دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و ششم، مهر و آبان ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

ساختار توپولوژیک فضای تقریب تعمیم یافته وابسته به یک رابطه n–تایی

سیدبابا حسینی *

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، واحد ساری، دانشگاه آزاد اسلامی، ساری، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۱/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۲/۲۸

چکیده

نظریه کلاسیک مجموعه‌های نادقیق نخستین بار بوسیله پائولاک در [6] معرفی و تعریف شد. اساس این تئوری روی یک رابطه دوتایی هم ارزی و کلاس‌های هم ارزی مرتبط با آن است. در این مقاله، رابطه n–تایی انعکاسی، متقارن، قویا متقارن، شبه متعدی و n– تایی هم ارزی تعریف می‌شود. روش توپولوژیک مجموعه نادقیق بررسی و رابطه بین فضای توپولوژیک القا شده بوسیله یک رابطه n– تایی و مجموعه نادقیق مورد مطالعه قرار می‌گیرد. تعریف جدیدی از توپولوژی نادقیق روی فضای تقریب با استفاده از مجموعه نادقیق تعمیم یافته در فضای تقریب تعمیم یافته معرفی می‌شود. سپس یک توپولوژی نادقیق روی فضای تقریب تعمیم یافته وابسته به یک رابطه n - تایی قویا تحمل‌پذیر و شبه متعدی، بیان و تعریف می‌گردد. در پایان، خواص شبه گسستگی، همبندی، فشردگی، متریک‌پذیری و جدایی‌پذیری در این فضا به اثبات می‌رسد.

واژه‌های کلیدی: مجموعه نادقیق تعمیم یافته، فضای تقریب، توپولوژی نادقیق، رابطه قویا تحمل‌پذیر.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: sbhosseini39@gmail.com

۱- مقدمه

نظریه مجموعه‌های نادقیق در سال ۱۹۸۲ نخستین بار توسط ریاضی دان لهستانی طی مقاله‌ای در [6] ارائه شده بود. او یک رابطه هم ارزی R را روی مجموعه ناتهی U در نظر گرفت و زوج (U,R) را یک فضای تقریب نامید. بنیان نظریه مجموعه نادقیق برحسب دوعملگر بنام‌های تقریب پایینی و بالایی یک زیر مجموعه A از U پایه‌گذاری شده است. تقریب پایین زیر مجموعه A اجتماع کلاس‌های هم ارزی مشمول در A است و تقریب بالایی، اجتماع کلاس‌های هم ارزی است که با A اشتراک ناتهی دارند. تقریب پایین A را با $\underline{R}(A)$ و تقریب بالای آن را با $\overline{R}(A)$ نشان می‌دهیم. برای یک فضای تقریب (U,R) یک زوج (A,B) از زیر مجموعه‌های U را مجموعه نادقیق می‌نامند هرگاه برای یک زیر مجموعه X از U، داشته باشیم $(A,B) = (\underline{R}(X),\overline{R}(X))$ و $\underline{R}(X) \neq \overline{R}(X)$ اگر برای یک زیر مجموعه X از U داشته باشیم $\underline{R}(X) = \overline{R}(X)$، آنگاه X را مجموعه دقیق یا تعریف‌پذیر می نامند. اگر $X \subseteq U$ و P پیش فرضی باشد که X با این پیش فرض مشخص شده باشد، در این صورت:

۱. $x \in \underline{R}(X)$ به این معنی است که x مطمعناً خاصیت P را دارد.
۲. $x \in \overline{R}(X)$ به این معنی است که x احتمالاً خاصیت P را دارد.
۳. $x \in U\setminus\overline{R}(X)$ به این معنی است که x مطمعناً خاصیت P را ندارد.

