

## مکان‌یابی کارا با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

مهناز میربلوکی<sup>۱\*</sup>، مریم جولایی<sup>۲</sup>

<sup>(۱)</sup> استادیار و عضو هیات علمی گروه ریاضی، واحد یادگار امام خمینی (ره)، دانشگاه آزاد اسلامی، شهر ری، تهران، ایران (نویسنده مسئول).

<sup>(۲)</sup> مربی گروه ریاضی، واحد یادگار امام خمینی (ره)، دانشگاه آزاد اسلامی، شهر ری، تهران، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۲/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۵/۰۳

### چکیده

تاکنون بسیاری از انواع مدل‌های مکان‌یابی به منظور پیدا کردن الگوهای فضایی مطلوب با توجه به معیارهای مکانی مختلف از جمله، هزینه، پوشش و در دسترس بودن توسعه یافته‌اند. تمرکز اولیه این مدل‌ها بر دسترسی مکانی ارائه دهندگان خدمات و برآورد تقاضاها است و برخی از این مدل‌ها در چارچوب مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفه می‌باشند. پس از پیدایش علم تحلیل پوششی داده‌ها، برخی پژوهشگران میزان کارایی تأسیسات منتخب را به‌عنوان یکی از توابع هدف در مسائل مکان‌یابی در نظر گرفته و به ارائه راهکارهایی پرداخته‌اند. در این مقاله به ارائه یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه با تلفیق یک مدل ارزیابی کارایی و مدل مکان‌یابی می‌پردازیم. مدل حاصل، بر خلاف مدل‌های سابق تنها با یک بار اجرا مراکز منتخب کارا از بین چند مرکز بالقوه مشخص می‌گردند. مدل پیشنهادی توسط مثالی عددی بررسی شده است و نتایج نشان دهنده تضاد بین توابع مکان‌یابی و کارایی است.

**واژه‌های کلیدی:** مکان‌یابی، تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، برنامه‌ریزی چندهدفه.

## ۱- مقدمه

کارایی، ابزار مناسبی برای تعیین عملکرد واحدها است که عبارت از خوب کار کردن، استفاده بهینه از منابع و ماکزیمم سود را کسب نمودن است. شاخص‌های موثر بر کارایی را می‌توان به دو دسته ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیرنده تقسیم کرد. به منظور ارزیابی کارایی نسبی واحدها روش‌های زیادی ارائه شده است که این روش‌ها مبتنی بر تخمین تابعی به نام تابع تولید است. این تابع، تابعی است که ماکزیمم خروجی را به ازای بردارهای ورودی مختلف نشان می‌دهد. در سال ۱۹۵۷ فارل<sup>۱</sup> برای نخستین بار روش‌های پارامتری را ارائه کرد<sup>۲</sup>. پس از آن در سال ۱۹۷۸ تحلیل اولیه فارل توسط چارن<sup>۳</sup> و همکاران تعمیم داده شد<sup>۴</sup> و این کار به‌عنوان شروعی بر تحلیل پوششی داده‌ها مطرح شد.

تاکنون بسیاری از انواع مدل‌های مکان‌یابی به‌منظور پیدا کردن الگوهای فضایی مطلوب با توجه به معیارهای مکانی مختلف از جمله، هزینه، پوشش و دسترسی بودن توسعه یافته‌اند. برخی از این مدل‌ها در چارچوب مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفه مدل‌سازی شده‌اند که در این میان گاهی اهداف با یکدیگر در تناقض می‌باشد. کلیمبرگ و رتیک<sup>۳</sup> [K-R] از این پس (مفهوم کارایی که در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) تعریف شده است را به‌عنوان یکی دیگر از اهداف مدل‌سازی مکان‌یابی در جهت ارائه دیدگاه ارزیابی عملکرد تأسیسات در مکان‌های مختلف بالقوه گنجانیده شده است. در واقع به دلیل ترکیب مدل‌های مکان‌یابی و تحلیل پوششی داده‌ها است که عملکرد تأسیسات می‌تواند توسط برخی از ویژگی‌های مکانی، مانند بازارهای محلی کار، زیرساخت‌های موجود و سایر منابع لازم، خدمات رسانی و تمایز مردم محلی در میان دیگران تحت تاثیر قرار گیرد. در ادبیات موضوع، مطالعاتی در زمینه ترکیب مفهوم کارایی و مکان‌یابی وجود دارد. شروف<sup>۴</sup>

