

الگوی برنامه‌ریزی آرمانی و تحلیل پوششی داده‌های معکوس به منظور تخمین ورودی‌ها

محمد تقی یحیی‌پور شیخ زاهدی^۱، علیرضا امیر تیموری^۲، سهراب کردرستمی^۳، سیداحمد عدالت‌پناه^۴

^(۱) گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

^(۲) گروه ریاضیات کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

^(۴) گروه ریاضی کاربردی، موسسه آموزش عالی آیندگان، تنکابن، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۱۱/۲۸

چکیده

تخمین مقادیر ورودی‌ها وقتی که مقادیر خروجی‌ها را به اندازه دلخواه تغییر می‌دهیم یکی از کاربردهای مهم تحلیل پوششی داده‌های معکوس می‌باشد. اگر در میان دسته‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU ها) بخواهیم سطح ورودی‌های (خروجی‌های) یک DMU را تخمین بزنیم، وقتی که برخی یا همه خروجی‌های (ورودی‌ها) آن تغییر نماید به طوری که کارایی هزینه حفظ یا بهبود یابد، از تحلیل پوششی داده‌های معکوس استفاده می‌شود که در این مقاله کارایی هزینه با افزایش خروجی‌های دلخواه مورد بررسی قرار می‌گیرد. روش و مدل جدید به کمک برنامه‌ریزی آرمانی برای حفظ یا بهبود کارایی هزینه DMU ها ارائه می‌شود. همچنین در این ارتباط نتایج مدل پیشنهادی در یک مثال عددی و یک مطالعه موردی شرکت خودروسازی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های معکوس، بهبود کارایی هزینه، افزایش خروجی‌ها، برنامه‌ریزی آرمانی، صنعت خودروسازی

۱- مقدمه

یکی از مهمترین دسته‌بندی مدل‌های تصمیم‌گیری چند هدفه، برنامه‌ریزی آرمانی است که برای تجزیه و تحلیل و حل مسائل کاربردی با چندین هدف متفاوت به کار می‌رود. برنامه‌ریزی آرمانی در دهه ۱۹۶۰ توسط چارلز و همکارانش معرفی شد [۲۱]. در این مدل برای هر یک از توابع هدف یک مقدار آرمانی تعیین می‌شود و با توجه به اولویت اهداف مختلف در پی حداقل نمودن انحرافات مجاز هدف‌ها از مقادیر آرمانی مشخص شده است. در دهه‌های اخیر با توسعه و پیشرفت روش‌های محاسباتی، کاربردهای گسترده‌ای در رشته‌های علوم مهندسی و علوم اجتماعی یافته است. چند هدفه بودن مسائل دنیای واقعی از مشکلات مدل‌سازی است. برنامه‌ریزی آرمانی از مفیدترین و کاربردی‌ترین روش‌های ریاضی است که برای تجزیه و تحلیل و حل مسائل چند هدفه به کار می‌رود.

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیرپارامتری براساس برنامه‌ریزی ریاضی برای اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده است که توسط چارلز و همکارانش در سال ۱۹۷۸ ارائه گردید، [۲] تحلیل پوششی داده‌ها برای محاسبه کارایی هر واحد در مقایسه با سایر واحدها به کار می‌رود. هدف اصلی آن، مقایسه و سنجش کارایی تعدادی از واحدهای تصمیم‌گیرنده مشابه است که چندین ورودی و چندین خروجی دارند. منظور از مقایسه و سنجش کارایی نیز این است که یک واحد تصمیم‌گیرنده در مقایسه با سایر واحدهای تصمیم‌گیرنده، چقدر خوب از منابع خود در راستای تولید استفاده کرده است. کارایی نسبی DMU ها از تقسیم مجموع وزن‌دار شده خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار شده ورودی‌ها تعریف می‌شود. تحلیل پوششی داده‌ها کاربردهای زیادی دارد که شامل زمینه‌های آموزشی، اقتصاد، مدیریت، بهداشت و حمل و نقل و ... می‌باشند [۱]. در سال ۱۹۸۴ این تکنیک توسط بنکر و همکارانش توسعه داده شد [۳] و تحلیل پوششی داده‌های معکوس یکی از موضوعات قابل توجه در بخش‌های عملی و نظری می‌باشد که در آن کارایی نسبی DMU تحت ارزیابی داده شده است و هدف تعیین سطوح ورودی و خروجی یک واحد تصمیم‌گیرنده است تا مقدار کارایی نسبی آن ثابت بماند یا بهبود بیابد.

تحلیل پوششی داده‌های معکوس اولین بار در سال ۱۹۹۹ توسط زانگ و کوی [۴] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. وی و همکاران [۵] در سال ۲۰۰۰ مدلی را برای پاسخگویی به پرسش زیر پیشنهاد کردند.

«اگر در میان گروهی از DMU ها یک یا چند ورودی در یک واحد خاص را افزایش دهیم و فرض کنیم که DMU تحت ارزیابی کارایی خود را در مقایسه با دیگر واحدها حفظ کند، تا چه میزان خروجی‌های DMU تحت ارزیابی افزایش می‌یابند؟»

یان و همکارانش [۶] در سال ۲۰۰۲ یک مساله برنامه‌ریزی خطی برای واحدهای کارای ضعیف تحت ارزیابی، ارائه کردند و همچنین یک مدل $MOLP$ برای واحدهای ناکارای تحت ارزیابی ارائه دادند.

علاوه بر این، در ادامه هادی وینچه و همکارانش [۷] در مطالعات خود، مدل ارائه شده بوسیله وی و همکارانش [۵] را برای جواب سوال زیر توسعه دادند. «اگر در میان گروهی از DMU ها چندین خروجی را در یک واحد خاص افزایش دهیم و فرض کنیم که DMU کارایی نسبی خود را در مقایسه با دیگر واحدها حفظ کند، تا چه میزان ورودی‌های DMU افزایش می‌یابند؟» برای جواب پرسش فوق ساوانی و همکارانش [۸] نیز مدلی پیشنهاد نمودند. تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی غیرپارامتری برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس ماهیت آن است. ماکزیم نمودن درآمد یا سود، مینیم کردن هزینه، هدف‌های رفتاری همراه با قیمت ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشند. اولین بار فارل [۹] در سال ۱۹۵۷ تعریف کارایی هزینه را معرفی کرد که نقش معناداری در توسعه مفهوم تحلیل پوششی داده‌ها بازی کرده است. سپس کارایی هزینه توسط فارو و همکاران [۱۰] توسعه داده شد. آنها کارایی هزینه را با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی خطی به دست آوردن این مدل برنامه‌ریزی خطی علاوه بر داده‌های ورودی

و خروجی به قیمت‌های ورودی واحدهای تصمیم‌گیرنده نیاز دارد. کارایی هزینه (CE)، به عنوان یک مدل DEA، ابزار اندازه‌گیری توانایی یک DMU برای رسیدن به خروجی فعلی با حداقل هزینه است. هیوفونی و همکارش در سال ۲۰۰۲ [۱۰] از نسبت ورودی توابع شبه فاصله مستقیم و غیرمستقیم برای اندازه‌گیری کارایی تخصیص خروجی استفاده کردند. میگ لان لین و همکارانش [۱۲] با یکپارچه‌سازی تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) و تحلیل سلسله مراتبی AHP به بررسی اقتصادی دولت‌های محلی چین پرداختند. بنی هاشم و همکارانش [۱۳] کارایی سود، هزینه و درآمد زنجیره‌های تامین چند مرحله‌ای را در سه مرحله ارزیابی نمودند. تخصیص عادلانه هزینه درآمد ثابت مشترک توسط تحلیل پوششی داده‌ها توسط خدابخشی و همکارش [۱۴] بررسی شد. مدل‌های کارایی هزینه درآمد در DEA_R توسط مظفری و همکارانش [۱۵] ارائه گردید. در سال ۲۰۱۴ ساهو [۱۶] با یک روش تابع فاصله جهت‌دار کارایی هزینه درآمد و سود در DEA را اندازه‌گیری نمودند. روش متمرکز شده برای تخصیص دوباره منابع بر اساس کارایی درآمد در بین مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری در یک محیط متمرکز شده توسط لی فانگ و همکارش [۱۷] ارائه گردید. کارایی هزینه درآمد شرکت‌ها با اندازه راسل اصلاح شده توسط جان آپاریکو و همکارانش [۱۸] اندازه‌گیری و تجزیه و تحلیل شد. قیاسی [۲۲] تحلیل پوششی داده‌های معکوس بر پایه کارایی هزینه و درآمد با ساختار برنامه‌ریزی خطی چند هدفی را بررسی نمود. سلیمانی و همکارانش [۲۳] حفظ کارایی هزینه و درآمد از طریق مدل‌های تحلیل پوششی معکوس داده‌ها را ارائه کردند. امین و همکارانش [۲۴] یک مدل تحلیل پوششی داده معکوس جدید را بر اساس یک مدل کارایی هزینه برای تخمین سود بالقوه از ادغام معرفی می‌کند.