مجموعه نادقیق، ابزاری برای توسعه مجموعه‌های کلاسیک و روشی برای کاهش داده‌ها و مطالعه سیستم‌هایی که شامل داده‌های ناکافی و ناقص و هوشمند دارند، بوده و در این راستا نقش موثری ایفا می‌کند. یکی از کاربردهای مجموعه نادقیق، ارتباط آن با فضای توپولوژیک است. در سال‌های اخیر محققان زیادی ارتباط بین فضای تقریب و توپولوژی ساخته شده بوسیله رابطه دوتایی را مطالعه کرده و قضایا و نتایج جالبی را از این رابطه بدست آوردند. بی‌تردید این مسئله از اهمیت عمیق نظری و کاربردی برخوردار است. توپولوژی یک شاخه مهم ریاضیات است که دارای چارچوب نظری مستقل، پس زمینه و گسترده است. بعضی محققان به عنوان مثال، کاندو ثابت نمودند که هر رابطه بازتابی در یک مجموعه می‌تواند یک توپولوژی را القا کند که در این توپولوژی می‌توان شرط فشردگی، جدایی‌پذیری، همبندی و شبه گسستگی را بیان و اثبات کرد [4]. برای مطالعه بیشتر در ارتباط با مجموعه‌های نادقیق تعمیم یافته و فضای تقریب و توپولوژی القا شده بوسیله رابطه دوتایی انعکاسی و متعدی، می‌توان به مقالات [3, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] مراجعه نمود.

در این مقاله در تعمیم نتایج بدست آمده، بجای استفاده از یک رابطه دوتایی، یک رابطه $\boldsymbol{n}-$ تایی روی مجموعه مرجع را در نظر گرفته و خواص انعکاسی، متقارن بودن، قویا متقارن بودن و n -متعدی بودن رابطه - $\boldsymbol{n}$ تایی را تعریف کرده و مثال‌هایی از آن ارائه می‌گردد و فضای تقریب متناظر با این رابطه معرفی می‌شود و توپولوژی نادقیق در این فضای تقریب تعریف شده است و قضایا و نتایج بدست آمده بیان و اثبات می‌گردد. بخش دوم را که عمدتاً از [6, 7, 8, 9] اخذشده است، اشاره به مجموعه نادقیق داشته و تقریب بالا و پایین یک زیر مجموعه را تعریف و روابط بدست آمده، بیان می‌گردد. بخش سوم اختصاص به رابطه‌های $\boldsymbol{n}-$ تایی داشته و خواص آن مورد بررسی قرار می‌گیرد و بالاخره در بخش چهارم و نتیجه، به تعریف توپولوژی القا شده بوسیله رابطه $\boldsymbol{n}-$تایی اشاره می‌شود و قضایای اصلی به اثبات می‌رسد.

۲- فضای تقریب و مجموعه نادقیق

فرض کنید U یک مجموعه ناتهی و $R \subseteq U \times U$ یک رابطه هم ارزی باشد. می‌دانیم هر رابطه هم ارزی روی یک مجموعه، آن را به زیر مجموعه ناتهی جدا از هم افراز می‌کند. حال اگر $x \in U$ عضو دلخواه باشد، کلاس هم ارزی شامل آن را با $[x]_R$ نشان می‌دهیم. همچنین اگر $A \subseteq U$، تقریب پایین و بالای آن را به ترتیب با $\underline{R}(A)$ و $\overline{R}(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{R}(A) = \{ x \mid [x]_R \subseteq A \},$$

$\overline{R}(A) = \{ x \mid [x]_R \cap A \neq \emptyset \}.$

همان گونه که در بخش مقدمه اشاره گردید، اگر $\underline{R}(A) = \overline{R}(A)$، آنگاه A را **مجموعه دقیق** یا **تعریف‌پذیر** می‌نامند وگر نه A را **مجموعه نادقیق** می‌نامند.