و همکاران<sup>۱۱</sup>] با تعیین کارایی مناطق مختلف جغرافیایی، مکان‌های مناسب برای تأسیس مراکز خدمات درمانی طولانی مدت را تعیین نمودند. توماس<sup>۵</sup> و همکاران<sup>۱۲</sup>] دو روش جهت تعیین مکان تأسیسات زیان‌بخش براساس تحلیل پوششی داده‌ها ارائه نموده‌اند. در هر دو روش فرض شده است که تعداد  $p$  تا از تأسیسات از قبل باز می‌باشند. در روش اول ابتدا مدل مکان‌یابی برای شناسایی یک مجموعه بهینه از مکان‌های تأسیسات، حل شده سپس این مجموعه بهینه از تأسیسات به‌عنوان ورودی در یک مدل اصلاح شده DEA بکار رفته است. این مدل بطور هم‌زمان مدل DEA را در یک LP برای  $p$  مکان بهینه حل می‌کند. اگر نمره کارایی DEA یک شود جواب بهین پیدا شده است در غیر این‌صورت مدل مکان‌یابی دوباره اجرا می‌شود. مکان‌های بهینه پیدا شده در جواب قبلی حذف می‌شوند. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه نمرات DEA کارا شوند یا همه مکان‌های بالقوه جستجو شوند. اگر مسئله شامل  $m$  مکان بالقوه و  $p$  تأسیسات باز باشد، تکرار باید اجرا شود تا همه ترکیبات از نمرات DEA برابر یک شوند. روش دوم مدل DEA و مکان‌یابی را در یک LP تک هدفه ترکیب کرده و کارایی  $p$  سایت بالقوه باز را حداکثر می‌سازد. در این روش تعاملی میان مکان‌یابی و کارایی DEA وجود ندارد. ارتای<sup>۶</sup> و همکاران<sup>۲</sup>] هر دو معیار کمی و کیفی در ارزیابی مکانی تأسیسات را در نظر گرفته و معیارهایی که می‌بایست حداقل شوند را به‌عنوان ورودی و معیارهایی که می‌بایست حداکثر شوند را به‌عنوان خروجی‌های مسئله در مدل ارزیابی کارایی DEA لحاظ کردند. آنها برای ارزش‌دهی داده‌های کیفی مانند آنهایی که مربوط به کیفیت و انعطاف‌پذیری است از فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) استفاده کرده‌اند. محب علی‌زاده و همکاران<sup>۸</sup>] مدل K-R را برای داده‌های فازی توسعه دادند. اما این مدل همچون مدل K-R دارای

<sup>4</sup> Shroff

<sup>5</sup> Thomas

<sup>6</sup> Ertay

<sup>1</sup> Farrell

<sup>2</sup> Charnes

<sup>3</sup> Klimberg and Ratick

مدل، متغیرهای تصمیم و پارامترهای زیر را تعریف می‌کنیم:

### اندیس‌ها:

$K = 1, \dots, K$ : اندیس مکان‌های بالقوه جهت ساخت تأسیسات  
 $T = 1, \dots, T$ : اندیس تأسیسات  
 $L = 1, \dots, L$ : اندیس متقاضیان  
 $S = 1, \dots, S$ : اندیس نوع کالا

### پارامترها:

$c_{tkl}$ : هزینه حمل یک واحد کالای نوع  $r$  ام از مکان بالقوه  $k$  ام به متقاضی  $l$  ام.  
 $dem_{rl}$ : کل تقاضای کالای نوع  $r$  ام متقاضی  $l$  ام.  
 $F_{tk}$ : هزینه ثابت بازگشایی و استفاده از تأسیسات  $t$  ام در مکان  $k$  ام.  
 $Cap_{tk}$ : ظرفیت مکان بالقوه  $k$  ام در تأمین کالای نوع  $r$  ام.

### متغیرهای تصمیم:

$x_{kl}$ : یک است اگر مکان بالقوه  $k$  ام به متقاضی  $l$  ام خدمات‌رسانی کند، در غیر این صورت صفر است.  
 $z_{tk}$ : یک است اگر تأسیسات  $t$  ام در مکان  $k$  ام ساخته شود، در غیر این صورت صفر است.  
 $y_k$ : یک است اگر تأسیساتی در مکان بالقوه  $k$  ام تأسیس شود، در غیر این صورت صفر است.  
 $b_{tkl}$ : مقدار کالای نوع  $r$  ام حمل شده از مکان بالقوه  $k$  ام به متقاضی  $l$  ام.  
 با توجه به تعاریف فوق مدل مکان‌یابی تأسیسات با ظرفیت محدود به صورت مدل [۱] است. این مدل با تغییراتی از مدل موجود در مرجع [۷] به دست آمده است.

