دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

ارائه یک روش عددی جهت قیمت گذاری اختیار معامله آمریکایی در بورس کالا (مطالعه موردی گندم و کنجاله سویا)

رفیع حسنی مقدم[۱]*، حنیف حیدی[۲]، سید روح الله احمدی[۳]، عباس ابراهیمی[۴]

[۱و۳] گروه اقتصاد، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران
[۲] گروه ریاضی (ریاضی کاربردی)، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران
[۴] گروه ریاضی (ریاضی مالی)، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۲۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۲۴

چکیده

ابزارهای متنوعی جهت مدیریت ریسک در بورس کالا به خصوص برای کالاهای کشاورزی وجود دارد که یکی از آنها اختیار معامله آمریکایی است. اختیار معامله مذکور این مزیت را دارد که قابلیت اعمال قبل از سر رسید را دارد. یکی از مهمترین مسائل در علم مالی، ارزش گذاری اختیار معامله می باشد. ارزش گذاری اختیار معامله آمریکایی در روش تفاضلات متناهی نسبت به روش های دیگر از پیچیدگی کمتری برخوردار بوده و زمان محاسبه‌ی آن به نسبت کم می‌باشد و همچنین با افزایش نمونه و افزایش نوسان، پارامترها دچار اختلال نمی شوند. در این پژوهش با استفاده از روش مذکور اختیار معامله آمریکایی برای دو محصول گندم و کنجاله کلزا با توجه با داده های بورس کالای ایران انجام شده و مشخص شده: الف) ارزش اختیار معامله آمریکایی برای گندم و کنجاله کلزا ازروش درخت دو جمله ای و روش تفاضلات متناهی که با استفاده از الگوریتم ارائه شده در پژوهش و کدنویسی در نرم افزار متلب محاسبه شده تفاوت بسیار کوچک و قابل اغماضی دارند. ب) ارزش اختیار معامله آمریکایی برای گندم بیشتر از کنجاله سویا برای هر دو اختیار خرید و فروش بیشتر است. مهمترین دلیل این موضوع به زیاد بودن نوسان پذیری (σ) قیمت پایه سهام گندم نسبت به کنجاله کلزا است. ج) برآیند اثر تغییر نوسان و تغییر قیمت بر ارزش اختیار معامله، به نفع تغییر نوسان تمام می‌شود. این موضوع نشان دهنده مهم بودن پارامتر نوسان در ارزش گذاری اختیار معامله می‌باشد. در نهایت پیشنهاد می‌شود با توجه به اینکه اختیار معامله آمریکایی قابلیت اعمال قبل از سررسید را دارد در بورس کالای ایران برای کالاهای کشاورزی به عنوان یکی از ابزارهای مدیریت ریسک ارائه شود.

واژه‌های کلیدی: بورس کالا – تفاضلات متناهی – اختیار آمریکایی – ارزش اختیار معامله – نوسان.

* عهده‌دار مکاتبات: moghadam_rafi@yahoo.com

۱- مقدمه

طی مدت فعالیت بورس کالای ایران، پذیرش و قابل معامله شدن انواع محصولات کشاورزی در زیرگروه‌هایی مثل کنجاله، ذرت، شکر، پسته، پنبه، زیره، زعفران، عدس، نخود، جو، برنج، خرما، روغن، کشمش، گندم، چای، مرغ منجمد، دانه‌های روغنی، تخم‌مرغ و سایر محصولات، امکان مبادله[۲] طیف وسیعی از کالاهای کشاورزی را برای فعالان میسر کرده است. توسعه ابزارهای نوین مالی در بورس کالا، از جمله ابزارهای مشتقه، سلف و قراردادهای آتی و اختیارات، امکان کاهش یا حذف ریسک خرید کالاها فراهم شده تا تولیدکننده و مصرف‌کننده، بتوانند بسته به نیاز خود، برنامه تولید و مصرف خود را با به‌کارگیری ابزارهای مختلف اجرایی کنند و از نوسانات قیمت‌ها در آینده مصون بمانند. از میان کالاهای کشاورزی مورد مبادله در بورس کالا، دو کالای گندم و کنجاله کلزا از اهمیت شایانی برخوردار است. روغن از جمله کالاهای اساسی و نیازهای ضروری است و با تولید محصولات غذایی به ویژه دانه های روغنی برای تأمین نیاز اساسی مردم علاوه بر پاسداری از امنیت غذایی می توان تولید داخلی را نیز در راستای توسعه اقتصادی هدایت کرد. کشت دانه روغنی کلزا برای تولید پایدار گندم نیز ضروری است زیرا این دانه روغنی در تناوب کشت با گندم سبب تقویت خاک، کاهش آفات و بیماری‌ها، استفاده بهینه از آب و در نهایت افزایش تولید گندم می‌شود. کشت مداوم گندم در اراضی زراعی سبب کاهش توان رویشی اراضی و افت قابل توجه میزان تولید گندم می‌گردد که برای جلوگیری از این روند باید محصول دیگری را در تناوب کشت گندم برای کشت جایگزین در نظر داشت و بررسی‌های علمی نشان می‌دهد دانه روغنی کلزا بهترین نوع محصول در این زمینه است. (علی‌پور و همکاران، ۱۳۹۸)

گندم نیز یکی از کالاهای مهم و استراتژیک است. در کشورهای در حال توسعه گندم به عنوان یکی از محصولات اساسی کشاورزی همواره دارای اهمیت ویژه‌ای بوده و تولید و عرضه آن ضرورت بسیار بالایی داشته است. محصول گندم در الگوی تغذیه مردم این کشورها از جایگاه بسیار مهمی برخوردار بوده است؛ به گونه‌ای که تأمین گندم لازمه دسترسی به امنیت غذایی در این کشورها به شمار می‌آید. در کشور ایران نیز محصول گندم به عنوان غذای اصلی مردم نقش ویژه و اساسی در تأمین امنیت غذایی جامعه ایفا میکند. بر مبنای آمارهای وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی، در حدود ۲۵ درصد از مواد غذایی مصرفی در الگوی تغذیه مردم ایران متشکل از محصولات خانواده گندم است. (علی‌پور و همکاران، ۱۳۹۸)

یکی از مسائل مهم درمورد این دوکالای اساسی نوسان قیمتی این دو کالا می باشد که هم طرف عرضه و هم طرف تقاضا را دچار ریسک می کند. از این رو مدیریت ریسک ناشی از نوسان قیمتی این دو کالای اساسی بیش از پیش ضروریست. هر چند قانون تضمین خرید محصولات اساسی کشاورزی، به منظور ایجاد تعادل در درآمدها و هزینه های تولید کشاورزان، دولت موظف است که قیمت تضمینی خرید گندم در هر سال زراعی را به گونه ای تعیین کند که میزان افزایش آن از نرخ تورم در همان سال کمتر نباشد، لیکن بررسی آمارهای بانک مرکزی نشان می‌دهد که در بسیاری از سالها بر خالف قانون مصوب و با وجود رشد هزینه عوامل تولید متناسب با رشد تورم، میزان رشد قیمت خرید تضمینی کمتر از افزایش نرخ تورم بوده است. (شیخ‌زین‌الدین و بخشود، ۱۳۹۱) تضمین خرید محصولات اساسی کشاورزی برای سامان دادن امور کشاورزان در سال ۱۳۶۸ تصویب شد که قانون آن به منظور حمایت از