گزاره ۲.۱. فرض کنید U یک مجموعه ناتهی و $R \subseteq U \times U$ یک رابطه هم ارزی باشد و $A, B \subseteq U$، آنگاه

1. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(B),\ \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B)$.
2. $\underline{R}(A) \subseteq A,\ A \subseteq \overline{R}(A)$.
3. $\overline{R}(A) \cup \overline{R}(B) = \overline{R}(A \cup B)$, $\underline{R}(A) \cap \underline{R}(B) = \underline{R}(A \cap B)$.
4. $\underline{R}\left(\underline{R}(A)\right) = \underline{R}(A) = \overline{R}\left(\underline{R}(A)\right)$, $\overline{R}\left(\overline{R}(A)\right) = \overline{R}(A) = \underline{R}\left(\overline{R}(A)\right)$.
5. $\overline{R}(A) \cap \overline{R}(B) \subseteq \overline{R}(A \cap B)$, $\underline{R}(A) \cup \underline{R}(B) \supseteq \underline{R}(A \cup B)$.
6. $\underline{R}([x]_R) = [x]_R = \overline{R}([x]_R)$

برهان. به [6] مراجعه شود.

اکنون فرض کنید $\tau_R = \left\{ A \mid \underline{R}(A) = A \right\}$ با توجه به گزاره قبل،

(الف) $U, \emptyset \in \tau_R$.

(ب) برای هر $\alpha \in \Lambda$ و $A_\alpha \in \tau_R$، داریم $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau_R$.

(پ) اگر $A,\ B \in \tau_R$، آنگاه $A \cap B \in \tau_R$.

با توجه به تعریف توپولوژی عمومی در [2] و گزاره بالا، (U, τ_R) یک توپولوژی است. این توپولوژی را **توپولوژی فضای تقریب** یا **توپولوژی نادقیق** القائی از رابطه هم ارزی R می‌نامند. می‌توان نشان داد که $B_R = \{[x]_R \mid x \in U\}$ پایه این توپولوژی است .

تعریف ۲.۲. توپولوژی τ در U را **شبه گسسته** می‌نامند هرگاه هر مجموعه باز آن بسته و هر مجموعه بسته آن باز باشد.

واضح است که توپولوژی گسسته، شبه گسسته است. ولی عکس آن برقرار نیست.

تعریف ۲.۳. فرض کنید U مجموعه ناتهی باشد. آنگاه $d : U \times U \to [0, \infty)$ تابع شبه متر روی U می‌نامند هرگاه برای هر $x, y, z \in U$ ، داشته باشیم

1. $d(x,x) = 0$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$,
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

برای هر $x \in U$ و $A \subseteq U$، و $r > 0$ قرار دهید

$B(x,r) = \{ y \in U \mid d(x,y) < r\}$,

$d(x,A) = inf\{ d(x,y) \mid y \in A\}$.

فضای توپولوژیک U را **شبه متریک‌پذیر** می نامند هرگاه یک تابع شبه متر چون d روی U تعریف شود بطوری که $B(x,r)$ پایه این فضا باشند.

مثال ۲.۴. فرض کنید (U, τ_R) فضای توپولوژیک نادقیق باشد. در نظر بگیرید:

$d : U \times U \to [0, \quad \infty)$

برای هر $x, y \in U$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & [x]_R = [y]_R \\ 1, & [x]_R \neq [y]_R. \end{cases}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که d یک تابع شبه متر است و برای هر $x \in U, r > 0$

$$B(x,y) = \begin{cases} [x]_R, & r \leq 1 \\ U, & r > 1. \end{cases}$$

قضیه ۲.۵. فرض کنید U یک مجموعه ناتهی و $R \subseteq U \times U$ یک رابطه هم ارزی باشد. همچنین فرض کنید τ_R توپولوژی القایی این رابطه هم ارزی باشد. در این صورت

(الف) توپولوژی τ_Rشبه گسسته است.

(ب) برای هر $x \in U$، $[x]_R$ فشرده است.

(پ) (U, τ_R) همبند موضعی است.
(ت) (U, τ_R) موضعاً جدایی‌پذیر است.
(ث) (U, τ_R) فضای منتظم است.
(ج) (U, τ_R) فضای نرمال است.
(چ) (U, τ_R) شبه متریک‌پذیر است.

برهان. برهان ساده است و می‌توان این برهان را در [3] مشاهده نمود.

۳- رابطه های $n-$ تایی و خواص آنها

در این بخش بعضی نتایج اساسی در باره رابطه $\boldsymbol{n}-$تایی را مورد مطالعه قرار می دهیم. فرض کنید U یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت هر زیر مجموعه از $U^n = U \times U \times \cdots \times U$

را یک رابطه $n-$ تایی روی U می‌نامند.