ایراداتی است. از جمله این که تأسیساتی که در جواب بهینه انتخاب نمی‌شوند بر کارایی سایر تأسیسات تأثیرگذار می‌باشند. در این مقاله ضمن ارائه یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه با تلفیق یک مدل ارزیابی کارایی وزن مشترک، ایرادات مدل K-R مرتفع می‌گردد.

سایر بخش‌های مقاله به این صورت می‌باشند که در بخش بعدی مباحث اولیه در مدل‌های مکان‌یابی و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها شرح داده می‌شود. در بخش سوم مدل پیشنهادی ارائه شده و بخش چهارم شامل مثالی عددی جهت روشن شدن مدل پیشنهادی است. بخش پنجم نتیجه‌گیری است.

## ۲- مباحث اولیه

### ۲-۱- مدل‌های مکان‌یابی تأسیسات

تمرکز اولیه مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی در مسائل مکان‌یابی تأسیسات، بر دسترسی مکانی ارائه دهندگان خدمات و برآورد تقاضاها است [۹ و ۱۰]. مسئله حمل و نقل کلاسیک، به حداقل‌سازی هزینه حمل و نقل میان مکان‌های عرضه و تقاضایی که مکان مشخصی دارند می‌پردازد [۴]. مسائل مکان‌یابی تأسیسات به دو دسته کلی با ظرفیت و بدون ظرفیت تقسیم می‌شوند. در مسائل بدون ظرفیت هدف انتخاب مکان‌های بهینه از میان تعدادی مکان بالقوه تأسیسات است به طوری که مجموع هزینه‌های حمل و نقل و هزینه‌های ثابت بازگشایی تأسیسات حداقل شود. در این مسائل فرض اولیه آن است که هر مکان بالقوه ظرفیتی نامحدود دارد. همچنین فرض می‌شود که هر متقاضی تقاضای خود را تنها از یک تأمین‌کننده دریافت نماید. در مسائل با ظرفیت، هر مکان بالقوه ظرفیتی محدود جهت تأمین متقاضیان دارد. بنابراین تقاضای هر متقاضی ممکن است توسط بیش از یک تأمین‌کننده برآورده گردد. در این مقاله مدل با ظرفیت محدود بیان و به عنوان چارچوب مدل‌سازی مدل مکان‌یابی پیشنهادی استفاده می‌گردد. به منظور معرفی این

$DMU_j$  با در نظر گرفتن بردار وزنی ورودی  $v$  و بردار وزنی خروجی  $u$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_j = \frac{u_1 O_{1j} + u_2 O_{2j} + \dots + u_s O_{sj}}{v_1 I_{1j} + v_2 I_{2j} + \dots + v_m I_{mj}}$$

برای محاسبه حداکثر میزان کارایی نسبی  $DMU_p$ ، چارنز و همکاران [۱] مدل خطی زیر را که به مدل مضربی CCR معروف است برای یافتن بردارهای وزنی  $u$  و  $v$  ارائه نمودند:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s u_r O_{rp} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i I_{ip} = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r O_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i I_{ij} \leq 0, \quad \forall j, \\ & u_r \geq \varepsilon, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, i. \end{aligned} \quad (2)$$

که  $\varepsilon$  یک مقدار مثبت بی‌نهایت کوچک است که برای جلوگیری از صفر شدن وزن‌ها به مدل اضافه شده است. مقدار بهینه تابع هدف مدل [۲] کارایی  $DMU_p$  را به دست می‌آورد که عددی بین صفر و یک است. از آنجایی که در مدل [۲] هیچ محدودیت وزنی روی مضارب وجود ندارد بنابراین مجموعه‌ای از وزن‌های خروجی و ورودی بی‌کران به وجود می‌آورند. مسئله وزن مشترک به عنوان یک روش متعارف که در آن همه واحدهای تصمیم‌گیرنده با یک وزن واحد ارزیابی می‌شوند، معرفی شده است (مقاله [۶] را ببینید). لیو و پنگ [۵] مدل زیر را براساس روش برنامه‌ریزی آرمانی در تعیین مجموعه وزن‌های مشترک ارائه نمودند. روش برنامه‌ریزی آرمانی که روشی برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه است، تصمیم‌گیرنده به سطوح آرمان برای هر کدام از توابع هدف‌ها نیاز دارد. سپس برای رسیدن به جواب ترجیحی می‌بایست انحرافات از این سطوح آرمانی مینیموم شود.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n d_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r O_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i I_{ij} + d_j = 0, \quad \forall j, \\ & d_j \geq 0, \quad \forall j, \\ & u_r \geq \varepsilon, \quad \forall r, \\ & v_i \geq \varepsilon, \quad \forall i. \end{aligned}$$