در این مقاله یک روش جدید به کمک برنامه‌ریزی آرمانی برای تخمین ورودی‌های DMUها بر اساس حفظ یا بهبود اندازه کارایی هزینه DMUها پیشنهاد می‌گردد. به عبارتی دیگر، به این پرسش پاسخ خواهیم داد: تحت حفظ یا بهبود کارایی هزینه، وقتی که برخی یا همه خروجی‌های یک DMU افزایش داده می‌شود ورودی‌های آن DMU چه می‌زانی می‌باشد؟ برای رسیدن به این هدف، با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی یک روش تحلیل پوششی داده‌های معکوس معرفی می‌شود. همچنین به منظور بررسی اعتبار روش ارائه شده، دو مجموعه داده استفاده و نتایج تحلیل می‌شوند.

در این مقاله ابتدا در بخش ۲ تحلیل پوششی داده‌ها و کارایی هزینه معرفی خواهد شد. سپس در بخش ۳ بهبود کارایی هزینه با افزایش خروجی‌ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت و پس از ارائه مثال عددی و مطالعه موردی در بخش ۴، مقاله با نتیجه‌گیری از موارد ذکر شده به اتمام خواهد رسید.

۲- تحلیل پوششی داده‌ها و کارایی هزینه

۲-۱- تحلیل پوششی داده‌ها

تحلیل پوششی داده‌ها یک مدل برنامه‌ریزی خطی جهت ارزیابی عملکرد مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری متجانس است. بهره‌وری از مفاهیم مورد توجه انسان است چون هر انسان عاقل و خردمندی دوست دارد که بهترین کار را برای بدست آوردن بهترین محصول انجام دهد. کارایی را می‌توان نسبت بین بازده (خروجی) و نهاده (ورودی) بیان نمود. دو دسته اصلی برای اندازه‌گیری کارایی روش‌های پارامتری و غیرپارامتری هستند که در روش‌های پارامتری حتما باید تابعی به طور پیش فرض وجود داشته باشد و واحدهای تصمیم‌گیری که یک خروجی دارند به کار می‌رود. ولی در روش‌های غیرپارامتری هیچ تابعی از قبل وجود ندارد و سعی می‌شود یک تابع تجربی به کمک مشاهدات به دست آورد. از مهمترین روش‌های غیرپارامتری برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری که بر اساس برنامه‌ریزی خطی مطرح می‌شود تحلیل پوششی داده‌ها DEA است. چارنز و همکارانش در سال ۱۹۷۸ مدل CCR را برای ارزیابی کارایی واحد تصمیم‌گیرنده ارائه کردند. [۲]

۲-۲- کارایی هزینه

مفهوم کارایی به مفهوم عدم اتلاف منابع و بهره‌برداری مناسب منابع و حداکثر نمودن خروجی‌های مطلوب است. به عبارتی دیگر معنی کارایی مصرف کمترین ورودی‌ها برای به دست آوردن بیشترین خروجی‌ها است. کارایی هزینه علاوه بر استفاده از مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها، از قیمت و ارزش ورودی‌ها در محاسبه کارایی بهره می‌گیرد. فرض کنید $X_{m \times n}$ و $Y_{s \times n}$ و $C_{m \times n}$ به ترتیب ماتریس‌های ورودی، خروجی و ماتریس هزینه‌ی ورودی‌ها می‌باشند. مدل کارایی هزینه جهت محاسبه‌ی کارایی هزینه DMU_0 در پی یافتن واحدی است که کمترین هزینه را برای تهیه ورودی‌های کوچک‌تر یا مساوی با ورودی‌های واحد تحت ارزیابی، جهت تولید خروجی‌های برابر با خروجی‌های واحد تحت ارزیابی، مصرف می‌کند. لذا با در نظر گرفتن c_{io} به عنوان هزینه‌ی متناظر با ورودی i ام DMU_0 ، مدل به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^m c_{io} x_i \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq x_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

اگر $(\lambda^*$ و $x^*)$ و z^* جواب بهینه‌ی مسأله‌ی فوق باشد کارایی هزینه کلی واحد تحت ارزیابی λ ام با تقسیم مینیمم هزینه‌ی کلی $z^* = \sum_{i=1}^m c_{io} x_i^*$ بر هزینه مشاهده شده $\sum_{i=1}^m c_{io} x_{io}$ تعریف می‌شود.

$$E_{co} = \frac{\sum_{i=1}^m c_{io} x_i^*}{\sum_{i=1}^m c_{io} x_{io}} \quad (2)$$

که در آن $0 < E_{co} \leq 1$ برای $(o = 1, 2, \dots, n)$.

تعریف: DMU_0 را کارای هزینه‌ی کلی می‌نامند، اگر و فقط اگر $E_{co} = 1$.

پس

$$\frac{\sum_{i=1}^m c_{io} x_i^*}{\sum_{i=1}^m c_{io} x_{io}} \leq 1 \quad (3)$$

با ضرب طرفین نامعادله (۳) در $\sum_{i=1}^m c_{io} x_{io}$ به نامعادله $\sum_{i=1}^m c_{io} x_i^* \leq \sum_{i=1}^m c_{io} x_{io}$ می‌رسیم که در آن $\sum_{i=1}^m c_{io} x_{io}$ هزینه مشاهده شده یک آرمان برای هدف $\min z = \sum_{i=1}^m c_{io} x_i$ خواهد بود. با اضافه نمودن متغیرهای انحراف از آرمان به نامعادله $\sum_{i=1}^m c_{io} x_i^* \leq \sum_{i=1}^m c_{io} x_{io}$ معادله آرمان زیر را داریم:

$$\sum_{i=1}^m c_{io} x_i^* - d_1^+ + d_1^- = \sum_{i=1}^m c_{io} x_{io} \quad (4)$$

چون نامعادله $\sum_{i=1}^m c_{io} x_i^* \leq \sum_{i=1}^m c_{io} x_{io}$ همواره شدنی است پس در معادله (۴) متغیر $d_1^+ = 0$ خواهد بود. با اضافه کردن متغیرهای انحراف از آرمان به قیود مدل (۱) معادلات آرمان زیر را داریم:

$$\sum_{i=1}^m c_{io} x_i^* + d_1^- = \sum_{i=1}^m c_{io} x_{io} \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - x_i - di_i^+ + di_i^- = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - do_r^+ + do_r^- = y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (7)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$do_r^+ \geq 0, do_r^- \geq 0 \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$di_i^+ \geq 0, di_i^- \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$d_1^- \geq 0$$

لذا مدل برنامه‌ریزی آرمانی به صورت زیر می‌باشد:

$$\min z = d_1^- + \sum_{i=1}^m di_i^+ + \sum_{r=1}^s do_r^-$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^m c_{io} x_i + d_1^- = \sum_{i=1}^m c_{io} x_{io} \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - x_i - di_i^+ + di_i^- = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - do_r^+ + do_r^- = y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$do_r^+ \geq 0, do_r^- \geq 0 \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$di_i^+ \geq 0, di_i^- \geq 0, x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$d_1^- \geq 0$$

مدل (۸) فرم برنامه‌ریزی آرمانی مدل (۱) است. اگر x^* جواب بهینه مدل (۸) باشد آنگاه می‌توان به کمک (۲) کارایی هزینه DMU_0 را محاسبه نمود.