[2] Exchange

تولید محصولات کشاورزی اساسی، جلوگیری از ضایعات محصولات کشاورزی، ایجاد تعادل در نظام تولید و همچنین جلوگیری از ضرر و زیان کشاورزان بود، دولت در این قانون موظف شد همه ساله خرید محصولات اساسی کشاورزی را تضمین و حداقل قیمت خرید را اعلام و نسبت به خرید آن اقدام کند. البته پس از بروز مشکل در طرح خرید تضمینی محصولات کشاورزی، سرانجام در تیر ماه سال ۸۹ قانون افزایش بهره‌وری بخش کشاورزی و منابع طبیعی در مجلس تصویب شد که ماده ۳۳ این قانون به جایگزینی سیاست قیمت تضمینی به جای خرید تضمینی محصولات کشاورزی با استفاده از ظرفیت‌های بورس کالا تاکید داشت. در این میان یکی از مهمترین مزایای عرضه کالاهای اساسی کشاورزی در بورس کالا به کمک اجرای سیاست قیمت تضمینی برای دولت این است که میتواند از طریق این سیاست برای کنترل و تنظیم بودجه خود استفاده کند؛ چرا که با این کار دولت به جای پرداخت کل اعتبار مربوط به خرید تضمینی از خزانه، تنها بخشی از هزینه خرید تضمینی که مربوط به مابه التفاوت قیمت پایه با قیمت معامله شده در بورس کالا است را از خزانه پرداخت می کند؛ بنابراین این اتفاق، کمک بزرگی در راستای کاهش بار مالی دولت است. (شیخ‌زین‌الدین و بخشود، ۱۳۹۱)

به طورکلی برای انواع قراردادهای مورد معامله در بورس کالا ایران تاکنون سه بازار معرفی شده است که شامل بازار فیزیکی، بازار مشتقه و بازار فرعی می باشد. در هر یک از این بازارها قراردادهای متنوعی برای معامله کالاهای مختلف استفاده می‌شود. در بازار معامله های مشتقه، قراردادهای متفاوتی مانند قراردادهای آتی، سلف موازی استاندارد و اختیار معامله می تواند روی داراییهای پایه مختلف معامله شود. (باغستانی و همکاران، ۱۳۹۶)

جهت مدیریت و کاهش ریسک در بورس کالا، از طیف وسیعی از ابزارها استفاده می شود که برخی از آنها نیز در بورس کالای ایران نیز مورد استفاده قرار می گیرد. یکی از ابزارهای مفید در مدیریت نوسان قیمتی در بورس کالا، اختیار معامله می باشد. با توجه به اینکه گندم و کنجاله سویا یکی از کالاهای اساسی کشاورزی مورد مبادله در بورس می باشد لذا به کارگیری ابزار اختیار معامله جهت مدیریت نوسان قیمتی این کالاها بسیار مهم است. در بین اختیارهای معامله، اختیار معامله آمریکایی چون در هر زمان قبل از سررسید قابلیت اعمال را دارد، لذا نقش مهمی در مدیریت نوسان قیمتی کالاهای اساسی کشاورزی مورد مبادله به خصوص گندم و کنجاله سویا را داشته و نقش مهمی در تقویت بورس کالا به خصوص کالاهای کشاورزی دارد.

نوآوری این پژوهش در محاسبه ارزش اختیار معامله آمریکایی به روش عددی تفاضلات متناهی است که نسبت به روش های دیگر از پیچیدگی کمتری برخوردار بوده و زمان محاسبه‌ی آن به نسبت کم می‌باشد و همچنین با افزایش نمونه و افزایش نوسان، الگوریتم استفاده شده در پژوهش دچار اختلال نمی‌شوند.

۲- پیشینه تحقیق

از بررسی و پژوهش‌هایی که در این زمینه انجام گرفته است می‌توان به بررسی عبداللهی و نجفی (۱۳۸۲) اشاره کرد. آن‌ها در پژوهش خود به بررسی امکان استفاده از بازارهای آتی و اختیار معامله در بازار پسته در ایران پرداختند. نتایج بررسی آن‌ها نشان داد که حدود ۵۰ درصد از نوسان‌های قیمت پسته در سطح تولید تصادفی و پیش‌بینی نشدنی است و ابزارهای مذکور مناسب برای کاهش این نوسان‌ها می‌باشد، همچنین نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که محصول پسته برای معامله در بازارهای آتی و اختیار معامله مناسب است.

یحیی‌زاده و حسن‌نژاد (۱۳۸۴) در بررسی خود به امکان به‌کارگیری اختیار معامله در بورس اوراق بهادار تهران از دو بعد فنی و ساختاری پرداختند. نتایج حاصل از این پژوهش نشان می‌دهد که شرکت‌های سرمایه گذاری علاقه‌مند به استفاده از اختیار معامله در بورس اوراق بهادار تهران می‌باشند و همچنین امکان به کارگیری اختیار معامله در بورس اوراق بهادار تهران وجود دارد.

شاکران (۱۳۹۱) در پژوهش خود روش عددی جدیدی برای ارزش گذاری اختیار معاملات آمریکایی نوشته شده روی دارایی که پویایی آن از مدل تلاطم تصادفی هستون پیروی می کند، معرفی می‌کند. بدین منظور ابتدا به کمک تجزیه ی دوب-میر، قیمت اختیار معامله آمریکایی را به قیمت اختیار اروپایی نظیر و هزینه اجرای زودرس تجزیه می‌کند و به استخراج PDE برای قیمت این اختیار می پردازد و سپس به کمک تبدیلات فوریه، جوابی برای PDE می‌یابد. این جواب شامل حالت اجرای زودرس، که ناشناخته است و باید برآورد شود، و چند انتگرال، که به طور عددی قابل حل هستند، می‌باشد.

باغستانی و پیش‌بهار و دشتی (۱۳۹۶) در پژوهش خود به بررسی و اهمیت کنجاله سویا و به بررسی و به‌کار گیری ابزارهای نوین مالی و به‌طور خاص قراردادهای اختیار معامله به عنوان ابزاری برای مدیریت خطر و ایجاد سودآوری پرداختند. آنان با بکارگیری روش شبیه سازی مونت‌کارلو به محاسبه اختیار معامله آسیایی کنجاله سویا پرداختند. همچنین به بررسی اثرگذاری تغییر در متغییرهایی همچون قیمت جاری دارایی، نرخ بهره بدون ریسک و نوسان قیمت دارایی بر ارزش اخیار معامله پرداختند.

فهیمی و حسن‌پور (۱۳۹۷) در تحقیق خود به قیمت گذاری اختیار معامله آمریکایی مبتنی بر حل عددی معادله بلک-شولز تحت شرایط مرز آزاد پرداختند. نتایج حاصل از تقریب های تحلیلی و حل عددی با روش تفاضلات متناهی نشان می‌دهد که دقت مسئله ارزش گذاری اختیار معامله آمریکایی با بهره‌گیری از ایده کلیدی ایجاد مرز مصنوعی به شکل قابل توجهی افزایش یافته است و محاسبه ارزش این نوع اختیار معامله را به ازای هر دارایی پایه با قیمت دلخواه تسهیل می‌سازد.