تعریف ۳.۱. رابطه $n-$ تایی R روی U را

۱. انعکاسی می‌نامند هرگاه برای هر $x \in U$، داشته باشیم $(x, x, x, \dots, x) \in R$.

۲. $n-$ متعدی می‌نامند هر گاه اگر $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R$ و $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in R$ و برای یک $1 < i_\circ \le n$ و $1 \le j_\circ < n$ داشته باشیم $i_\circ > j_\circ$ و $x_{i_\circ} = y_{j_\circ}$، آنگاه برای هر $1 \le k < n$ هر $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k < i_\circ$ و $j_\circ < j_1 < j_2 < \cdots \le n$ داشته باشیم $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \in R$.

۳. متقارن است هرگاه اگر $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R$، آنگاه $(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) \in R$.

۴. قویا متقارن است هر گاه اگر $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R$ آنگاه، برای هر جایگشت $\sigma \in S_n$ داشته باشیم
$$(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in R$$

۵. پیش ترتیب $\boldsymbol{n}-$ تایی است اگر انعکاسی و n- متعدی باشد.

۶. تحمل‌پذیر می‌نامند هرگاه انعکاسی و قویا متقارن باشد.

۷. $\boldsymbol{n}-$ هم ارزی است هرگاه انعکاسی و قویا متقارن و $\boldsymbol{n}-$متعدی باشد.

مثال ۳.۲. (۱) برای n = 2 ، یک رابطه۲- تایی متعدی است اگر و تنها اگر متعدی در حالت معمول باشد و 2 - هم ارزی است اگر و تنها اگر هم ارزی در حالت معمول باشد.

(۲) فرض کنید $n = 3$ دراین صورت رابطه ۳-تایی R، ۳- متعدی است اگر وفقط اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) اگر
$$(x, y, z) \in R,\ (y, u, v) \in R \Rightarrow (x, u, v) \in R.$$
ب) اگر
$$(x, y, z) \in R,\ (z, u, v) \in R \Rightarrow (x, u, v), (y, u, v), (x, y, u), (x, y, v) \in R.$$
پ) اگر
$$(x, y, z) \in R,\ (u, z, v) \in R \Rightarrow (x, y, v) \in R.$$

مثال ۳.۳. فرض کنید $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و $R = \{(a_i, a_i, \dots, a_i) | 1 \le i \le n\}$، آنگاه R را رابطه قطری می‌نامند. واضح است که رابطه$\boldsymbol{n}-$ Rتایی هم ارزی است [1].

مثال ۳.۴. فرض کنید $U = \boldsymbol{C}$ مجموعه اعداد مختلط باشد و رابطه n-تایی R را بصورت زیر در نظر بگیرید:
$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| = |x_3| = \cdots = |x_n|$$

آنگاه R یک رابطه $\boldsymbol{n}-$ هم ارزی است.

مثال ۳.۵. فرض کنید $U = \boldsymbol{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد و رابطه $\boldsymbol{n}-$تایی R را بصورت زیر در نظر بگیرید:
$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R$$
آنگاه R یک رابطه$\boldsymbol{n}-$ تایی متعدی است ولی انعکاسی و متقارن قوی نیست.

مثال ۳.۶. فرض کنید $U=\{1,2,3\}$ و $R=\{(1,1,1),(1,1,3),(3,3,3),(2,2,2),(1,3,3)\}$ آنگاه R، ۳- پیش ترتیب است ولی ۳- هم ارزی نیست زیرا متقارن قوی نیست. توجه داشته باشید که $(1,3,3)\in R$ ولی $(3,1,3)\notin R$.