۳- بهبود کارایی هزینه با افزایش خروجی‌ها

اکنون مساله تحلیل پوششی داده‌های معکوس را بر کارایی هزینه واحد تحت ارزیابی به صورت زیر مطرح می‌کنیم. در واقع می‌خواهیم میزان تغییرات ورودی‌های واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی را با افزایش خروجی‌ها تخمین بزنیم به طوری که کارایی هزینه واحد تحت ارزیابی بهبود یابد. به عبارتی با آشفته نمودن بردار خروجی‌ها میزان آشفته‌گی بردار ورودی‌ها را با حفظ مقدار کارایی هزینه محاسبه می‌کنیم. اگر خروجی واحد تحت ارزیابی DMU_0 از y_0 به $y_0 + \Delta y_0$ تغییر کند ($y_0 + \Delta y_0 > 0$) به طوری که کارایی هزینه آن ثابت بماند یا بهتر شود، ورودی آن چقدر است؟ برای پاسخ به پرسش فوق فرض می‌کنیم برای واحد تحت ارزیابی DMU_0 خروجی از y_0 به $y_0 + \Delta y_0$ تغییر کند ($y_0 + \Delta y_0 > 0$) و ورودی از x_0 به $x_0 + \Delta x_0$ تغییر کند به طوری که

$\left(\begin{smallmatrix} x_o + \Delta x_o \\ y_o + \Delta y_o \end{smallmatrix} \right) > \cdot$ باشد. با جایگزین کردن بردار $\left(\begin{smallmatrix} x_o + \Delta x_o \\ y_o + \Delta y_o \end{smallmatrix} \right)$ به جای $\left(\begin{smallmatrix} x_o \\ y_o \end{smallmatrix} \right)$ در مدل کارایی هزینه (۱) که مقدار $y_o + \Delta y_o > \cdot$ معلوم است و کارایی هزینه را محاسبه می‌کنیم. در این راستا DMU_o از مجموعه مشاهدات را حذف می‌کنیم و بجای آن از یک DMU_o جدید که بردار ورودی آن $x_o + \Delta x_o > \cdot$ مجهول است و بردار خروجی آن مقدار $y_o + \Delta y_o > \cdot$ معلوم است جایگزین می‌کنیم.

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^m c_{io} (x_{i.} + \Delta x_{i.})$$

s. t.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} + \lambda_o (x_{io} + \Delta x_{io}) \leq x_{io} + \Delta x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j y_{rj} + \lambda_o (y_{ro} + \Delta y_{ro}) \geq y_{ro} + \Delta y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{i=1}^m c_{io} (x_{i.} + \Delta x_{i.}) \geq z^*$$

$$x_{i.} + \Delta x_{i.} \geq \cdot \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq \cdot \quad j = 1, 2, \dots, n$$

که در آن z^* جواب بهینه‌ی مدل (۱) است. c_{io} قیمت یا هزینه ورودی i ام واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی o ام است و DMU'_o جدید با ورودی‌ها و خروجی‌های جدید $\left(\begin{smallmatrix} x_o + \Delta x_o \\ y_o + \Delta y_o \end{smallmatrix} \right)$ جایگزین با ورودی‌ها و خروجی‌های معلوم $\left(\begin{smallmatrix} x_o \\ y_o \end{smallmatrix} \right)$ شده است. مدل (۹) می‌کوشد ورودی‌های DMU'_o را مینیمم کند و این مدل همواره دارای جواب شدنی است زیرا $\lambda_j = \cdot$ برای $j = 1, 2, \dots, n, j \neq o$ و $\lambda_o = 1$ جواب شدنی نامساوی‌های

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} + \lambda_o (x_{io} + \Delta x_{io}) \leq x_{io} + \Delta x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

است و تساوی $x_{io} + \Delta x_{io} = x_{io} + \Delta x_{io}$ برقرار است و بطور مشابه در نامساوی

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j y_{rj} + \lambda_o (y_{ro} + \Delta y_{ro}) \geq y_{ro} + \Delta y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

صدق می‌کند و تساوی $y_{ro} + \Delta y_{ro} = y_{ro} + \Delta y_{ro}$ برقرار است. مدل (۹) دارای یک محدودیت نامساوی $\sum_{i=1}^m c_{io} (x_{i.} + \Delta x_{i.}) \geq z^*$ بیشتر از مدل (۱) دارد که این محدودیت بهبود دهنده مقدار کارایی هزینه DMU'_o نسبت به DMU_o است و این نامساوی همواره شدنی است چون $\lambda_j = \cdot$ برای $j = 1, 2, \dots, n, j \neq o$ و $\lambda_o = 1$ جواب شدنی مدل (۱) نیز می‌باشد.

$\lambda_j = \cdot$ برای $j = 1, 2, \dots, n, j \neq o$ و $\lambda_o = 1$ یک جواب شدنی مدل (۹) خواهد بود. بنابراین در بهینه‌گی $(1 - \lambda_o) \neq \cdot$ است. مدل (۹) غیرخطی است که به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^m c_{io} (x_{i.} + \Delta x_{i.})$$

s. t.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \lambda_o)(x_{io} + \Delta x_{io}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 - \lambda_o)(y_{ro} + \Delta y_{ro}) \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^m c_{io}(x_{i.} + \Delta x_{i.}) \geq z^*$$

$$x_{i.} + \Delta x_{i.} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

لم ۱- در قیود (۱۰) و (۱۱) مقدار $1 - \lambda_o$ نامنفی است ($(1 - \lambda_o) \geq 0$)

اثبات: اگر $(1 - \lambda_o) < 0$ باشد آنگاه قید (۱۰) نشدنی است زیرا $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} \geq 0$ مجموع حاصل ضرب

$\lambda_j x_{ij} \geq 0$ می‌باشد که $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} \geq 0$ خواهد بود حال اگر $(1 - \lambda_o) < 0$ باشد

$(x_{io} + \Delta x_{io}) \leq 0$ خواهد بود که قید (۱۰) نشدنی است. بنابراین $(1 - \lambda_o) \geq 0$ است.

لذا $(1 - \lambda_o) > 0$ است سپس طرفین نامعادلات (۱۰) و (۱۱) بر $1 - \lambda_o$ تقسیم نموده و داریم

$$\min z = \sum_{i=1}^m c_{io}(x_{i.} + \Delta x_{i.})$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_o} x_{ij} \leq x_{io} + \Delta x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_o} y_{rj} \geq y_{ro} + \Delta y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{i=1}^m c_{io}(x_{i.} + \Delta x_{i.}) \geq z^*$$

$$x_{i.} + \Delta x_{i.} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

اکنون با تغییر متغیر $\lambda'_j = \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_o} \geq 0$ برای $j = 1, 2, \dots, n$ و $j \neq o$ داریم:

$$\min z = \sum_{i=1}^m c_{io}(x_{i.} + \Delta x_{i.})$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda'_j x_{ij} \leq x_{io} + \Delta x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda'_j y_{rj} \geq y_{ro} + \Delta y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{i=1}^m c_{io} (x_{i.} + \Delta x_{i.}) \geq z^*$$

$$x_{i.} + \Delta x_{i.} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda'_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0$$

با ساده کردن و باز نویسی مدل (۱۳)، مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را خواهیم داشت: (برای سهولت از λ_j به جای λ'_j و $j = 1, 2, \dots, n$ و $j \neq 0$ و تغییر متغیر $x_i = \Delta x_{io} + x_{io}$ برای $i = 1, 2, \dots, m$ استفاده می‌کنیم) داریم:

$$\min z = \sum_{i=1}^m c_{io} x_i$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - x_i \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} + \Delta y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{i=1}^m c_{io} x_i \geq z^*$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0$$

با اضافه کردن متغیرهای انحراف از آرمان به مدل (۱۴) مدل برنامه‌ریزی آرمانی به صورت زیر می‌باشد:

$$\min z = d_1^- + \sum_{i=1}^m d_i^+ + \sum_{r=1}^s d_o^-$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^m c_{io} x_i - d_1^+ + d_1^-$$

$$= \sum_{i=1}^m c_{io} x_i^* \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - x_i - di_i^+ + di_i^- = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - do_r^+ + do_r^- = y_{ro} + \Delta y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$do_r^+ \geq 0, do_r^- \geq 0 \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$di_i^+ \geq 0, di_i^- \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$d_1^+ \geq 0, d_1^- \geq 0$$

که در آن x_i^* جواب بهینه مدل (۱) می‌باشد. در مدل (۱۴) قید نامساوی $\sum_{i=1}^m c_{io} x_i \geq Z^*$ داریم که برای حفظ و بهبود کارایی هزینه واحد تحت ارزیابی می‌باشد که در آن Z^* مقدار بهینه تابع هدف مدل (۱)، یک آرمان برای هدف مدل (۱۴) است. تابع هدف مدل (۱۴) به صورت محدودیت جدید به همراه متغیر انحراف و مقدار بهینه مورد نظر دوباره فرمول‌بندی می‌شود، از این‌رو با اضافه کردن متغیرهای انحراف از آرمان به مدل (۱۴) مدل برنامه‌ریزی آرمانی (۱۵) به دست می‌آید.