پینگ‌ژو[3] (۲۰۰۶) در پژوهش خود یک راه حل دقیق و صریح برای حل معادله دیفرانسیل بلک-شولز برای ارزش گذاری اختیار معامله آمریکایی معرفی کرد. وی این راه حل ارائه شده را در غالب یک بسط سری تیلور ابداع کرد.

سیموناتو[4] (۲۰۱۱) در پژوهش خود به بررسی و محاسبه‌ی ارزش اختیار معامله آمریکایی تحت زنجیز مارکف پرداخت. وی با یک رویکرد عددی را برای محاسبه اختیار معامله آمریکایی تحت مدل پرش-انتشار بررسی می‌کند. این روش از چگالی انتقال این فرآیند برای ساخت یک زنجیر مارکف همگن و برای تقریب مدل پرش-انتشار استفاده می‌کند. نتایج عددی بدست آمده نشان می‌دهد که عملکرد روش پیشنهادی مطلوب می‌باشد.

چوکالینگام و موتورامان[5] (۲۰۱۵) در پژوهش خود یک روش حل مسئله مرز آزاد در اختیار معاملات آمریکایی ارائه کردند. نتیجه‌ی این تحقیق یک الگوریتم است که تعادل دقت بالاتری را نسبت به دیگر روش‌های محاسباتی که برای حل مسایل مرزی آزاد موجود هستند، دارد.

جونگ، یوو و کیم[6] (۲۰۱۷) در تحقیق خود یک روش تفاضلات متناهی برای حل معادله دیفرانسیل جزئی بلک – شولز و قیمت‌گذاری اختیارهای معامله بدون نیاز به شرایط مرزی ارائه دادند.

[3] Ping Zho
[4] Simonato
[5] Chockalingam & Muthuraman
[6] Jeong, Yoo & Kim

۳- فرضیه های پژوهش

۱- نتایج بدست آمده از روش تفاضلات متناهی جهت محاسبه‌ی ارزش اختیار معامله تقریب مناسبی از متغییر مذکور بدست آمده از روش درخت دو جمله‌ای می‌باشد.

۲- اثر تغییر نوسان بیشتر از اثر تغییر قیمت کالا بر ارزش اختیار معامله آمریکایی می‌باشد.

۴- روش تحقیق

یکی از ابزارهای مشتقه‌ی مالی که اهمیت بسزایی در کنترل و مدیریت ریسک بنگاههای مالی و اقتصادی دارد، قرارداد اختیار معامله است. دارنده‌ی یک اختیار معامله این حق را دارد که در صورت لزوم قرارداد را اجرا بگذارد و یا از آن صرفنظر کند. قرارداد اختیار معامله، قراردادی بین دو طرف یعنی خریدار و فروشنده است به طوری که خریدار اختیار معامله از فروشنده، حق خرید یا فروش دارایی پایه‌ی قرارداد را به قیمت معین (قیمت توافقی) در زمان مشخص درآینده (سررسید یا تاریخ انقضا) خریداری میکند. در قرارداد اختیار معامله نیز همانند سایر قراردادها، هر طرف امتیازی را به طرف مقابل اعطا میکند. خریدار به فروشنده مبلغی با عنوان حق صرف پرداخت می‌کند که در واقع همان قیمت اختیار معامله است. فروشنده نیز حق خرید یا فروش دارایی مذکور را به قیمتی معین به خریدار اعطا می‌نماید.(کواک[7]، ۲۰۰۸) مهمترین نکته در بازار اختیارات این است که دارنده‌ی اختیار معامله، حق اجرای قرارداد را دارد(ملزم نیست)؛ اما اگر وضعیت بازار چنان باشد که اجرا نکردن قرارداد به نفع خریدار باشد، خریدار هیچ تعهدی به اجرای معامله ندارد و می‌تواند قرارداد را نادیده بگیرد. در این صورت تنها زیان خریدار به مبلغی برمیگردد که بابت قیمت اختیار معامله پرداخت کرده است.(کوسوفسکی[8]، ۲۰۱۵)

به طور کلی می‌توان حق اختیار معامله را از نظر نوع قرارداد به دو دسته تقسیم کرد: ۱- اختیار معامله‌ی خرید در واقع این حق(و نه الزام) را به دارنده‌ی اختیار معامله‌ی خرید آن می‌دهد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن بخرد. ۲- اختیار معامله‌ی فروش: یک اختیار معامله‌ی فروش به دارنده‌ی آن این حق را می‌دهد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخصی و یا قبل از آن بفروشد. قیمتی را که در قرارداد ذکر می‌شود، قیمت توافقی یا قیمت اعمال و تاریخ ذکر شده در قرارداد را اصطلاحاً تاریخ انقضا یا سررسید اختیار معامله[9] می‌گویند. (بلایس[10]، ۲۰۱۴)

اختیار معامله‌ی خرید یا اختیار معامله‌ی فروش از منظر سبک اعمال، هر کدام به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم میشوند. قرارداد اختیار اروپایی فقط در سررسید قرارداد قابلیت اعمال دارد. در حالی که قراداد اختیار معامله‌ی آمریکایی در تاریخ سررسید یا در هر زمانی قبل از تاریخ سررسید قابل اعمال است. (هال[11]، ۱۳۸۴)

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله یکی از مباحث چالش برانگیز و اساسی علوم محاسباتی است. از این رو مدل‌های مختلفی برای قیمت گذاری اختیار معامله مانند: روش درخت دوجله‌ای، شبیه سازی مونت کارلو، مدل بلک-شولز و... مطرح شده است. روش‌های متداول جهت قیمت گذاری اختیار معامله عبارت‌اند از:

- مدل‌های تحلیلی[12] که شامل حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی است.

[7] Yue-Kuen Kwok

[8] Robert L. Kosowski
[9] Expiration Date
[10] Stephen Blyth
[11] John Hall
[12] Analytic Models

رایجترین مدل‌های تحلیلی، مدل بلک – شولز[۱۳] است که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی می‌باشد. هرچند روش تحلیلی روش دقیقی است و پارامترها را به صورت دقیق محاسبه می‌کند، اما حل این معادلات با پیچیدگی‌های زیادی زمان محاسبه بالایی همراه است. (کواک، ۲۰۰۸)

- مدل‌های شبکه‌ای[۱۴] که شامل مدل قیمت گذاری دوجمله‌ای[۱۵] و سه جمله‌ای[۱۶] می‌باشد. در این مدل‌ها که به صورت شاخه‌های یک درخت می‌باشند مسیرهای مختلفی که احتمال دارد سهام در طی عمر اختیار معامله طی کند، نشان میدهد. نقطه آغازین مدل شبکه‌ای، قیمت دارایی پایه را در زمان صفر نشان می‌دهد، هر چند قیمت گذاری به روش مدل‌های شبکه‌ای سریع و از پیچیدگی کمی برخوردار است اما با افزایش نوسان(σ)، فاصله‌ی نقاط در درخت چند جمله‌ای افزایش می‌یابد. این ویژگی هنگامی که با یک بازار سهام با دامنه نوسانات بالایی رو به رو باشیم نتایج را با اختلال مواجه می‌کند.(آچینگر و بیندر[۱۷]، ۲۰۱۳)