تعریف ۳.۷. فرض کنید R یک رابطه $n-$ تایی روی U باشد. برای هر $x\in U$ و $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ و $k\in\{1,2,\cdots,n-(i-1)\}$، تعریف می‌کنیم

$$(1)\quad L_i(x)=\{y\in U\mid \exists u_1,\cdots,u_{n-2}\in U: (y,u_1,\cdots,u_{i-1},x,u_i,\cdots,u_{n-2})\in R \ or (u_1,\cdots,u_k,y,u_{k+1},\cdots,u_{k+i-1},x,u_{k+i},\cdots,u_{n-2})\in R\}.$$

و

$$(2)\quad R_i(x)=\{y\in U\mid \exists u_1,\cdots,u_{n-2}\in U : (x,u_1,\cdots,u_{i-1},y,u_i,\cdots,u_{n-2})\in R \ or (u_1,\cdots,u_k,x,u_{k+1},\cdots,u_{k+i-1},y,u_{k+i},\cdots,u_{n-2})\in R\}.$$

تعریف ۳.۸. اگر R رابطه-n تایی روی مجموعه ناتهیU باشد و $A\subseteq U$ ، آنگاه تقریب بالای چپ A را با$\overline{R_l}(A)$ نشان می دهیم که درآن

$$\overline{R_l}(A)=\{x\in U \mid \exists i\in\{1,2,\cdots n-\}: L_i(x)\cap A\neq\emptyset\}.$$

و تقریب پایین چپ A را با $\underline{R_l}(A)$ نشان می‌دهیم که در آن

$$\underline{R_l}(A)=\{x\in U\mid \exists i\in\{1,2,\cdots,n-1\}: \underline{L_i}(x)\subseteq A\}.$$

متشابها تقریب بالای راست A را با $\overline{R_r}(A)$ می‌دهیم که درآن

$$\overline{R_r}(A)=\{x\in U \mid \exists i\in\{1,2,\cdots n-\}: R_i(x)\cap A\neq\phi\}.$$

و تقریب پایین راست A را با $\underline{R_l}(A)$ نشان می‌دهیم که در آن

$$\underline{R_r}(A)=\{x\in U\mid \exists i\in\{1,2,\cdots,n-1\}: R_i(x)\subseteq A\}.$$

مثال ۳.۹. فرض کنید $U=\{1,2,\cdots,7\}$ و $R\subset U\times U\times U$ بطوری که

$$R=\{(1,1,1),(2,2,2),\cdots,(7,7,7),(1,1,2),(1,3,3),(2,2,1),(5,4,5),(6,7,7),(7,6,7),(6,6,7),(4,4,5)\}.$$

حال اگر $A=\{1,3,6\}$، آنگاه

$$\underline{R_r}(A)=\{3\}, \overline{R_r}(A)=\{1,2,3,6,7\}$$
$$\underline{R_l}(A)=\{3,6\}, \overline{R_l}(A)=\{1,2,3,5,6,7\}.$$

لم ۳.۱۰. فرض کنید R یک رابطه $n-$ تایی روی U باشد. گزاره‌های زیر برقرارند:

برای هر

(1) $y\in L_i(x)\Leftrightarrow x\in R_i(y)$ $x,y\in U$ و $i=\{1,2,\cdots,n-1\}$.

(2) $L_i(U)=\bigcup_{x\in U} L_i(x)\neq U$ اگر و فقط اگر $\exists y\in U$ بطوری که $R_i(y)=\emptyset$.

(3) $R_i(U)=\bigcup_{x\in U} R_i(x)\neq U$ اگر و فقط اگر $\exists y\in U$ بطوری که $L_i(y)=\emptyset$.

(4) $x\notin L_i(U)$ اگر و فقط اگر $R_i(x)=\emptyset$.

(5) $x\notin R_i(U)$ اگر و فقط اگر $L_i(x)=\emptyset$.

یک برهان کوتاه برای همه موارد داده شده ارایه می‌شود .

برهان.
$L_i(U)=\bigcup_{x\in U} L_i(x)\neq U$ اگر و فقط اگر $y\in U$ وجود داشته باشد که $y\notin\bigcup_{x\in U} L_i(x)$ اگر و فقط اگر $y\in U$ وجود داشته باشد که برای هر$x\in U$، $y\notin L_i(x)$ به این معنی است که $y\in U$ وجود دارد بطوری که $R_i(y)=\emptyset$.