۴- مثال عددی و مثال کاربردی

۴-۱- مثال عددی

جدول شماره ۱ شامل ده واحد تصمیم‌گیری با دو ورودی X_{1old} و X_{2old} و قیمت‌های (هزینه‌های) هر ورودی C_1 و C_2 و یک خروجی Y را در نظر بگیرید.

جدول ۱. مجموعه داده‌ها برای ۱۰ تا واحد تصمیم‌گیرنده						
DMU _i	ورودی‌ها		هزینه یک واحد ورودی		خروجی‌ها	کارایی هزینه
	X_{1old}	X_{2old}	C_1	C_2	Y	
DMU _۱	۶	۳	۸	۹	۱,۰۰۰	۰,۲۷۴۳
DMU _۲	۹	۸	۳	۵	۷,۰۰۰	۰,۹۰۵۵
DMU _۳	۴	۷	۶	۹	۳,۰۰۰	۰,۵۸۶۲
DMU _۴	۴	۳	۷	۳	۲,۰۰۰	۰,۶۷۱۸
DMU _۵	۵	۶	۹	۱۰	۱,۰۰۰	۰,۲۱۹۰
DMU _۶	۷	۱	۱۰	۴	۳,۰۰۰	۰,۷۰۶۶
DMU _۷	۹	۴	۶	۲	۲,۰۰۰	۰,۳۲۲۶
DMU _۸	۱	۹	۲	۳	۲,۰۰۰	۰,۳۹۰۸
DMU _۹	۸	۲	۲	۷	۱,۰۰۰	۰,۲۳۳۳
DMU _{۱۰}	۱۰	۳	۳	۵	۲,۸۰۰	۰,۵۳۹۳

جدول ۲. نتایج				
DMU _i	ورودی‌های جدید		خروجی‌های جدید	کارایی هزینه جدید
	X_{1new}^*	X_{2new}^*	Y_{new}	
DMU _۱	۲,۵۷۱۴	۲,۲۸۵۷	۲,۰۰۰۰	۰,۵۴۴۲
DMU _۲	۱۷,۵۰۰۰	۲,۵۰۰۰	۷,۵۰۰۰	۱,۰۰۰۰
DMU _۳	۹,۳۳۳۳	۱,۳۳۳۳	۴,۰۰۰۰	۰,۸۰۳۶
DMU _۴	۳,۸۵۷۱	۳,۴۲۸۶	۳,۰۰۰۰	۰,۹۹۶۲
DMU _۵	۲,۵۷۱۴	۲,۲۸۵۷	۲,۰۰۰۰	۰,۵۶۶۸
DMU _۶	۶,۴۲۸۶	۵,۷۱۴۳	۵,۰۰۰۰	۰,۹۰۰۰
DMU _۷	۵,۱۴۲۹	۴,۵۷۱۴	۴,۰۰۰۰	۰,۷۵۰۰
DMU _۸	۷,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۳,۰۰۰۰	۰,۷۱۴۳
DMU _۹	۳,۹۶۶۷	۰,۵۶۶۷	۱,۷۰۰۰	۰,۶۳۰۳
DMU _{۱۰}	۷,۲۳۳۳	۱,۰۳۳۳	۳,۱۰۰۰	۰,۹۶۷۷

در جدول شماره ۱، ستون آخر کارایی هزینه بر اساس مدل (۱) و (۲) برای هریک از واحدهای تصمیم‌گیری محاسبه و بیان شده است.

در جدول شماره ۲ با در نظر گرفتن خروجی‌های جدید Y_{new} برای هر واحد تصمیم‌گیری و به کارگیری مدل (۱۵) ورودی‌های جدید تخمین زده شده و سپس کارایی هزینه هریک از DMUها با ورودی‌ها و خروجی‌های جدید مجدد با مدل (۱) و (۲) محاسبه شده است.

در جدول ۱ کارایی هزینه ۱۰ تا DMU دارای دو ورودی و یک خروجی محاسبه شد سپس برای هر DMU خروجی جدید (Y_{new}) در مجموعه DMUها جایگزین خروجی (Y) شد که توانستیم با پیشنهاد مدل (۱۵) ورودی‌های (X_{1new}^* و X_{2new}^*) را برآورد کنیم به طوری که کارایی هزینه بهبود بیابد. و در جدول ۲، کارایی هزینه با ورودی‌های برآورد شده و خروجی‌های جدید مشاهده می‌شود. در مثال کارایی هزینه تمامی DMUها بعد از افزایش خروجی‌ها و محاسبه ورودی‌ها با روش پیشنهادی بهبود یافته‌اند. به عنوان مثال می‌توان به DMU_{10} اشاره نمود که با افزایش ۱۰ درصدی خروجی آن از $Y = 2.8$ به $Y_{new} = 3.1$ منجر به کاهش ۶۵ درصدی $X_2 = 3$ به $X_{2new}^* = 1.0333$ و کاهش ۲۷ درصدی $X_1 = 10$ به $X_{1new}^* = 7.2333$ و افزایش ۷۹,۴۳ درصدی کارایی هزینه از ۰,۵۳۹۳ به ۰,۹۶۷۷ گردید.

۴-۲- مثال کاربردی از یک شرکت خودروسازی

در ادامه، داده‌های یک شرکت خودروسازی ترکیه که هردو ماشین سواری و وسیله نقلیه سبک تجاری را تولید می‌کند [۱۸]، در نظر گرفته شده و عملکرد مدل پیشنهادی جدید برای بهبود کارایی هزینه با افزایش خروجی‌ها بررسی می‌شود. شرکت در سال ۲۰۱۰، ۲۸,۵ درصد کل خودروها را با ۳۱۲۰۰۰ واحد تولید کرد و به عنوان بزرگترین تولیدکننده وسایل نقلیه تجاری در ترکیه شناخته شد. این شرکت ترکیه‌ای یکی از پیشگامان صنعت خودروی این کشور است، که محصولات خود را در سال ۲۰۱۱ به ۸۰ کشور صادر نمود و سهم کل صادرات صنعت خودرو با ۱۸۰۶۹۸ واحد در سطح ۲۲,۸ درصد بود. این شرکت مطمئناً به این آگاهی و بینش رسیده است که موفقیت

درازمدت بدون همکاری با ذینفعان امکان‌پذیر نیست. این شرکت به طور مرتب رضایت مشتری، توزیع کننده و تامین کننده را اندازه گیری می‌کند و همیشه علاقه‌مند افزایش رضایت و همکاری است. در این پژوهش DMU ‌ها نمایندگی‌های فروش در این شرکت خودروسازی است. ($n = 73$) همان‌طور که در جدول ۳ نمایش داده می‌شود، این مجموعه اطلاعات شامل هفت ورودی با هزینه یا قیمت مشخص و پنج خروجی است و عوامل ورودی و خروجی به صورت زیر معرفی می‌شوند:

ورودی ۱: (x_1) تعداد شعب.

ورودی ۲: (x_2) تعداد کل وسایل نقلیه نمایشگاه (شامل شعبه).

ورودی ۳: (x_3) تعداد کل وسایل نقلیه آزمایشی.

ورودی ۴: (x_4) تعداد کل مشاور فروش.