$$\min \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^s C_{rkl} b_{rkl} + \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L F_{lk} z_{lk} \quad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^K x_{kl} \geq 1, \quad \forall l, \quad (2.1)$$

$$x_{kl} \leq y_k, \quad \forall k, l, \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1}^K b_{rkl} = \text{dem}_{rl}, \quad \forall l, r, \quad (4.1)$$

$$b_{rkl} \leq \min\{\text{dem}_{rl}, \text{Cap}_{rk}\} \cdot y_k, \quad \forall k, l, r, \quad (5.1)$$

$$\sum_{l=1}^L z_{lk} = y_k, \quad \forall k, \quad (6.1)$$

$$x_{kl} \leq \sum_{l=1}^L z_{lk}, \quad \forall k, l, \quad (7.1)$$

$$\sum_{k=1}^K z_{lk} = 1, \quad \forall l, \quad (8.1)$$

$$z_{lk} \leq \sum_{l=1}^L x_{kl}, \quad \forall t, k, \quad (9.1)$$

$$y_k, x_{kl}, z_{lk} \in \{0, 1\}, \quad \forall k, l,$$

$$b_{rkl} \geq 0, \quad \forall k, l, r.$$

در مدل [۱]، محدودیت [۱،۱] بیان‌گر تابع هدف و هزینه کل حمل و نقل و بازگشایی تأسیسات است. محدودیت [۲،۱] تضمین می‌کند که تقاضای هر متقاضی توسط حداقل یکی از تأسیسات تأمین گردد. محدودیت [۳،۱] خاطر نشان می‌سازد که تنها تأسیسات بازگشایی شده می‌توانند خدمات‌رسانی کنند. محدودیت [۴،۱] بر تأمین کل تقاضای هر متقاضی توسط تأمین‌کنندگان تأسیس شده دلالت دارد و محدودیت [۵،۱] تأیید می‌کند که میزان کالای حمل شده میان تأمین‌کننده و متقاضی حداکثر به اندازه مینیمم درخواست متقاضی و ظرفیت تأمین‌کننده است. محدودیت [۶،۱] خاطر نشان می‌سازد که آیا در مکان  $k$  ام تأسیساتی بنا شده است یا خیر. محدودیت [۷،۱] نشان می‌دهد که اگر در یک مکان تأسیساتی بنا شود آنگاه می‌توان از این مکان به نقاط تقاضا کالا ارسال کرد، محدودیت [۸،۱] بیان می‌کند که هر تأسیسات دقیقاً در یک مکان بنا شود و محدودیت [۹،۱] بیان‌گر لزوم ارسال کالا از مکان‌هایی است که در آنها تأسیساتی بنا شده است.

## ۲-۲- مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنید تعداد  $n$  واحد  $DMU_{j, j \in \{1, \dots, n\}}$  (با بردار ورودی  $I_j = (I_{1j}, \dots, I_{mj})$  و بردار خروجی  $O_j = (O_{1j}, \dots, O_{sj})$ ) موجود است. کارایی

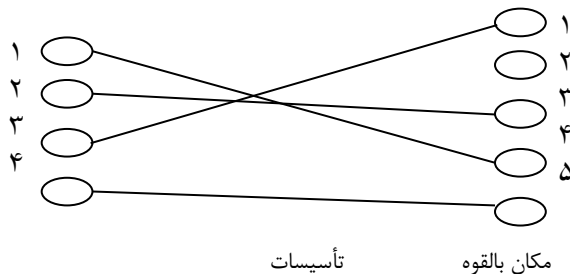
پوششی داده‌ها است. در اینجا هر ارتباط بین تأسیسات  $t$ ام و مکان بالقوه  $k$ ام به‌عنوان یک واحد تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود،  $DMU_{tk}$ . بنابراین اگر  $T$  تأسیسات و  $K$  مکان بالقوه داشته باشیم بنابراین  $TK$  واحد تصمیم‌گیرنده ممکن داریم. برای روشن شدن موضوع شکل [۱] را با [۴] تأسیسات و ۵ مکان بالقوه در نظر بگیرید. با توجه به این شکل از مجموع ۲۰ واحد تصمیم‌گیرنده ممکن، ۴ واحد تصمیم‌گیرنده در  $DMU_{۱,۴}$ ,  $DMU_{۲,۳}$ ,  $DMU_{۳,۱}$ ,  $DMU_{۴,۵}$  جواب نهایی انتخاب شده‌اند. همچنین از این شکل نتیجه می‌شود که در مکان دوم هیچ تأسیساتی بنا نشده است.