- شبیه سازی مونت - کارلو[۱۸] که یک الگوریتم محاسباتی است که از نمونه‌گیری تصادفی برای نتایج استفاده می‌کند. این روش در مطالعه سیستم‌هایی که در آن تعداد زیادی متغییر وجود دارد مفید است. در این روش قیمت‌های ممکن سهام در آینده شبیه سازی شده و بوسیله‌ی آن‌ها ارزش اختیار معامله تعیین می‌شود. یکی از معایب این روش عدم استفاده برای مدل‌های غیر خطی است.(ویلموت[۱۹]، ۲۰۰۷)

- تفضلات متناهی[۲۰]، در این روش مشتق توابع با تفاضلات معادل آن‌ها تقریب زده می‌شود. روش مذکور با استفاده از بسط تیلور به حل عددی معادله دیفرانسیل بلک – شولز می‌پردازد.

مدل بلک- شولز در نحوه قیمت گذاری و پوشش ریسک اختیار معامله نقش اساسی و محوری در مهندسی مالی دارد. اساس مدل بلک- شولز بررسی این است که نوسانات قیمت سهام در طول زمان‌های آتی چگونه خواهد بود. فرض اساسی در این مدل این است که قیمت سهام از گام تصادفی[۲۱] پیروی می‌کند و تغییرات قیمت سهام در یک دوره زمانی کوتاه مدت دارای توزیع لاگ نرمال می‌باشد. در مدل بلک – شولز فرایند تغییرات قیمت دارایی پایه (سهام) از مدل حرکت براونی هندسی[۲۲] تبعیت می‌کند. حرکت براونی فاقد حافظه است و گذشته خود را فراموش می‌کند، به همین دلیل مدل بلک- شولز با رفتار بازارهای مالی ایده‌آل مطابقت دارد. (کواک، ۲۰۰۸)

۵- اختیار معامله آمریکایی

ارزش اختیار معامله آمریکایی نمی‌تواند کمتر از بازدهی (*payoff*) اختیار معامله آمریکایی باشد، به بیان دیگر همیشه ارزش اختیار معامله آمریکایی باید بزرگتر یا مساوی بازدهی آن باشد یعنی:

$$V_P^{Am}(s.t) \geq (K \quad s)^+ \qquad (۱)$$

$$V_c^{Am}(s.t) \geq (s \quad K)^+ \qquad (۲)$$

در غیر این صورت امکان آربیتراژ وجود دارد. (سیدیل[۲۳]، ۲۰۱۷)

با توجه به نمودار (۱) داریم $0 < s_f < K$ که به s_f نقطه تماس[۲۴] می‌نامند که به صورت زیر تعریف

[13] Black – Scholes
[14] Lattice Models
[15] Binomial Models
[16] Trinomial Models
[17] Michael Aichinger and Andreas Binder
[18] Monte – Carlo Simulation
[19] Paul Wilmott
[20] Finite Difference Method
[21] Random Walk
[22] Geometric Brownian Motion
[23] Rüdiger U. Seydel
[24] Contact Point

می‌شود:

$$V_P^{Am}(s.t) \geq (K \quad s)^+ : s > s_f(t) \qquad (۳)$$

$$V_P^{Am}(s.t) = K \quad s: \quad s \leq s_f(t) \qquad (۴)$$

با توجه به اینکه $V(s)$ محدب است در نتیجه فقط یک نقطه تماس s_f در هر t داریم. برای هر $s < s_f$ ارزش اختیار معامله آمریکایی برابر با بازده‌ی اختیار معامله یعنی خط صاف خواهد بود.(سیدیل، ۲۰۱۷)

نکته قابل ذکر اینکه موقعیت s_f معلوم نیست و متناسب با زمان تغییر می‌کند به خاطر همین محاسبه $V_P^{Am}(s.t)$ زمانی که $s > s_f(t)$ باشد را یک مسئله مرز آزاد[۲۵] می‌گویند.

۶- نامعادله بلک-شولز

برای بدست آوردن ارزش اختیار معامله آمریکایی تحت مدل بلک-شولز باید به بررسی معادله دیفرانسیل جزئی بلک-شولز تحت شرایط اختیار معامله آمریکایی بپردازیم. معادله دیفرانسیل بلک-شولز به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs\frac{\partial V}{\partial s} \quad rV = 0 \qquad (۶)$$

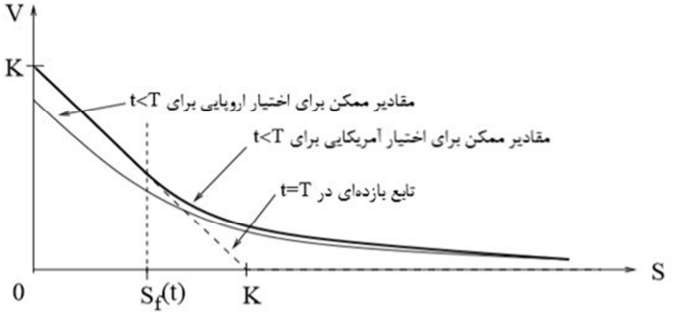
حال فرض برای اختیار فروش آمرریکایی و $V_p^{Am} = K \quad s$ باشد، در این حالت $s \leq s_f(t)$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$V = K \quad s, \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial s} = \quad 1, \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = 0$$

در نتیجه با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه(۶) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs\frac{\partial V}{\partial s} \quad rV = \quad rK < 0 \qquad (۷)$$

نمودار(۱) اختیار فروش اروپایی و آمریکایی



جدول ۱: ارزش اختیار معامله آمریکایی

ارزش اختیار خرید آمریکایی	ارزش اختیار فروش آمریکایی	شرایط مزر آزاد	ارزش اختیار خرید آمریکایی
$s \quad K$	حل معادله(۶)	$s > s_f(t)$	$s \quad K$
حل معادله(۶)	$K \quad s$	$s < s_f(t)$	حل معادله(۶)
$s \quad K$	$K \quad s$	$s = s_f(t)$	$s \quad K$

[25] Free Boundary Problem

و اگر $s > s_f(t)$ در این حالت اعمال اختیار معامله سود آور نیست و ارزش اختیار معامله از معادله(۶) تعیین می‌شود. پس می‌توان گفت که معادله بلک- شولز تحت شرایط اختیار معامله آمریکایی به یک نامعادله بفرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs\frac{\partial V}{\partial s} \quad rV \le 0 \qquad (۸)$$

و همین تحلیل برای اختیار خرید آمریکایی نیز صدق می‌کند.(سیدیل، ۲۰۱۷)

۷- روش تفاضلات متناهی

برای حل معادلات دیفرانسیل پیچیده که بدست آوردن جواب تحلیلی بسیار سخت یا حتی غیر ممکن است، تکنیک‌های حل عددی راهگشا خواهد بود. یکی از مهمترین تکنیک‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی، روش حل تفاضلات متناهی است. در واقع در این روش مشتق توابع با تفاضلات معادل آن‌ها تقریب زده می‌شود. به عبارت دیگر روش FDM، معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی را به سیستمی از معادلات تبدیل می‌کند که از تکنیک‌های جبری بتوان آن را حل نمود.