ورودی ۵: (x_5) تعداد کل کارکنان فروشندگان.

ورودی ۶: (x_6) تعداد نمایشگاه‌ها و فعالیت‌های ارائه شده توسط فروشندگان.

ورودی ۷: (x_7) تعداد پخش تبلیغات توسط چند رسانه ای.

خروجی ۱: (y_1) تعداد وسایل نقلیه فروخته شده.

خروجی ۲: (y_2) مقدار رضایت متوسط برای همه فروشندگان تعیین شده توسط کل مشتریان.

خروجی ۳: (y_3) تأیید خدمات فروشندگان پس از فروش (در لیره ترکیه TL).

خروجی ۴: (y_4) : تأیید اعتبار از طریق موسسه مالی برای مشتری وام گرفته شده است. (TL)

خروجی ۵: (y_5) تأیید فروش فروشنده بر روی قطعات یدکی. (TL)

p_i قیمت یا هزینه ورودی x_i برای $i = 1, \dots, n$ در جدول ۴ است. می‌خواهیم مقدار ورودی‌های DMU ‌ها را طوری تخمین بزنیم که خروجی‌های y_2 و y_3 و y_4 به میزان ۱۰ درصد افزایش یابند و کارایی هزینه DMU ‌ها بدتر نشود. مدل (۱۵) محاسبه شده و نتایج در جدول ۵ ارائه می‌شود.

جدول ۳. توصیف آماری ۷۳ نمایندگی فروش شرکت خودروسازی ترکیه‌ای												
Vendors	ورودی‌ها							خروجی‌ها				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
کمترین مقدار	۱	۳	۱	۳	۱۳	۱۰	۲۱	۳۷	۶۵	۱۸.۷۹۸	۲۸.۰۵ ۰۰	۶۳.۰۹ ۶
بیشترین مقدار	۶	۳۱	۲۵	۲۱	۱۰۷	۸۰	۳۴۰	۵.۹۲ ۳	۹۲	۸.۳۰۸۰ ۵۲۷	۱۳.۱۸ ۶.۳۵۸	۳۴.۲۵ ۹.۶۲۱
میانگین داده‌ها	۲	۱۳	۶	۸	۴۲	۳۴	۹۰	۱.۱۳ ۳	۸۶	۲.۵۱۲۰ ۸۹۲	۳.۰۷۴۰ ۶۱۰	۵.۰۴۳۰ ۱۷۳
انحراف معیار	۰/۹۴ ۷۰۹	۵/۴۰ ۱۸۸ ۲	۳/۹۲ ۰۷۲ ۹	۴/۵۵ ۳۱۴ ۱	۱۷/۵ ۳۱۹ ۳	۱۵/ ۱۹۱ ۰۵	۵۹/۱ ۴۶۵۹	۱۰۰ ۹/۲۱ ۷	۸/۷۹ ۴۷۱ ۱	۱۶۸۱۷ ۹۰	۲۵۵۷ ۹۹۴/۸	۶۹۹۰ ۵۲۲/۹

جدول ۴. توصیف آماری قیمت یا هزینه ورودی‌های $(X_1, \dots, X_7)$ نمایندگی فروش شرکت خودروسازی ترکیه‌ای							
Vendors	توصیف آماری قیمت یا هزینه ورودی‌ها						
	P _۱	p _۲	p _۳	p _۴	p _۵	p _۶	p _۷
کمترین مقدار	۱.۸۵۹.۴۸۶	۳۳۴.۲۹۳	۳۸۳.۱۷۸	۱۲۸.۶۷۴	۱۰۵.۶۴۲	۲۵۳.۵۷۰	۳۰۱.۶۲۱
بیشترین مقدار	۲۷.۲۰۶.۰۰۶	۷.۶۷۱.۳۹۷	۵.۵۹۰.۶۴۲	۱.۰۸۷.۹۸۲	۱.۰۹۹.۰۷۲	۵۳۷.۹۲۴	۶۴۸.۶۴۸
میانگین داده‌ها	۱۵.۲۲۴.۱۹۸	۳.۷۳۸.۶۱۰	۲.۸۹۴.۳۰۴	۶۰۷.۴۲۱	۵۸۲.۹۳۶	۳۹۵.۲۸۸	۴۵۵.۷۴۰
انحراف معیار	۷۸۰۷۶۳۲/۲	۲۱۸۴۳۷۴	۱۴۷۸۴۸۶	۲۷۶۷۹۱/۳	۲۹۴۹۶۱/۶	۸۳۸۸۳/۰۸	۱۰۶۳۴۹/۶

جدول ۵. نتایج									
	X _۱ _{new}	X _۲ _{new}	X _۳ _{new}	X _۴ _{new}	X _۵ _{new}	X _۷ _{new}	X _۷ _{new}	Z _{old}	Z _{new}
Vendor ۱	۱,۴۶	۷,۴۸	۳,۳۶	۶,۱۸	۳۲,۲۰	۳۱,۲۹	۶۲,۳۲	۰,۹۹۹۷	۰,۹۹۹۷
Vendor ۲	۱,۲۲	۷,۲۴	۳,۲۶	۵,۸۴	۲۹,۲۴	۲۶,۶۹	۴۹,۳۴	۰,۹۹۹۵	۰,۹۹۹۷
Vendor ۳	۱,۲۲	۶,۹۷	۴,۷۶	۵,۸۲	۲۵,۳۶	۲۶,۸۷	۴۹,۱۴	۰,۹۹۹۵	۰,۹۹۹۸
Vendor ۴	۱,۴۹	۱۳,۳۴	۷,۶۰	۱۳,۰۳	۵۴,۷۰	۳۹,۵۸	۱۰۶,۶۳	۰,۹۹۹۲	۰,۹۹۹۲
Vendor ۵	۱,۲۲	۷,۰۴	۵,۲۶	۷,۶۸	۲۵,۹۰	۳۱,۰۰	۶۱,۰۴	۰,۹۹۸۹	۰,۹۹۹۸
Vendor ۶	۳,۹۱	۱۴,۹۸	۱۰,۶۴	۲۴,۶۶	۴۶,۴۶	۴۲,۷۸	۹۹,۳۰	۰,۹۹۹۹	۱,۰۰۰۰
Vendor ۷	۲,۲۳	۱۶,۳۸	۱۰,۱۷	۲۰,۸۷	۵۷,۵۴	۶۳,۵۱	۱۶۹,۸۷	۰,۹۹۹۵	۰,۹۹۹۸
Vendor ۸	۱,۲۶	۱۰,۹۸	۴,۳۱	۱۰,۹۴	۴۹,۴۰	۲۷,۸۴	۷۰,۷۴	۰,۹۹۹۰	۰,۹۹۹۰
Vendor ۹	۰,۷۵	۹,۴۰	۸,۳۷	۱۱,۸۹	۵۱,۶۶	۳۶,۵۴	۹۸,۶۶	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۱۰	۰,۵۹	۹,۹۳	۱۰,۰۰	۸,۸۷	۴۵,۱۱	۴۲,۴۷	۱۴۹,۱۴	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۱۱	۲,۴۰	۱۵,۵۸	۹,۳۴	۲۱,۸۳	۵۵,۵۵	۵۴,۴۳	۱۰۷,۶۱	۰,۹۹۹۲	۰,۹۹۹۲
Vendor ۱۲	۲,۸۹	۹,۷۴	۵,۷۳	۱۸,۹۰	۳۳,۰۱	۳۳,۵۷	۷۰,۷۹	۰,۹۹۹۹	۰,۹۹۹۹
Vendor ۱۳	۱,۸۸	۱۲,۳۴	۵,۸۰	۱۱,۳۶	۴۸,۴۷	۳۶,۶۵	۹۳,۵۷	۰,۹۹۹۳	۰,۹۹۹۴
Vendor ۱۴	۰,۷۷	۳,۳۰	۶,۶۰	۵,۵۰	۱۴,۳۰	۲۶,۴۰	۴۱,۸۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۱۵	۱,۳۷	۸,۸۱	۵,۶۷	۱۵,۰۹	۳۰,۲۸	۲۷,۷۵	۵۴,۴۱	۰,۹۹۹۷	۰,۹۹۹۷
Vendor ۱۶	۰,۹۷	۸,۱۶	۴,۴۱	۴,۷۶	۲۶,۲۷	۳۰,۶۷	۶۵,۰۷	۰,۹۹۷۴	۱,۰۰۰۰
Vendor ۱۷	۰,۷۷	۵,۵۰	۱,۱۰	۴,۴۰	۲۳,۱۰	۲۶,۴۰	۳۵,۲۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰

Vendor ۱۸	۲,۱۹	۲۲,۹۴	۱۴,۴۰	۲۲,۰۰	۸۶,۰۴	۷۱,۷۷	۲۰۰,۲۹	۰,۹۹۶۴	۰,۹۹۹۲
Vendor ۱۹	۰,۰۸	۱۶,۸۳	۷,۹۳	۱۳,۹۵	۶۳,۰۲	۸۰,۵۵	۲۶۴,۷۱	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۲۰	۲,۵۰	۲۰,۴۶	۱۰,۷۶	۲۲,۵۸	۷۳,۳۰	۶۰,۵۹	۱۶۷,۲۰	۰,۹۹۹۷	۰,۹۹۹۷
Vendor ۲۱	۱,۴۷	۱۴,۶۸	۵,۷۳	۱۴,۱۰	۵۶,۹۰	۵۴,۵۸	۱۶۱,۹۳	۰,۹۹۹۱	۰,۹۹۹۸
Vendor ۲۲	۳,۶۰	۱۲,۹۶	۶,۰۳	۹,۴۷	۳۶,۸۶	۳۳,۷۵	۶۸,۲۶	۰,۹۹۹۴	۰,۹۹۹۴
Vendor ۲۳	۱,۷۹	۱۱,۶۵	۵,۸۰	۹,۳۰	۴۶,۰۹	۴۲,۱۷	۱۳۹,۱۲	۰,۹۹۹۸	۰,۹۹۹۹
Vendor ۲۴	۲,۲۱	۱۱,۳۴	۶,۰۲	۸,۵۴	۴۳,۹۵	۳۶,۱۸	۸۶,۴۶	۰,۹۹۸۱	۰,۹۹۸۳
Vendor ۲۵	۳,۰۶	۵,۷۷	۴,۴۹	۷,۶۲	۵۹,۸۰	۳۸,۲۶	۹۹,۷۸	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۲۶	۱,۰۹	۱۰,۹۸	۹,۳۶	۲۱,۶۷	۳۵,۳۸	۳۰,۲۶	۳۷,۱۳	۰,۹۹۹۹	۰,۹۹۹۹
Vendor ۲۷	۱,۶۳	۱۰,۴۶	۵,۹۰	۸,۴۲	۳۸,۸۰	۳۳,۵۷	۷۸,۷۵	۰,۹۹۸۴	۰,۹۹۸۹
Vendor ۲۸	۱,۹۸	۱۱,۹۳	۷,۱۵	۹,۴۳	۴۶,۱۸	۳۸,۳۹	۹۵,۷۱	۰,۹۹۸۴	۰,۹۹۸۷
Vendor ۲۹	۱,۷۳	۱۴,۷۴	۵,۹۷	۱۰,۵۷	۳۸,۴۰	۳۱,۲۶	۶۷,۶۰	۰,۹۹۹۹	۰,۹۹۹۹
Vendor ۳۰	۵,۵۷	۲۳,۲۵	۱۳,۳۱	۲۱,۵۷	۹۴,۷۹	۷۴,۷۰	۱۹۴,۳۲	۰,۹۹۹۶	۰,۹۹۹۶
Vendor ۳۱	۱,۵۷	۷,۹۶	۶,۶۱	۷,۲۸	۳۶,۸۸	۳۰,۳۱	۶۱,۸۱	۰,۹۹۹۹	۰,۹۹۹۹
Vendor ۳۲	۱,۵۸	۸,۷۹	۴,۳۹	۹,۸۶	۲۶,۲۸	۲۵,۶۸	۵۴,۷۱	۰,۹۹۹۹	۰,۹۹۹۹
Vendor ۳۳	۱,۱۲	۵,۷۹	۱,۹۴	۴,۷۲	۲۵,۰۳	۲۵,۸۹	۴۱,۳۲	۰,۹۹۹۱	۰,۹۹۹۴
Vendor ۳۴	۲,۹۸	۲۳,۱۰	۲۵,۹۶	۲۳,۵۵	۹۹,۲۴	۶۸,۹۱	۱۳۵,۰۲	۰,۹۹۹۷	۰,۹۹۹۷
Vendor ۳۵	۱,۱۰	۸,۹۶	۸,۸۰	۱۷,۶۰	۶۴,۹۰	۳۸,۵۰	۱۰۵,۶۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۳۶	۱,۸۷	۱۳,۴۶	۵,۸۸	۱۲,۲۶	۴۸,۶۵	۳۴,۲۱	۸۴,۰۷	۰,۹۹۸۷	۱,۰۰۰۰
Vendor ۳۷	۱,۵۸	۱۱,۰۳	۶,۰۲	۱۰,۳۶	۳۴,۴۷	۴۰,۵۶	۹۵,۱۹	۰,۹۹۹۹	۰,۹۹۹۹
Vendor ۳۸	۰,۹۵	۵,۳۳	۱,۱۴	۴,۲۵	۲۲,۱۷	۲۵,۴۸	۳۴,۹۰	۰,۹۹۹۶	۱,۰۰۰۰
Vendor ۳۹	۱,۳۷	۷,۶۶	۵,۳۶	۷,۸۸	۲۸,۴۳	۲۹,۷۴	۵۲,۶۹	۰,۹۹۹۷	۰,۹۹۹۸
Vendor ۴۰	۰,۷۷	۸,۴۱	۴,۳۵	۳,۶۴	۲۴,۵۲	۲۴,۸۷	۳۶,۴۱	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰

Vendor ۴۱	۲,۵۵	۱۱,۵۵	۶,۷۰	۱۰,۴۵	۶۰,۴۴	۳۹,۹۶	۹۵,۴۷	۰,۹۹۹۲	۰,۹۹۹۲
Vendor ۴۲	۱,۲۶	۷,۹۴	۵,۵۰	۶,۸۳	۲۷,۶۵	۳۴,۹۰	۸۲,۲۹	۰,۹۹۸۳	۰,۹۹۹۹
Vendor ۴۳	۱,۷۳	۱۳,۹۵	۶,۷۱	۱۱,۸۷	۵۳,۸۹	۴۳,۲۰	۱۲۰,۳۲	۰,۹۹۹۲	۰,۹۹۹۲
Vendor ۴۴	۰,۳۴	۶,۵۱	۲,۵۷	۵,۰۱	۲۳,۲۷	۲۸,۹۴	۵۶,۷۶	۰,۹۹۹۸	۱,۰۰۰۰
Vendor ۴۵	۰,۶۴	۶,۰۱	۳,۴۹	۵,۲۵	۲۲,۲۸	۲۲,۰۷	۴۴,۷۷	۰,۹۹۹۶	۱,۰۰۰۰
Vendor ۴۶	۱,۳۹	۹,۷۴	۵,۵۸	۶,۵۵	۳۱,۲۷	۲۷,۶۵	۵۸,۵۲	۰,۹۹۹۴	۰,۹۹۹۴
Vendor ۴۷	۱,۴۸	۱۱,۰۹	۵,۸۲	۱۰,۴۶	۴۶,۸۶	۳۶,۳۵	۹۵,۲۴	۰,۹۹۹۸	۰,۹۹۹۹
Vendor ۴۸	۱,۴۲	۱۴,۰۷	۷,۰۶	۱۲,۸۴	۴۹,۱۳	۴۸,۳۶	۱۲۴,۷۳	۰,۹۹۹۰	۰,۹۹۹۲
Vendor ۴۹	۰,۰۰	۱۶,۶۹	۶,۶۰	۱۵,۴۰	۵۵,۰۰	۶۸,۲۰	۱۸۴,۸۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۵۰	۱,۴۷	۱۴,۵۳	۶,۰۳	۱۲,۷۰	۴۹,۶۱	۵۰,۶۷	۱۴۸,۱۴	۰,۹۹۹۲	۰,۹۹۹۲
Vendor ۵۱	۲,۰۷	۱۶,۶۶	۸,۷۳	۳۱,۱۳	۵۳,۰۶	۵۲,۰۵	۱۰۴,۴۶	۰,۹۹۹۷	۰,۹۹۹۷
Vendor ۵۲	۱,۶۱	۱۸,۷۸	۷,۱۱	۱۷,۹۷	۶۱,۲۶	۶۴,۹۸	۱۷۸,۵۸	۰,۹۹۹۶	۰,۹۹۹۶
Vendor ۵۳	۰,۷۰	۲۳,۱۰	۵,۵۰	۱۷,۶۰	۶۲,۷۰	۴۵,۱۰	۱۵۹,۵۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۵۴	۱,۶۹	۱۰,۳۶	۷,۴۷	۹,۳۶	۳۹,۶۶	۴۰,۰۸	۱۰۱,۳۵	۰,۹۹۷۶	۰,۹۹۸۴
Vendor ۵۵	۰,۱۹	۱۶,۸۶	۵,۸۷	۲۱,۶۵	۷۴,۲۶	۶۱,۲۷	۱۹۸,۸۴	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۵۶	۰,۸۲	۱۵,۳۰	۶,۶۱	۱۳,۶۲	۴۸,۶۳	۶۳,۴۲	۳۴۱,۴۷	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۵۷	۲,۰۴	۱۳,۴۷	۷,۴۶	۸,۷۰	۴۳,۳۹	۳۶,۰۴	۸۵,۹۶	۰,۹۹۸۴	۰,۹۹۸۶
Vendor ۵۸	۱,۸۲	۵,۵۰	۵,۶۹	۶,۰۳	۲۶,۴۴	۲۷,۶۵	۴۸,۴۲	۰,۹۹۹۷	۱,۰۰۰۰
Vendor ۵۹	۲,۰۳	۱۱,۳۸	۶,۱۹	۸,۳۶	۴۶,۶۵	۳۹,۱۶	۹۴,۴۸	۰,۹۹۹۳	۰,۹۹۹۴
Vendor ۶۰	۱,۶۳	۶,۷۲	۳,۲۰	۵,۶۳	۳۲,۶۷	۲۸,۶۹	۵۴,۰۴	۰,۹۹۹۲	۰,۹۹۹۶
Vendor ۶۱	۰,۰۰	۱۶,۹۱	۴,۴۰	۲۳,۱۰	۸۲,۵۰	۵۱,۷۰	۲۳۲,۱۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۶۲	۱,۶۳	۸,۶۶	۶,۴۱	۷,۴۸	۳۴,۲۴	۳۳,۳۱	۷۴,۵۰	۰,۹۹۹۹	۰,۹۹۹۹
Vendor ۶۳	۰,۷۷	۹,۹۰	۳,۳۰	۱۱,۰۰	۴۹,۵۰	۲۰,۹۰	۵۲,۸۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰

Vendor ۶۴	۰,۱۶	۵,۵۰	۵,۵۰	۵,۵۰	۱۷,۶۰	۱۲,۱۰	۳۹,۶۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۶۵	۱,۶۸	۱۲,۸۳	۷,۰۵	۲۰,۴۳	۴۰,۸۷	۳۳,۶۳	۷۵,۳۵	۰,۹۹۹۹	۰,۹۹۹۹
Vendor ۶۶	۲,۰۸	۱۴,۵۸	۷,۲۸	۱۱,۷۲	۴۷,۱۷	۴۵,۷۸	۱۰۶,۵۵	۰,۹۹۹۵	۰,۹۹۹۶
Vendor ۶۷	۱,۳۵	۷,۵۲	۳,۷۸	۶,۰۵	۲۸,۶۷	۲۶,۷۲	۵۱,۹۷	۰,۹۹۸۹	۰,۹۹۹۱
Vendor ۶۸	۲,۲۱	۱۴,۵۸	۸,۵۱	۱۰,۲۶	۵۱,۹۵	۴۲,۵۵	۱۰۶,۶۵	۰,۹۹۹۴	۰,۹۹۹۴
Vendor ۶۹	۱,۳۳	۹,۹۳	۴,۱۷	۶,۶۴	۳۰,۴۴	۲۹,۹۷	۵۹,۸۷	۰,۹۹۹۰	۰,۹۹۹۰
Vendor ۷۰	۱,۴۵	۱۱,۴۲	۶,۵۳	۹,۱۵	۴۰,۵۵	۳۲,۷۳	۷۹,۹۱	۰,۹۹۹۹	۱,۰۰۰۰
Vendor ۷۱	۱,۳۹	۷,۲۱	۵,۸۶	۶,۵۸	۲۹,۲۱	۲۸,۷۳	۶۰,۸۹	۰,۹۹۸۹	۰,۹۹۹۰
Vendor ۷۲	۰,۶۶	۷,۷۰	۴,۴۰	۵,۵۰	۲۴,۲۰	۳۳,۰۰	۷۹,۲۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
Vendor ۷۳	۱,۶۴	۱۲,۷۸	۸,۵۸	۱۱,۸۷	۴۲,۸۲	۳۸,۹۷	۷۸,۹۸	۰,۹۹۹۹	۰,۹۹۹۷
کمترین	۰	۳,۳	۱,۱	۳,۶۴	۱۴,۳	۱۲,۱	۳۴,۹	۰,۹۹۶۴	۰,۹۹۸۳
بیشترین	۵,۵۷	۲۳,۲۵	۲۵,۹۶	۳۱,۱۳	۹۹,۲۴	۸۰,۵۵	۳۴۱,۴۷	۱	۱
میانگین	۱,۵۵۳۶ ۹۹	۱۱,۵۸۰ ۵۵	۶,۵۱۱۵ ۰۷	۱۱,۶۵۶ ۵۸	۴۳,۹۲۴ ۲۵	۳۹,۲۲۵ ۳۴	۹۸,۹۶۰۵ ۵	۰,۹۹۹۴ ۲۷	۰,۹۹۹۶ ۴۴
انحراف معیار	۰,۹۰۰۸ ۱۲	۴,۶۰۴۹ ۷	۳,۳۰۸۸ ۴۲	۶,۱۴۰۹ ۰۶	۱۷,۵۸۲ ۱۱	۱۴,۰۳۱ ۶۹	۵۷,۵۰۸۲ ۳	۰,۰۰۰۶ ۸۳	۰,۰۰۰۴ ۲۳

در هنگام تغییر خروجی‌ها و محاسبه ورودی‌های جدید، حفظ کارایی هزینه واحد تحت ارزیابی دارای اهمیت بالایی است. که این امر با افزایش ده درصدی بعضی از خروجی‌ها و محاسبه مقادیر ورودی‌های جدید برای هر یک از DMU های تحت ارزیابی گردید. که در این فرآیند به کمک حل مدل برنامه‌ریزی خطی تک هدفه مدل ۱۵ کارایی هزینه DMU های تحت ارزیابی نسبت به قبل تغییرات حفظ و حتی بهبود یافته‌اند. در جدول شماره ۵ Z_{old} کارایی هزینه را با در نظر گرفتن ورودی‌ها و خروجی‌های جدول شماره ۳ نشان می‌دهد که از مدل (۲) به دست آمده است و دارای مینیمم ۰,۹۹۶۴ و میانگین ۰,۹۹۹۴۲۰۸۳۳ و واریانس $۱۰^{-۷} \times ۰.۶۶۶۴۷$ است و ورودی‌های جدید بعد از افزایش ۱۰ درصدی خروجی‌های y_2 و y_3 و y_4 با مدل (۱۵) برآورد شده و Z_{new} کارایی هزینه داده‌های جدید با استفاده از مدل (۲) محاسبه شده است و دارای مینیمم ۰,۹۹۸۳ و میانگین ۰,۹۹۹۶۴۳۸۳۶ و واریانس $۱۰^{-۷} \times ۱.۷۹۱۷۴$ است. به وضوح مشاهده می‌شود میانگین کارایی هزینه افزایش و واریانس آن کاهش یافته است و این بیانگر افزایش و همگون‌تر شدن کارایی هزینه DMU ها بعد از افزایش ۱۰ درصدی خروجی‌های و محاسبه ورودی‌های جدید است و از طرفی دیگر در این مثال بعد از اعمال تغییرات کارایی هزینه ۴۲ تا از DMU ها بدون تغییر و مابقی بهبود یافته‌اند. یعنی کارایی هزینه بیش از ۵۷ درصد DMU ها ثابت باقی مانده و مابقی بهبود یافته‌اند.