در مدل [۳] متغیرهای  $d_j$  بیان‌گر متغیرهای انحراف از سطح کارایی مربوط به  $DMU_j$  یعنی عدد یک می‌باشند. با حل این مدل مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده به دست می‌آید. فرض کنید  $(u^*, v^*, d^*)$  یک جواب بهینه مدل [۳] باشد، بنابراین نمره کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده  $DMU_j$ ، از فرمول زیر حاصل می‌شوند:

$$\theta_j^* = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* O_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i^* I_{ij}} = 1 - \frac{d_j^*}{\sum_{i=1}^m v_i^* I_{ij}} \quad (۴)$$

### ۳- مدل پیشنهادی مکان‌یابی کارا

در این بخش هدف ارائه یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه با تلفیق مدل‌های مکان‌یابی و تحلیل



شکل ۱ - مثالی از واحدهای تصمیم‌گیرنده انتخابی

بنابراین با توجه به تعداد تأسیسات و مکان‌های ممکن، واحدهای تصمیم‌گیرنده  $tk$ ام با بردار ورودی  $I_{tk} = (I_{1tk}, \dots, I_{mtk})$  و بردار خروجی  $O_{tk} = (O_{1tk}, \dots, O_{stk})$  به ذکر است که ورودی‌ها و خروجی‌های  $DMU_{tk}$  با توجه به مسئله مورد بررسی تعریف می‌شوند. ورودی‌ها و خروجی‌ها به ترتیب منابع استفاده شده و محصولات تولید شده توسط هر یک از تأسیسات در مکان‌های بالقوه است که برای روشن شدن این موضوع مثالی در بخش آتی ارائه شده است.

این اشتباه اساسی است که واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که انتخاب نمی‌شوند یعنی در مجموعه امکان تولید قرار ندارند بر وزن واحدهای منتخب تأثیرگذار می‌باشند. در این مقاله ضمن رفع این ایراد از مدل برنامه‌ریزی آرمانی حسین‌زاده لطفی و همکاران [۵] به منظور پیشینه‌سازی کارایی مجموعه واحدهای منتخب استفاده شده است. مدل اولیه پیشنهادی ما، مدل [۵] است که یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه غیرخطی است.

مدل K-R به تلفیق مدل مکان‌یابی با ظرفیت محدود و مدل مضربی CCR پرداخته‌اند. اما مدل آنها دارای

البته محدودیت‌های [۷] به همراه محدودیت‌های [۵،۱۰] را می‌توان به صورت زیر ساده‌سازی کرد:

(۸)

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s \bar{u}_{rnk} + \sum_{i=1}^m \bar{v}_{itk} + d_{tk} &\leq Mz_{tk} \\ \bar{u}_{rnk} &\geq \mathcal{E}z_{tk} \\ \bar{v}_{itk} &\geq \mathcal{E}z_{tk} \end{aligned}$$

همچنین برای هر واحد انتخابی می‌بایست وزن‌های ورودی و خروجی یکسان باشند یعنی برای هر  $k, t, p \in \{1, \dots, T\}$  و  $k, l \in \{1, \dots, K\}$  اگر  $\bar{u}_{rnk} = \bar{u}_{rpq}$  آنگاه  $z_{tk} = 1, z_{pq} = 1$  و  $\bar{v}_{itk} = \bar{v}_{ipq}$  برای رفع این مشکل محدودیت‌های زیر پیشنهاد می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{rnk} - \bar{u}_{rpq} &\leq (2 - z_{tk} - z_{pq})M \\ \bar{v}_{itk} - \bar{v}_{ipq} &\leq (2 - z_{tk} - z_{pq})M \end{aligned} \quad (۹)$$