مزیت FDM این است که به منظور محاسبه‌ی مشتقات جزئی، محیط و دنیای پیوسته را به محیط گسسته تبدیل می‌کند. (ویلموت،۲۰۰۷)

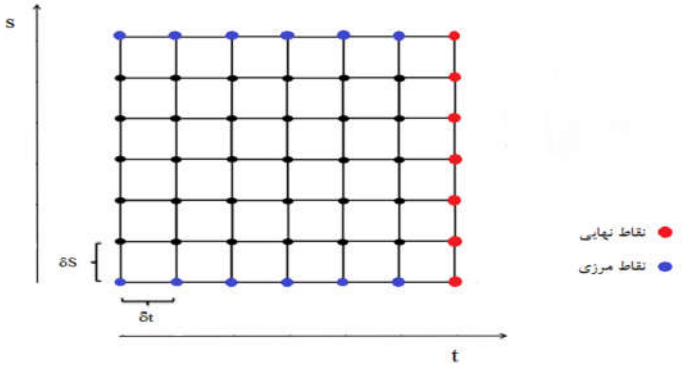
برای محاسبه ارزش اختیار معامله به روش تفاضلات متناهی، باید یک شبکه زمان ـ قیمت سهام همانند شکل (۱) در نظر گرفت. محور عمودی در شبکه نشانگر قیمت سهام ومحور افقی نشانگر زمان می‌باشد. هرنقطه درشبکه دارای یک شاخص عمودی i و افقی j می‌باشد؛ و هر نقطه در شبکه یک ارزش اختیار معامله برای یک زمان و قیمت سهام خاص می‌باشدکه با $V_{i,j}$ نشان داده می شود. فاصله دو نقطه در محور قیمت سهام را با δs و در محور زمان را با δt در نظر گرفته می شود. بنابراین برای هر نقطه روی شبکه، $i\delta s$ نشانگر قیمت سهام در آن نقطه و $j\delta t$ نشانگر زمان در نقطه مورد نظر می‌باشد. (ویلموت،۲۰۰۷)

برای حل معادله دیفرانسیل بلک ـ شولز به روش تفاضلات متناهی در ابتدا باید مقدار ارزش اختیار معامله را در نقاط نهایی و مرزی شبکه مشخص کرد. ارزش اختیار خرید آمریکایی در نقاط نهایی و مرزی برابر است با:

$$\begin{aligned} V_{i.j} &= \max(i\delta s \quad K.0) \;:\; t = T \\ V_{i.j} &= 0 \;:i = s_{min} \\ V_{i.j} &= i\delta s \quad Ke^{-r(T-t)} : i = s_{max} \end{aligned} \qquad (۹)$$

و ارزش فروش آمریکایی در نقاط نهایی و مرزی برابر است با:

$$\begin{aligned} V_{i.j} &= \max(K \quad i\delta s.0) : \; t = T \\ V_{i.j} &= i\delta s \quad Ke^{-r(T-t)} :i = s_{min} \\ V_{i.j} &= 0 : \; i = s_{max} \end{aligned} \qquad (۱۰)$$



شکل ۱: ارزش اختیار معامله آمریکایی

به طور معمول روش‌های تفاضلات متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل عبارت‌اند از:

الف) روش صریح[۲۶]

ب) روش ضمنی[۲۷]

ج) روش کرانک – نیکلسون[۲۸]

تفاوت هر کدام از این روش‌ها در دقت، پایداری[۲۹] و سرعت رسیدن به جواب‌ها است.(ویلموت، ۲۰۰۷) که در این پژوهش به علت دقت و همگرایی بالا و زمان محاسبه نسبتا پایین از روش ضمنی استفاده گردیده است.

اکنون معادله دیفرانسل جزئی بلک ـ شولز با استفاده روش ضمنی بازنویسی خواهد شد:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rs\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \quad rV = 0$$

حال در معادله فوق بجای s قیمت سهام در هر مرحله که با $i\delta s$ محاسبه می‌شود و مشتقات در رابطه فوق را با تقریب‌های تفاضلات متناهی جایگذاری می‌شوند و معادله زیر بدست می‌آید:

$$\frac{V_{i.j+1}-V_{i.j}}{\delta t} + r(i\delta s)\frac{V_{i+1.j}-V_{i-1.j}}{2\delta s} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2(\delta s)^2\frac{V_{i+1.j}-2V_{i.j}+V_{i-1.j}}{(\delta s)^2} \quad rV_{i.j} = 0$$

معادله فوق را می‌توان به‌صورت زیر ساده‌سازی کرد:

$$V_{i.j+1} = \left[\frac{1}{2}\delta t(ri \quad \sigma^2 i^2)\right]V_{i-1.j} + [1 + \delta t(\sigma^2 i^2 + r)]V_{i.j} + \left[\frac{1}{2}\delta t(ri + \sigma^2 i^2)\right]V_{i+1.j}$$

و ضرایب در معادله بالا به صورت در نظر گرفته می‌شوند:

$$a(i) = \frac{1}{2}\delta t(ri \quad \sigma^2 i^2) \qquad (۱۱)$$

$$b(i) = 1 + \delta t(\sigma^2 i^2 + r) \qquad (۱۲)$$

$$c(i) = \frac{1}{2}\delta t(ri + \sigma^2 i^2) \qquad (۱۳)$$

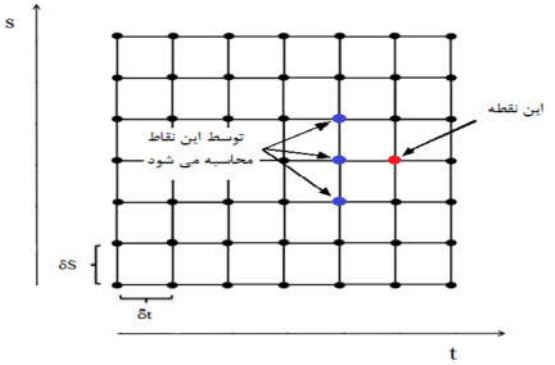
بنابراین معادله روش ضمنی برای محاسبه ارزش اختیار معامله در شبکه زمان ـ قیمت سهام بصورت زیر بدست می‌آید:

$$V_{i.j} = a(i)\,V_{i-1.j-1} + b(i)\,V_{i.j-1} + c(i)\,V_{i+1.j-1} \qquad (۱۴)$$

روش تفاضلات متناهی صریح با داشتن شرط زیر می‌تواند پایدار باشد: (کینگ وهمکاران ،۲۰۱۶)

$$\frac{\delta t}{(\delta s)^2} > 0$$

که شرط مذکور در کد برنامه پژوهش قرار داده شد تا نتایج پژوهش از پایداری بالایی برخوردار باشند.