۵- نتیجه‌گیری

هدف از این تحقیق ارائه‌ی دیدگاهی در زمینه بکارگیری روش تحلیل پوششی داده‌های معکوس به کمک برنامه‌ریزی آرمانی بوده است. برآورد ورودی‌ها با تغییر در مقدار خروجی‌ها و بهبود کارایی هزینه DMUها بسیار پیچیده و حساس است. در این مقاله با تغییر مقدار برخی یا همه خروجی‌ها به‌طوری‌که منجر به حفظ یا بهبود کارایی هزینه شود یک رویکرد و روش جدید در محاسبه مقدار ورودی‌های DMU تحت ارزیابی ارائه شد. با توجه به مطالب بیان شده با تغییر مقدار خروجی‌های واحد تحت ارزیابی، در هر صورت می‌توان ورودی‌ها را طوری برآورد نمود که کارایی هزینه آن حفظ یا بهبود یابد. با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های معکوس و به کمک برنامه‌ریزی آرمانی یک مدل جدید برای تخمین ورودی‌ها با حفظ یا بهبود کارایی هزینه ارائه گردید و توانستیم به این پرسش پاسخ دهیم: "تحت حفظ یا بهبود کارایی هزینه، وقتی که برخی یا همه خروجی‌های یک DMU افزایش داده می‌شود ورودی‌های آن DMU چه میزانی می‌باشد؟"

برای بررسی صحت مدل یک مثال عددی و یک مطالعه موردی در یک شرکت خودروسازی ترکیه مورد بررسی قرار گرفت. هدف یافتن مقدار ورودی‌های جدید با افزایش مقادیر بعضی از خروجی‌ها است به طوری که کارایی هزینه DMU تحت ارزیابی حفظ یا بهبود یابد. نتایج مدل پیشنهادی در شرکت خودروسازی ترکیه‌ای نشان می‌دهد که کارایی هزینه بیش از ۵۷ درصد DMUها ثابت باقی مانده و مابقی نیز بهبود یافته‌اند. توصیه می‌شود در پژوهش‌های آتی از ترکیب روش‌های فراابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک و PSO و غیره به همراه مدل مذکور استفاده شود. همچنین پیشنهاد می‌شود که روش مذکور را برای حالت DEA شبکه‌ای تعمیم داد.

فهرست منابع

۱. Cooper, W., Seiford, L.M. and Tone, K. (۲۰۰۰) Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. ۲۰۰۷, Boston: Kluwer Academic Publishers.
۲. Charnes, A., W.W. Cooper, and E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, ۱۹۷۸. ۲(۶): p. ۴۲۹-۴۴۴.
۳. Banker, R.D., A. Charnes, and W.W. Cooper, Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, ۱۹۸۴. ۳۰(۹): p. ۱۰۷۸-۱۰۹۲.
۴. Zhang, X.S. and J.C. Cui, A project evaluation system in the state economic information system of china an operations research practice in public sectors. *International Transactions in Operational Research*, ۱۹۹۹. ۶(۵): p. ۴۴۱-۴۵۲.
۵. Wei, Q., J. Zhang, and X. Zhang, An inverse DEA model for inputs/outputs estimate. *European Journal of Operational Research*, ۲۰۰۰. ۱۲۱(۱): p. ۱۵۱-۱۶۳.
۶. Yan, H., Q. Wei, and G. Hao, DEA models for resource reallocation and production input/output estimation. *European Journal of Operational Research*, ۲۰۰۲. ۱۳۶(۱): p. ۱۹-۳۱.
۷. Hadi-Vencheh, A., A.A. Foroughi, and M. Soleimani-damaneh, A DEA model for resource allocation. *Economic Modelling*, ۲۰۰۸. ۲۵(۵): p. ۹۸۳-۹۹۳.
۸. Lertworasirikul, S., P. Charnsathikul, and S.-C. Fang, Inverse data envelopment analysis model to preserve relative efficiency values: The case of variable returns to scale. *Computers & Industrial Engineering*, ۲۰۱۱. ۶۱(۴): p. ۱۰۱۷-۱۰۲۳.
۹. Farrell, M.J., The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, ۱۹۵۷. ۱۲۰(۳): p. ۲۵۳-۲۹۰.
۱۰. Fare, R., Grosskopf, S., Lovell C.A.K. The measurement of efficiency of production, Dordrecht MA: Kluwer Academic Publisher; (۱۹۸۵).
۱۱. Fukuyama, H. and W.L. Weber, Estimating output allocative efficiency and productivity change: Application to Japanese banks. *European Journal of Operational Research*, ۲۰۰۲. ۱۳۷(۱): p. ۱۷۷-۱۹۰.
۱۲. Lin, M.-I., Y.-D. Lee, and T.-N. Ho, Applying integrated DEA/AHP to evaluate the economic performance of local governments in China. *European Journal of Operational Research*, ۲۰۱۱. ۲۰۹(۲): p. ۱۲۹-۱۴۰.
۱۳. Banihashem, S., M. Sanei, and Z.M. Manesh, Cost, revenue and profit efficiency in supply chain. *African Journal of Business Management*, ۲۰۱۳. ۷(۴۱): p. ۴۲۸۰.

۱۴. Khodabakhshi, M. and K. Aryavash, The fair allocation of common fixed cost or revenue using DEA concept. *Annals of Operations Research*, ۲۰۱۴. ۲۱۴(۱): p. ۱۸۷-۱۹۴.

۱۵. Mozaffari, M., et al., Cost and revenue efficiency in DEA-R models. *Computers & Industrial Engineering*, ۲۰۱۴. ۷۸: p. ۱۸۸-۱۹۴.

۱۶. Sahoo, B.K., M. Mehdiloozad, and K. Tone, Cost, revenue and profit efficiency measurement in DEA: A directional distance function approach. *European Journal of Operational Research*, ۲۰۱۴. ۲۳۷(۳): p. ۹۲۱-۹۳۱.

۱۷. Fang, L. and H. Li, Centralized resource allocation based on the cost-revenue analysis. *Computers & Industrial Engineering*, ۲۰۱۵. ۸۵: p. ۳۹۵-۴۰۱.

۱۸. Aparicio, J., et al., Measuring and decomposing firm's revenue and cost efficiency: The Russell measures revisited. *International Journal of Production Economics*, ۲۰۱۵. ۱۶۵: p. ۱۹-۲۸.

۱۹. Toloo, M. and T. Ertay, The most cost efficient automotive vendor with price uncertainty: A new DEA approach. *Measurement*, ۲۰۱۴. ۵۲: p. ۱۳۵-۱۴۴.

۲۰. Kornbluth J. "Analysing policy effectiveness using cone restricted data envelopment analysis", *Journal of the Operational Research Society*. ۱۹۹۱. ۴۲: p. ۱۰۹۷-۱۱۰۴

۲۱. Charnes, A., W.W. Cooper "Management Models and Industrial Applications of Linear Programming", New York, John Wiley & Sons. ۱۹۶۱

۲۲. Ghiyasi, M, "Inverse DEA based on cost and revenue efficiency", *Computers & Industrial Engineering*. ۲۰۱۷, ۱۱۴: p. ۲۵۸-۲۶۳

۲۳. Soleimani-Chamkhorami, K., Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G. R., & Rostamy-Malkhalifeh, M, "Preserving cost and revenue efficiency through inverse data envelopment analysis models", *INFOR: Information Systems and Operational Research*. ۲۰۲۰, ۵۸(۴), ۵۶۱-۵۷۸.

۲۴. Gholam R. Amin . , Mustapha Ibn Boamah., 'A new inverse DEA cost efficiency model for estimating potential merger gains: a case of Canadian banks', *Annals of Operations Research*. ۲۰۲۰ volume ۲۹۵, pages ۲۱-۳۶.