محدودیت‌های فوق به ازای هر مقدار باینری برای متغیرهای  $z_{pq}$  و  $z_{tk}$  برقرار نمی‌باشند. با توجه به روابط فوق مدل [۵] را می‌توان به صورت مدل [۱۰] که مدلی چندهدفه و خطی آمیخته است بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \min \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K d_{tk} \\ \min \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^s C_{rkl} b_{rkl} + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T F_{tk} z_{tk} \\ s.t. \sum_{k=1}^K x_{kl} \geq 1, & \quad \forall l, \\ x_{kl} \leq y_k, & \quad \forall k, l, \\ \sum_{k=1}^K b_{rkl} = dem_{rl}, & \quad \forall l, r, \\ b_{rkl} \leq \min\{dem_{rl}, Cap_{rkl}\} y_k, & \quad \forall k, l, \\ \sum_{r=1}^s \bar{u}_{rnk} O_{nk} - \sum_{i=1}^m \bar{v}_{itk} I_{ik} + d_{tk} = 0, & \quad \forall t, k, \\ \bar{u}_{rnk} \geq \mathcal{E}z_{tk}, & \quad \forall t, k, r, \\ \bar{v}_{itk} \geq \mathcal{E}z_{tk}, & \quad \forall t, k, i, \\ \sum_{r=1}^s \bar{u}_{rnk} + \sum_{i=1}^m \bar{v}_{itk} + d_{tk} \leq Mz_{tk}, & \quad \forall t, k, \\ b_{rkl} \leq x_{kl} M, & \quad \forall k, l, r, \\ \sum_{t=1}^T z_{tk} = y_k, & \quad \forall k, \\ x_{kl} \leq \sum_{t=1}^T z_{tk}, & \quad \forall k, l, \\ \sum_{k=1}^K z_{tk} = 1, & \quad \forall t, \\ z_{tk} \leq \sum_{l=1}^L x_{kl}, & \quad \forall t, k, \\ \bar{u}_{rnk} - \bar{u}_{rpq} \leq (2 - z_{tk} - z_{pq})M & \quad \forall t, k, r, p \neq t, q \neq k, \\ \bar{v}_{itk} - \bar{v}_{ipq} \leq (2 - z_{tk} - z_{pq})M & \quad \forall t, k, i, p \neq t, q \neq k, \\ x_{kl}, y_k, z_{tk} \in \{0, 1\}, & \quad \forall k, l, t, \\ b_{rkl} \geq 0, \bar{u}_{rnk} \geq 0, \bar{v}_{itk} \geq 0. & \quad \forall t, k, r, i. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

$$\begin{aligned} \min \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K d_{tk} & \quad (۱.۵) \\ \min \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^s C_{rkl} b_{rkl} + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T F_{tk} z_{tk} & \quad (۲.۵) \\ s.t. \sum_{k=1}^K x_{kl} \geq 1, & \quad \forall l, \quad (۳.۵) \\ x_{kl} \leq y_k, & \quad \forall k, l, \quad (۴.۵) \\ \sum_{k=1}^K b_{rkl} = dem_{rl}, & \quad \forall l, r, \quad (۵.۵) \\ b_{rkl} \leq \min\{dem_{rl}, Cap_{rkl}\} y_k, & \quad \forall k, l, r, \quad (۶.۵) \\ z_{tk} (\sum_{r=1}^s u_r O_{rk} - \sum_{i=1}^m v_i I_{ik} + d_{tk}) = 0, & \quad \forall t, k, \quad (۷.۵) \\ u_r \geq \mathcal{E}z_{tk}, & \quad \forall t, k, r, \quad (۸.۵) \\ v_i \geq \mathcal{E}z_{tk}, & \quad \forall t, k, i, \quad (۹.۵) \\ b_{rkl} \leq x_{kl} M, & \quad \forall k, l, r, \quad (۱۰.۵) \\ \sum_{t=1}^T z_{tk} = y_k, & \quad \forall k, \quad (۱۱.۵) \\ x_{kl} \leq \sum_{t=1}^T z_{tk}, & \quad \forall k, l, \quad (۱۲.۵) \\ \sum_{k=1}^K z_{tk} = 1, & \quad \forall t, \quad (۱۳.۵) \\ z_{tk} \leq \sum_{l=1}^L x_{kl}, & \quad \forall t, k, \quad (۱۴.۵) \\ x_{kl}, y_k, z_{tk} \in \{0, 1\}, & \quad \forall k, l, t, \\ b_{rkl} \geq 0, u_r \geq 0, v_i \geq 0, & \quad \forall k, l, r, i. \end{aligned}$$

که در مدل [۵]، محدودیت (۵.۱)، (۵.۷)–(۵.۹) مشابه تابع هدف و محدودیت‌های مدل [۳] تعریف می‌شوند یعنی مجموع انحراف از سطح کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده انتخابی مینیمم می‌گردد. لازم به ذکر است که وجود  $z_{tk}$  در محدودیت‌های (۵.۷) – (۵.۹) به دلیل بی‌تأثیر شدن واحدهای غیرمنتخب در تعیین وزن‌های  $u_r$  و  $v_i$  است. همچنین در محدودیت [۵،۱۰]،  $M$  عددی به اندازه کافی بزرگ است و این محدودیت تضمین می‌کند که در صورتی که مکان بالقوه  $k$ ام برای برآورد تقاضای متقاضی  $l$ ام انتخاب نشود آنگاه میزان کالای حمل شده بین این تأمین‌کننده و متقاضی صفر است. سایر روابط مشابه تابع هدف و محدودیت‌های مدل [۱] می‌باشند.