حال اگر R رابطه دو تایی دلخواه در U باشد، زوج (U,R) فضای تقریب تعمیم یافته می‌نامند. در تعمیم فضای تقریب در [6]، کاندو در [4] ساختار توپولوژیک فضای تعمیم یافته رادر حالی که R فقط رابطه دوتایی انعکاسی باشد، مورد تحقیق قرار داد و قضایا و نتایج مهمی را به اثبات رسانید. اساس مجموعه پائولاک در فضای تقریب کلاس‌های هم ارزی بودند. کاندو به جای کلاس‌های هم ارزی کلاس‌هایی را در نظر گرفت که با

عضو خاصی از مجموعه اصلی از راست یا چپ رابطه دارند. برای این که این مجموعه ناتهی باشد، او فرض کرد که R فقط یک رابطه انعکاسی باشد. در این راستا و در تعمیم نتایج بدست آمده در [4] فضای تقریب تعمیم یافته وابسته به رابطه n تایی روی U رامورد مطالعه قرار می‌دهیم.

لم ۳.۱۱. فرض کنید R *رابطه* $\boldsymbol{n}-$تایی تحمل‌پذیر (انعکاسی و قویا متقارن) روی مجموعه ناتهی U باشد، در این صورت برای هر $i,j \in \{1,2,\cdots n-1\}$ و برای هر $x \in U$،

$$L_i(x) = \{y \in U | \exists u_1,\cdots,u_{n-2} \in U: (y,u_1,\cdots,u_{i-1},x,u_i,\cdots,u_{n-2}) \in R \; or \begin{pmatrix} u_1,\cdots,u_k,y,u_{k+1},\cdots, \\ u_{k+i-1},x,u_{k+i},\cdots,u_{n-2}\end{pmatrix} \in R\} = L_j(x) = R_i(x) = R_j(x).$$

برهان. فرض کنید $y \in L_i(x)$ در این صورت با توجه به تعریف،

$$\exists u_1,\cdots,u_{n-2} \in U: (y,u_1,\cdots,u_{i-1},x,u_i,\cdots,u_{n-2}) \in R \quad or \quad (u_1,\cdots,u_k,y,u_{k+1},\cdots,u_{k+i-1},x,u_{k+i},\cdots,u_{n-2})$$

حال اگر $i < j$ با توجه به این که R قویا متقارن است، می‌توان جایگشت σ از S_n را طوری انتخاب کرد که

$$\begin{pmatrix} y = y_{\sigma(1)},u_{\sigma(2)},\cdots,u_{\sigma(i+2)}, \\ x,u_{\sigma(i+3)},\cdots,u_{\sigma(n)}\end{pmatrix} = (y,u_1\cdots,u_{j-1},x,u_j,\cdots,u_{n-2})$$

یا اگر

$$(u_1,\cdots,u_k,y,u_{k+1},\cdots,u_{k+i-1},x,u_{k+i},\cdots,u_{n-2}) \in R$$

متشابها، می‌توان جایگشت σ از S_n را طوری انتخاب کرد که

$$(u_{\sigma(1)},u_{\sigma(2)},\cdots,u_{\sigma(k)},y = y_{\sigma(k+1)}, \cdots,x = x_{\sigma(k+i)},\cdots,u_{\sigma(n)}) = (u_1\cdots,u_k,y,u_{k+1},\cdots,u_{k+j-1},x,\cdots,u_{n-2})$$

که در هر حال، $y \in L_j(x)$.

متشابها می‌توان تساوی $L_i(x) = R_i(x) = R_j(x)$ را با انتخاب یک σ مناسب از S_n ثابت کرد.

بنابراین با توجه به لم قبل، برای رابطه تحمل‌پذیر n تایی R درU، برای هر $x \in U$، $L_i(x) = R_j(x)$ مستقل از اندیس‌های $i,j \in \{1,2,\cdots n-1\}$ است. از این به بعد آنها را فقط با $L(x)$ نشان خواهیم داد. با توجه به آن نتیجه زیر را خواهیم داشت که نتیجه مستقیم از لم ۳.۱۰ و ۳.۱۱ است.

