkres (١٩٧٥). Topology a first course.Prentice hull.

[٧] J. Bosak (١٩٦٣). The graphs of semigroups. Theory Graphs Appl. Proc. Smolenice.

[٨] J. Bosak (١٩٦٤). Theory of Graphs and Application, Academic Press, New York.

[٩] P. Erdos, A.W. Goodman, L. Posa (١٩٩٦). The representation of a gragh by set Intersections, Canada. J. Math.

[١٠] Frankl. P and Graham. R.L (١٩٨٨). Intersection theorems for vector space, European Journal of Combinatorics.

[١١] Jafari Rad. N (٢٠١٠). Intersection graphs of subspaces of a vector space, The Second Conference on Algebraic Combinatorics, Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

[١٢] Jafari Rad. N and Jafari. S.H (٢٠٠٩). Graphs of subspaces of a vector space, Submitted for publication.

[١٣] A.S. Kondrat`ev (١٩٨٩). Prime graph components of finite simple groups. Math.

[١٤] D.S. Scott (١٩٧٢). Continuous lattices. Lecture Notes in Math, Springer, Berlin.

[١٥] B. Pondelicek (١٩٧٩). On the intersection graph of a commutative distributive groupoid, Math.

[١٦] R. Shen (٢٠١٠). Intersection graph of subgroups of a finite group, Czech. Math.

[١٧] B. Zelinka (١٩٧٥). Intersection Graphs of finite abelian groups, Czech. Math.

[١٨] B. Zelinka (١٩٧٣). Intersection Graphs of lattices, Cas. Mat.

[١٩] B. Zelinka. (١٩٧٥) Intersection Graphs of semilattices, Cas. Mat.