مدل [۵] یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه غیرخطی است که با تغییر برخی متغیرهای آن قابل تبدیل به فرم خطی است. لذا برای رفع مشکل غیرخطی بودن محدودیت‌های مدل [۵]، متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\bar{u}_{rnk} = u_r z_{tk} \quad (۶)$$

$$\bar{v}_{itk} = v_i z_{tk}$$

از تغییر متغیر فوق محدودیت‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}z_{tk} \leq \bar{u}_{rnk} \leq Mz_{tk} \\ \mathcal{E}z_{tk} \leq \bar{v}_{itk} \leq Mz_{tk} \end{aligned} \quad (۷)$$

**۴- مثال عددی**

در این بخش با ارائه مثالی عددی چگونگی تأثیر کارایی تأسیسات بر نحوه مکان‌یابی و تخصیص متقاضیان بیان می‌گردد. در این مثال می‌خواهیم تصمیم بگیریم که چگونه سه مرکز تأسیساتی را در پنج مکان ممکن جایابی کرده سپس تقاضای هشت متقاضی را توسط تأمین‌کننده‌های تأسیس شده پاسخ دهیم. در این مثال فرض شده است که هر یک از تأسیسات با توجه به مکان قابل احداث دارای سه ورودی (همچون بودجه، زمین ساخت و...) بوده و پس از ساخت می‌تواند دو نوع کالا جهت عرضه به متقاضیان تولید کند. اطلاعات مورد نیاز در جداول ۱

تا ۵ آمده است. این مثال به نوعی از مرجع [۸] الهام گرفته شده است. همچنین فرض می‌کنیم محدودیتی در میزان حمل و نقل کالا در شبکه تأمین‌کننده و متقاضی وجود ندارد. نتایج اجرای مدل [۱۰] در دو وضعیت در جدول ۶ آمده است. در وضعیت اول وزن تابع هدف اول (وزن کارایی) مقدار یک و وزن تابع هدف دوم (مکان‌یابی) صفر و در وضعیت دوم وزن کارایی صفر و وزن مکان‌یابی یک در نظر گرفته شده است. نتایج موجود در جدول ۶ بیان‌گر عدم همسویی توابع هدف مدل می‌باشند. برای رفع این مشکل می‌بایست از روش‌های موجود در برنامه‌ریزی چندهدفه به نوعی استفاده کرد که هر دو تابع هدف به‌طور هم‌زمان در مدل لحاظ شوند.

**جدول ۱ - میزان منابع استفاده شده توسط هر یک از تأسیسات در مکان‌های ممکن**

مکان ۵	مکان ۴	مکان ۳	مکان ۲	مکان ۱	ورودی	
۱۳	۴۶	۲۲	۷۹	۸۳	۱	تأسیسات ۱
۶۳	۹۵	۳۹	۸۵	۸۶	۲	
۲۰	۷۰	۱۸	۱۸	۵۴	۳	
۲۴	۶۹	۶۰	۲۰	۷۸	۱	تأسیسات ۲
۹۵	۵۳	۱۹	۱۵	۴۳	۲	
۱۹	۳۵	۶۹	۳۰	۹۵	۳	
۶۸	۷۸	۹۵	۷۹	۲۵	۱	تأسیسات ۳
۵۰	۸۰	۸۰	۹۵	۲۴	۲	
۷۹	۷۸	۹۱	۴۰	۶۸	۳	

**جدول ۲ - میزان تولید هر یک از تأسیسات در مکان‌های ممکن**

مکان ۵	مکان ۴	مکان ۳	مکان ۲	مکان ۱	خروجی	
۱۴	۱۱	۱۵	۶۱	۵۰	۱	تأسیسات ۱
۸	۵۸	۱۶	۲۷	۳۷	۲	
۵۸	۷۳	۷۲	۴۲	۹۰	۱	تأسیسات ۲
۱۶	۷۷	۸	۲۹	۷۰	۲	
۲۱	۹۰	۸۴	۸۵	۳۸	۱	تأسیسات ۳
۷۸	۳۲	۵۵	۵۶	۲۳	۲	