نتیجه ۳.۱۲. برای رابطه تحمل‌پذیر n- تایی R در U، برای هر $x,y \in U$ گزاره‌های زیر برقرارند:

(1) برای هر $x \in U$، $x \in L(x)$.

(2) $L(U) = \cup_{x\in U} L(x) = U$

(3) $y \in L(x) \Leftrightarrow x \in L(y)$.

تعریف ۳.۱۳. فرض کنید R رابطه $\mathbf{n}-$تایی تحمل پذیر (انعکاسی و قویا متقارن) روی مجموعه ناتهی U باشد و $A \subseteq U$، $\underline{R}(A)$ تقریب پایین A و $\overline{R}(A)$ تقریب بالای A به‌ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\overline{R}(A) = \{x \in U \;|L(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

$$\underline{R}(A) = \{x \in U \;|L(x) \subseteq A\};$$

که در آن

$$L(x) = \{y \in U | \exists u_1,\cdots,u_{n-2} \in U: (y,u_1,\cdots,u_{i-1},x,u_i,\cdots,u_{n-2}) \in R\}.$$

تعریف ۳.۱۴. رابطه$\mathbf{n}-$تایی R روی مجموعه ناتهی U را **شبه متعدی** می‌نامند هر گاه

$$x \in L(y) \wedge y \in L(z) \Rightarrow x \in L(z).$$

در حالتی که $n = 2$ باشد شبه متعدی بودن هم ارز متعدی بودن است ولی در حالت $n > 2$، شبه متعدی بودن، $n-$ متعدی بودن R را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۳.۱۵. *فرض کنید* $U = \{1,2,3\}$ و

$$R = \begin{Bmatrix} (1,1,1),(2,2,2), \\ (3,3,3),(2,3,3),(3,3,2),(3,2,3)\end{Bmatrix}$$

در این صورت R رابطه ۳-تایی متقارن قوی و انعکاسی و شبه متعدی است ولی 3- متعدی نیست زیرا $(2,3,3) \wedge (3,2,3) \in R$ ولی $(2,2,3) \notin R$.

۴- توپولوژی فضای تقریب وابسته به رابطه n- تایی تحمل‌پذیر و شبه متعدی

در این بخش ویژگی‌های توپولوژی القا شده توسط رابطه n–تایی تحمل‌پذیر و شبه متعدی R روی مجموعه ناتهی U را تحقیق می‌کنیم. اکنون فرض کنید. $\tau_R=\{\, A|\ \underline{R}(A)=A\,\}$ با توجه به گزاره بعدی (گزاره ۴.۱) و تعریف توپولوژی عمومی [2]، $(U,\, \tau_R)$ یک توپولوژی است. این توپولوژی را **توپولوژی فضای تقریب** یا **توپولوژی نادقیق** القائی از رابطه n–تایی شبه متعدی وتحمل پذیر R می‌نامند.

گزاره ۴.۱. فرض کنید R رابطه n–تایی شبه متعدی و تحمل‌پذیر روی مجموعه ناتهی U باشد و $A,\, B \subseteq U$، آنگاه

1. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(B),\ \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B).$
2. $\underline{R}(A) \subseteq A \subseteq \overline{R}(A).$
3. $\underline{R}(\{x\}) = \emptyset \vee \{x\};\quad \overline{R}(\{x\}) = L(x);$
4. $\underline{R}(L(x)) = L(x) = \overline{R}(L(x)).$
$\overline{R}(A) \cup \overline{R}(B) = \overline{R}(A \cup B);$
$\underline{R}(A) \cap \underline{R}(B) = \underline{R}(A \cap B).$
5. $\underline{R}\left(\underline{R}(A)\right) = \underline{R}(A) = \overline{R}\left(\underline{R}(A)\right);$
$\overline{R}(\overline{R}(A)) = \overline{R}(A) = \underline{R}(\overline{R}(A)).$
6. $\overline{R}(A) \cap \overline{R}(B) \subseteq \overline{R}(A \cap B);$
$\underline{R}(A) \cup \underline{R}(B) \supseteq \underline{R}(A \cup B).$
7. $\overline{R}(U) = U = \underline{R}(U);\quad \underline{R}(\emptyset) = \emptyset = \overline{R}(\emptyset).$

و $B=\{L(x)\mid x \in U\}$ یک رده از کلاس‌های هم ارزی است.