شکل ۲: روش ضمنی در محاسبه ارزش اختیار معامله

[26] Explicit Method
[27] Implicit Method
[28] Crank - Nicholson
[29] Stability

۸- مقدار دهی پارامترها بر مبنی اطلاعات بورس کالای ایران

به منظور بدست آوردن ارزش اختیار معامله آمریکایی کالاهای مذکور، ابتدا باید مقدار پارامترهای مورد استفاده در مدل مورد استفاده را تعیین کرد. بدین منظور فرض می‌شود یک قرارداد اختیار معامله اروپایی به تاریخ انقضای[۳۰] ۶ ماهه برای هرکدام از این کالاها بفروش رسد. فرض می‌کنیم قیمت اعمال[۳۱] برای قراردادهای مذکور به صورت ATM[۳۲]باشد. اکنون جهت محاسبه ارزش اختیار معامله آمریکایی نیاز به پارامترهای نوسان[۳۳] (σ)، نرخ بهره بدون ریسک[۳۴] (r) و قیمت پایه‌ی سهام (S_0) هرکدام از کالاها می‌باشد که در ذیل به نحوی محاسبه هرکدام از پارامترها پرداخته می‌شود. متداول‌ترین روش برای محاسبه‌ی نوسان پذیری شاخص سهام[۳۵] (ارزش کالا)، نوسان پذیری سالانه[۳۶] می‌باشد که فورمول آن بصورت زیر است:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})\right]^2} \qquad (۱۸)$$

که در رابطه‌ی بالا n تعداد مشاهدات و S_i ارزش سهام (ارزش کالا) در زمان i ام می‌باشند. با توجه به این که دوره‌ی زمانی مورد نظردر این پژوهش ۶ ماهه می‌باشد جهت تبدیل نوسان پذیری سالانه به ۶ ماهه از رابطه زیر استفاده می‌شود: (هاگ[۳۷]،۲۰۰۷)

$$\sigma_{6m} = \frac{\sigma_A}{\sqrt{2}} \qquad (۱۹)$$

برای محاسبه‌ی نرخ بهره بدون ریسک از معادله نرخ سود سپرده‌ی سالانه بانکی استفاده می‌شود. با توجه به بازه‌ی زمانی ۶ ماهه در این پژوهش از میانگین هندسی[۳۸] جهت تبدیل نرخ بهره بدون ریسک سالانه به ۶ ماهه از فورمول زیر استفاده می‌شود:

$$r_{6m} = (1 + r_y)^{\frac{6}{12}} \quad 1 \qquad (۲۰)$$

که در رابطه‌ی بالا r_y نرخ بهره بدون رسیک سالانه است. (محمدی و آسیما،۱۳۹۸)

آخرین پارامتر مورد استفاده در این پژوهش، قیمت پایه کالاهای مورد بررسی در زمان آغاز قرارداد اختیار معامله (S_0) می‌باشد. بدین منظور قیمت کالاهای مذکور در تاریخ ۲۳ بهمن ۱۳۹۸ (شروع فرضی قرارداد اختیار معامله اروپایی) به عنوان قیمت پایه کالاها در نظر گرفته شده است.

نتایج بدست آمده

با توجه به مباحث قبل، نتایج بدست آمده برای ارزش اختیارهای معامله آمریکایی برای دو کالای مورد بررسی (گندم و کنجاله کلزا) به دو روش مختلف؛ روش تفاضلات متناهی و روش درخت دو جمله‌ای در جدول‌های زیر نمایش نشان داده می‌شود. بدین منظور از نرم افزار متلب استفاده شده و نتایج در نرم جداول ۲ و ۳ قابل مشاهده است.

[30] Exercise Date or Expiration Date
[31] Exercise price
[32] At The Money Option
[33] Volatility
[34] Interest Rate
[35] Stock index
[36] Annual Volatility
[37] Espen Gaarder Haug
[38] Geometric mean

جدول ۲: ارزش اختیار خرید آمریکایی

نام کالا	ارزش دارایی پایه	نوسان(σ)	اختیار خرید بدست آمده از روش درخت دو جمله‌ای	اختیار خرید بدست آمده از روش تفاضلات متناهی
گندم	۱۹۷۵۰	۰/۱۵۷۹	۱۹۵۰/۶۲۳۰	۱۹۵۰/۱۴۲۷
کنجاله کلزا	۱۷۸۵۰	۰/۱۱۲۳	۱۶۲۳/۱۷۹۰	۱۶۲۳/۱۹۱۱

جدول ۳: ارزش اختیار فروش آمریکایی

نام کالا	ارزش دارایی پایه	نوسان(σ)	اختیار فروش بدست آمده از روش درخت دو جمله‌ای	اختیار فروش بدست آمده از روش تفاضلات متناهی
گندم	۱۹۷۵۰	۰/۱۵۷۹	۴۱۵/۹۵۴۴	۴۱۵/۳۶۱۲
کنجاله کلزا	۱۷۸۵۰	۰/۱۱۲۳	۲۱۰/۵۶۷۶	۲۱۰/۷۸۰۴

در جداول بالا ارزش اختیار معامله با دو روش به دست آمده است. روش درخت دو جمله ای که این روش در ابزارهای مالی[39] نرم افزار متلب برای ارزش گذاری اختیار معامله آمریکایی وجود دارد و روش تفاضلات متناهی که با استفاده از الگوریتم پیش گفته و کدنویسی در نرم افزار متلب محاسبه شده است. با توجه به جدول مشخص است که این دو روش تفاوت بسیار کوچک و قابل اغماضی دارند ضمن اینکه در روش تفاضلات متناهی با افزایش نوسان، مدل دچار اختلال نمی‌شود.

با توجه به جداول ۲ و ۳ می‌توان گفت ارزش اختیار معامله آمریکایی برای گندم بیشتر از کنجاله سویا برای هر دو اختیار خرید و فروش بیشتر است. مهمتین دلیل این موضوع به زیاد بودن نوسان پذیری (σ) قیمت پایه سهام گندم نسبت به کنجاله کلزا است.

به طور ساده، نوسان‌پذیری قیمت سهام، ابزاری برای نشان دادن درجه عدم اطمینان نسبت به تغییرات آتی بازده سهام می‌باشد. هرگاه درجه نوسان پذیری افزایش یابد، احتمال کاهش یا افزایش قیمت سهام نیز افزایش می‌یابد. برای سهامدار، احتمال افزایش قیمت سهام ممکن است در مجموع با احتمال کاهش قیمت سهام معادل باشد، در حالی که وضعیت برای شخصی که صاحب اختیار خرید یا فروش سهام است، فرق می‌کند. دارندهٔ اختیار خرید، از افزایش قیمت سهام سود می‌کند و حال آنکه ریسک کاهش قیمت سهام که متوجه اوست، محدود می‌باشد؛ زیرا بیشترین زیان دارنده اختیار خرید، همان قیمت اختیار است. به همین ترتیب، دارندهٔ اختیار فروش از کاهش قیمت، سود می‌برد، اما ریسک افزایش قیمت سهام که متوجه اوست، محدود می‌باشد. نتیجه اینکه قیمت اختیارهای خرید و فروش به ازای افزایش درجه نوسان پذیری قیمت دارایی، افزایش می‌یابد. (هال، ۱۳۸۴)