نوع	متق	متق	متق	متق	متق	متق	متق	متق
۱	۱۰	۸	۴۸	۱۱	۲۵	۸	۴۵	۳۳
۲	۲۵	۱۴	۲۹	۷	۴۲	۱۱	۱۷	۵۲

تأسیسات	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۲۵۰	۲۵۷	۲۴۳	۲۵۳	۲۴۸
۲	۱۶۵	۱۷۸	۱۶۸	۱۷۲	۱۷۰
۳	۲۰۵	۲۱۸	۲۱۱	۲۰۹	۲۱۳

مکان	مقاضی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱	۷۴	۸۷	۴۲	۳۲	۲۴	۴۶	۶۴	۵۳	۸
۲	۲۸	۲۸	۲۲	۲۷	۴۳	۶۴	۳۶	۴۵	۷
۳	۱۹	۶۱	۷۵	۶۷	۱۸	۳۳	۴۱	۲۰	۶
۴	۴۴	۴۶	۶۷	۶۳	۸۱	۸۰	۴۸	۴۵	۵
۵	۹۹	۱۰۸	۴۲	۳۵	۶۲	۴۴	۸۱	۵۰	۴

وضعیت	تأسیسات	مکان تخصیص داده شده	مقاضیان تخصیص داده شده	کارایی	هزینه نهایی
۱	۱	۲	۱،۵،۷،۸	۱	۱۹۲۲۴
	۲	۱	۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷	۱	
	۳	۵	۴،۸	۱	
۲	۱	۳	۱،۵،۶،۸	۰،۶۵	۱۳۸۵۲
	۲	۱	۱	۱	
	۳	۲	۲،۳،۴،۷	۱	

### ۵ - نتیجه‌گیری

در این مقاله با ارائه یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه به تلفیق یک مدل ارزیابی کارایی با وزن مشترک می‌پردازیم. این چندین مدل‌هایی در مقالات مدل K-R و محب‌علی‌زاده و همکاران [۸] نیز بررسی شده است. اما یکی از اساسی‌ترین ایرادات مقالات موجود در این مقالات آن است که این مدل‌ها واحدهایی که در مجموعه امکان تولید نیستند را در

ارزیابی کارایی لحاظ می‌کنند. در این مقاله ضمن رفع این ایراد و تغییر ساختار مدل‌های مقالات قبل مدلی خطی و مختلط ارائه شده است. نتایج بررسی در مثال کاربردی بیان‌گر آن می‌باشند که توابع هدف مکان‌یابی و کارایی ممکن است با هم هم‌راستا نباشند لذا ارائه روشی براساس برنامه‌ریزی چندهدفه برای در نظر گرفتن همزمان این توابع هدف ضروری به نظر می‌رسد.



## فهرست منابع

- [11] Shroff. H.E, Gullede. T.R, Haynes. K.E (1998). Siting efficiency of long-term health care facilities, Socio.
- [12] Thomas. P, Chan. Y, Lehmkuhl. L, Nixon. W (2002). Obnoxious-facility location and data-envelopment analysis: A combined distance-based formulation.
- [1] Charnes. A, Cooper. W.W, Rhodes. E (1978). Measuring the efficiency of decision making units, Eur.
- [2] Ertay. T, Ruan. D, Tuzkaya. U.R (2006). Integrating data envelopment analysis and analytic hierarchy for the facility layout design in manufacturing systems, Inform Sciences.
- [3] Farrell. M.J (1957). The Measurement of Productive Efficiency, J.R. Stat. Soc, Series A (General).
- [4] Hitchcock. F.L (1941). Distribution of a product from several sources to numerous localities.
- [5] Liu. F.H.F, Hsuan Peng. H (2008). Ranking of units on the DEA frontier with common weights. Computers and Operations Research.
- [6] Jahanshahloo. G.R, Memariani. A, Hosseinzadeh-Lotfi. F, Rezai. H.Z (2005). A note on some of DEA models and finding efficiency and complete ranking using common set of weights. Appl. Math. Comput.
- [7] Klimberg. R.K, Ratick. S.J (2008). Modeling data envelopment analysis (DEA) efficient location/allocation decision, Comput. Oper. Res.
- [8] Moheb-Alizade. H, Rasouli. S.M, Tavakkoli-Moghaddam. R (2011). The use of multi-criteria data envelopment analysis (MCDEA) for location-allocation problems in a fuzzy environment.
- [9] Revelle. C (1987). Urban public facility location, Handbook of regional and urban economics.
- [10] Schilling. D.A, Jayaraman. V, Barkhi. R.A (1993). Review of covering models in facility location.