از دیگر سو اثر تغییر قیمت سهام بر روی ارزش اختیار فروش آمریکایی و اختیار خرید آمریکایی به ترتیب منفی و مثبت است. به عبارت دیگر هرگاه اختیار خریدی به اجرا گذاشته شود، ارزش آن بستگی به مقدار افزایش قیمت سهام، نسبت به قیمت توافقی دارد؛ بنابراین ارزش اختیار خرید به موازات افزایش قیمت سهام، افزایش و به موازات افزایش قیمت اعمال، کاهش می‌یابد. برعکس دربارهٔ اختیار فروش نیز می‌توان گفت ارزش آنها تابع میزان افزایش قیمت اعمال نسبت به قیمت سهام

[39] Financial Tools

است. در نتیجه می‌توان گفت که رفتار ارزش اختیار فروش، برعکس بازدهی اختیار خرید است؛ زیرا بازدهی اختیار فروش، به ازای افزایش قیمت سهام، کاهش و به ازای افزایش قیمت توافقی، افزایش می‌یابد. (هال، ۱۳۸۴)

با توجه به جداول ۲ و ۳ می‌توان گفت با توجه به اینکه ارزش قیمت سهام برای گندم بیشتر از کنجاله کلزا می باشد در نتیجه ارزش اختیار خرید برای گندم بیشتر از کنجاله است. اما برای اختیار فروش، نتایج کمی متفاوت است. با افزایش قیمت سهام می‌بایست ارزش اختیار فروش آمریکایی کاهش یابد اما با توجه به اینکه قیمت سهام پایه گندم از کنجاله کلزا بیشتر است ولی قیمت اختیار فروش نه تنها کمتر نیست بلکه بیشتر است. دلیل این موضوع به زیاد بودن نوسان پذیری (σ) قیمت پایه سهام گندم نسبت به کنجاله کلزا بر می‌گردد که اثر افزایش قیمتی را خنثی می کند به‌عبارت دیگر برآیند اثر تغییر نوسان و تغییر قیمت به نفع تغییر نوسان تمام می‌شود. این موضوع نشان دهنده مهم بودن پارامتر نوسان در ارزش گذاری اختیار معامله می‌باشد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در سال‌های اخیر استفاده از ابزارهای مشتقه در بازارهای بورس اوراق بهادار بسیار فراگیر شده است. یکی از ابزارهای بسیار مهم مشتقه، قرارداد اختیار معامله آمریکایی سهام است. در طی پژوهش‌های متعدد تلاش‌های زیادی برای ارزش گذاری اوراق اختیار معامله به خصوص اختیار آمریکایی انجام شده است. مهمترین روش قیمت گذاری اختیار معامله عبارت است از: روش تحلیلی (حل تحلیلی معادله دیفرانسیل جزئی بلک - شولز)، روش شبیه سازی مونت کارلو، روش‌های شبکه‌ای (مدل دو جمله‌ای و سه جمله‌ای) و روش تفاضلات متناهی. از دیگر سو طی مدت فعالیت بورس کالای ایران، پذیرش و قابل معامله شدن انواع محصولات کشاورزی در زیرگروه‌های مختلف امکان مبادله طیف وسیعی از کالاهای کشاورزی را برای فعالان میسر کرده است. از میان موارد کالاهای کشاورزی مورد مبادله در بورس کالا، دو کالای گندم و کنجاله کلزا از اهمیت شایانی برخوردار است. یکی از مسائل مهم درمورد این دوکالای اساسی نوسان قیمتی این دو کالا می باشد که هم طرف عرضه و هم طرف تقاضا را دچار ریسک می‌کند. از این رو مدیریت ریسک ناشی از نوسان قیمتی این دو کالای اساسی بیش از پیش ضروریست. یکی از ابزارهای مهم مدیریت ریسک، استفاده از قرارداد اختیار معامله است. اختیار معامله آمریکایی از این جهت که قبل از سررسید قابلیت اعمال را دارد، می تواند نقش بسزایی در مدیریت ریسک ناشی از نوسان قیمتی محصولات کشاورزی در بورس کالای ایران را ایفا کند. در این پژوهش به قیمت گذاری اختیار معامله آمریکایی با استفاده از روش تفاضلات متناهی پرداخته شد. در این پژوهش ضمن مروری بر قیمت گذاری اختیار معامله آمریکای با استفاده از معادله دیفرانسیل جزئی بلک شولز، این معادله با استفاده از روش ضمنی تفاضلات متناهی به یک معادله گسسته تبدیل شد. در ادامه به منظور بدست آوردن ارزش اختیار معامله آمریکایی برای گندم و کنجاله کلزا، پارامترهای نوسان (σ)، نرخ بهره بدون ریسک (r) و قیمت پایه‌ی سهام (S_0) برای هریک از کالاهای مذکور از تاریخ ۲۳ بهمن ۱۳۹۸ (شروع فرضی قرارداد اختیار معامله اروپایی) به عنوان قیمت پایه سهام در نظر گرفته شده است. در ادامه ارزش اختیار معامله خرید و فروش برای هریک از کالاهای گندم و کنجاله کلزا از دو روش درخت دو جمله‌ای و روش تفاضلات متناهی محاسبه شد و نتایج ذیل به دست آمد:

الف) ارزش اختیار معامله آمریکایی برای گندم و کنجاله کلزا از روش درخت دو جمله‌ای (که این

روش در ابزارهای مالی نرم افزار متلب برای ارزش گذاری اختیار معامله آمریکایی وجود دارد) و روش تفاضلات متناهی که با استفاده از الگوریتم ارائه شده در پژوهش و کدنویسی در نرم افزار متلب محاسبه شده تفاوت بسیار کوچک و قابل اغماضی دارند.

ب) ارزش اختیار معامله آمریکایی برای گندم بیشتر از کنجاله سویا برای هر دو اختیار خرید و فروش بیشتر است. مهمترین دلیل این موضوع به زیاد بودن نوسان پذیری (σ) قیمت پایه سهام گندم نسبت به کنجاله کلزا است.

ج) برآیند اثر تغییر نوسان و تغییر قیمت بر ارزش اختیار معامله، به نفع تغییر نوسان تمام می‌شود. این موضوع نشان دهنده مهم بودن پارامتر نوسان در ارزش گذاری اختیار معامله می‌باشد. بنابراین صحت فرضیه‌های پژوهش تایید می‌شود.

با توجه به این پژوهش مهمترین پیشنهادهای کاربردی برای دستگاه‌های سیاست گذار و اجرایی عبارت‌اند از:

✓ پیشنهاد می شود با توجه به اینکه ابزارهای مشتقه، به طور خاص ابزار اختیارهای معامله ابزاری بسیار کاربردی و مرسوم برای کمینه کردن ریسک ناشی از سرمایه گذاری می باشد، بستر برای انجام این ابزار مشتقه فراهم و در اختیار سرمایه گذاران قرار گیرد.

✓ پیشنهاد می‌شود با توجه به اینکه اختیار معامله آمریکایی قابلیت اعمال قبل از سررسید را دارد و در نتیجه نسبت به اختیار اروپایی دارای انعطاف بیشتری است، در بورس کالای ایران به عنوان یکی از ابزارهای مدیریت ریسک ارائه شود.

✓ همانند بسیاری از بورس‌های مطرح دنیا، در بورس کالای کشور نیز باید نرم افزارها و داده‌های مربوط به اختیار معامله در دسترس سهامداران قرار داده شود تا بتوانند برای خرید یا فروش اختیار معامله، پوشش ریسک مناسب را در نظر گیرند.

✓ پیشنهاد می‌شود که همانند بورس‌های مطرح دنیا، کالاهای اساسی بیشتر وارد بازار کالا گردند تا تنوع و بستر گسترده تری برای سرمایه گذاری در این بازار در اختیار سرمایه گذاران قرار گیرد، و در نتیجه بستر برای استفاده بهتر و بهینه‌تر از ابزارهای مشتقه فراهم گردد.

فهرست منابع

۱. شاکران, زهرا، (۱۳۹۱)، ارزش گذاری اختیار معاملات آمریکایی تحت وجود تلاطم تصادفی، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، سمنان، دانشگاه سمنان.

۲. شیخ زین الدین, آذر و محمد بخشوده، (۱۳۹۱)، کاربرد شبیه سازی تصادفی و رتبه بندی گزینه های خطرپذیر: یک ره یافت تجربی، فصلنامه اقتصاد کشاورزی،۶(۲).

۳. عبداللهی عزت آبادی، محمد؛ نجفی، بهاءالدین، (۱۳۸۲)، بررسی امکان استفاده از بازارهای آتی و اختیار معامله در کاهش نوسانهای قیمتی محصولات کشاورزی در ایران مطالعه موردی محصول پسته، نشریه اقتصاد کشاورزی و توسعه، دوره۱۱: ۱-۲۶.

۴. علیپور، علیرضا و همکاران، (۱۳۹۸)، ارزیابی اثربخشی سیاست خرید تضمینی در پایدارسازی تولید گندم در ایران، نشریه اقتصاد کشاورزی، دوره ۱۳: ۱۰۷-۱۳۵.

۵. فهیمی, میلاد ؛ ابوالفضل حسن پور،(۱۳۹۷)، قیمت گذاری اختیار معاملات آمریکایی مبتنی بر حل عددی معادله بلک – شولز با مرز آزاد، دومین کنفرانس آموزش و کاربرد ریاضیات، کرمانشاه، انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی کرمانشاه.

۶. محمدی، شاپور؛ آسیما، مهدی، (۱۳۹۸)، قیمتگذاری ریسک غیرسیستماتیک از طریق تبیین ریسک آربیتراژ، نشریه راهبرد مدیریت مالی،دانشگاه الزهرا، دوره ۲۶: ۱-۲۴.

۷. نیسی، عبدالساده؛ سلمانی قرائی، کامران، (۱۳۹۶)، مهندسی مالی و مدلسازی بازارها با رویکرد نرم افزار متلب، انتشارات دانشگاه علامه طباطبائی.

۸. یحیی‌زاده، محمود؛ حسن‌نژاد، محمد، (۱۳۸۵)، امکان سنجی به کارگیری اختیار معامله در بازار سرمایه ایران، نشریه پیام مدیریت، شماره ۱۷و۱۸: ۸۵-۱۰۷.

9. Aichinger, Michael & Binder, Andreas .(2013). *A Workout in Computational Finance*, United Kingdom, John Wiley & Sons.

10. Anderson, David .F.(2018). «An Ef cient Finite Difference Method for Parameter Sensitivities of Continuous Time Markov Chains». *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 50(5): 2237-2258.

11. Baghestani, Maryam & Pishbahar, Esmaeil & Dahsti, Ghader. (2017). The Pricing of Asian Options Using Monte Carlo Simulation (Case Study: Soybean Meal). *Agricultural Economics*. 12(3): 1-26. (In Farsi)

12. Blyth, Stephen.(2014). *An Introduction to Quantitative Finance*, United Kingdom, Oxford University.

13. Broadie, Mark & Jain, Ashish. (2008). «Pricing and Hedging Volatility Derivatives». *The Journal of derivatives*. 15(3): 7-15.

14. Causon, D.M & Mingham, C.G. (2010). *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*, English, Ventus Publishing.

15. Choudhry, Moorad. (2013). *An Introduction to Value-At-Risk*, New York, Wiley.

16. Gracianti, Giovani & Matematika, Jurusan & Sains Dan Teknologi, Fakultas. (2018). «Computing Greeks by Finite Difference using Monte Carlo Simulation and Variance Reduction Techniques». *Berkala MIPA*. 25(1): 80-93.

17. Haug, Espen. (2007). *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, New York, McGraw-Hill.

18. Hull, John. (2011). *Options, Futures and Other Derivatives*, New Jersey, Prentice Hall.

19. Jeong, Darae & Kim, Young Rock & Lee, Seunggyu & Choi, Yongho & Lee, Woong-Ki &... . (2015). «A FAST AND ROBUST NUMERICAL METHOD FOR OPTION PRICES AND GREEKS IN A JUMP-DIFFUSION MODEL». *Journal of the Korean Society of Mathematical Education*. 22(2): 159-168.

20. Jeong, Darae & Yoo, Minhyun & Kim, Junseok. (2017). «Finite Difference Method for the Black–Scholes Equation Without Boundary Conditions». *Computational Economics*. 51(4): 961-972.

21. Kosowski, Robert. (2015). *Principles of Financial Engineering,* United Kingdom, Department of Finance Imperial College Business School Imperial College London.

22. Kwok, Yue-Kuen .(2015). *Mathematical Models of Financial Derivatives,* New York, Springer.

23. Kyng, Timothy J & Purcal, Sachi & Zhang, Jinhui C. (2016). «Excel implementation of finite difference methods for option pricing». *Spreadsheet*

24. *s in Education (eJSiE)*. 9(3): 30-63.

25. Langtangen, Hans Petter & Linge, Svein. (2016*). Finite Di erence Computing with PDEs - A Modern Software Approach*, New York, Springer.

26. Muroi, Yoshifumi & Suda, Shintaro. (2017). «Computation of Greeks Using Binomial Tree». *Journal of Mathematical Finance*. 7(3): 597-623.

27. Oksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations*, New York, Springer-Verlag.

28. Paunovic, Jelena. (2014). «OPTIONS, GREEKS, AND RISK MANAGEMENT». *Singidunum Journal of Applied Sciences*. 11(1): 74-83.

29. Shreve, Steven. (2004). *Stochastic Methods in Finance V1* , New York, Springer-Verlag.

30. Shreve, Steven. (2004). *Stochastic Methods in Finance V2* , New York, Springer-Verlag.

31. Siskos, Dimitrios V. (2015). «Numerical Methods for Valuing Advanced Option Contracts». *SSRN Electronic Journal*. 1(1): 57-70.

32. Wilmott, Paul. (2007). *Introduces Quantitative Finance*, United Kingdom*,* John Wiley & Sons.

33. Zhang, Boxiang & Yu, Yang & Wang, Weiguo. (2015). «Numerical Algorithm for Delta of Asian Option». *The Scienti c World Journal*, v1, n1, 1-6.