برهان. (1), (2), (4), (5), (6)و (7) واضح است.

(3) اگر برای یک x ای در U داشته باشیم $L(x) = \{x\}$، آنگاه بدیهی است که $\{x\}=\underline{R}(\{x\})$.

وگرنه $\underline{R}(\{x\})=\emptyset$. برهان تساوی دوم هم مشابه است.

حال اگر $u \in L(x)$، باید نشان دهیم $L(u) \subseteq L(x)$ فرض کنید $y \in L(u)$ دلخواه باشد. در این صورت با توجه به شبه متعدی بودن R و این که

$$y \in L(u) \wedge u \in L(x) \Rightarrow y \in L(x).$$

بنابراین $L(u) \subseteq L(x)$ لذا با توجه به تعریف تقریب پایین، $L(x) \subseteq \underline{R}(L(x))$.

همچنین فرض کنید که $u \in \overline{R}(L(x))$ بنابراین $L(u) \cap L(x) \neq \emptyset$ حال فرض کنید $z \in L(u) \cap L(x)$ در این صورت با توجه به شبه متعدی بودن و نتیجه ۱۲.۳،

$$z \in L(u),\qquad z \in L(x) \Rightarrow u \in L(z),\ z \in L(x)$$

در نتیجه $u \in L(x)$. حال چون $u \in \overline{R}(L(x))$ دلخواه بوده است در نتیجه $\overline{R}(L(x)) \subseteq L(x)$ بنابراین $\overline{R}(L(x)) = L(x)$.

برای اثبات قسمت پایانی، کافی است نشان دهیم که برای هر، $x,y \in U$ یا $L(x) = L(y)$ یا $L(x) \cap Ł(y) = \emptyset$ بدین منظور فرض کنید $z \in L(x) \cap L(y)$. در این صورت باتوجه به شبه متعدی بودن R و نتیجه ۱۲.۳، داریم

$$z \in L(u), z \in L(x) \Rightarrow u \in L(z), z \in L(x) \Rightarrow u \in L(x).$$

حال اگر $u \in L(y)$ دلخواه باشد، آنگاه

$$u \in L(y) \wedge y \in L(z) \wedge z \in L(x) \Rightarrow u \in L(x) \wedge z \in L(x)$$

در نتیجه $z \in L(x)$. بنابراین، $L(y) \subseteq L(x)$ متشابها. $L(x) \subseteq L(y)$ در نتیجه $L(y) = L(x)$.

قضیه۴.۲. فرض کنید R رابطه $\mathbf{n}-$تایی تحمل‌پذیر و شبه متعدی روی مجموعه ناتهی U باشد و $x \in U$ و

$$L(x) = \{y \in U \mid \exists u_1, \cdots, u_{n-2} \in U: (y, u_1, \cdots, u_{i-1}, x, u_i, \cdots, u_{n-2}) \in R\}$$

آنگاه

1. $L(x) \in \tau_R$.
2. $A \in \tau_R \Leftrightarrow A = \bigcup_{L(x)\subseteq A} L(x)$.
3. $L(x)$ فشرده است.
4. $B_R = \{L(x) \mid x \in U\}$.

پایه این توپولوژی است.

برهان.
(۱) طبق گزاره ۱.۴، $\underline{R}(L(x)) = L(x)$، در نتیجه $L(x) \in \tau_R$.
(۲) چون برای هر $x \in U$، $L(x) \in \tau_R$ و طبق تعریف توپولوژی، اجتماع هر تعداد از مجموعه‌های باز، باز است. پس $A \in \tau$ برعکس، اگر $A \in \tau$، طبق تعریف، $\bigcup_{L(x)\subseteq A} L(x) = \underline{R}(A) = A$.
(۳) فرض کنید $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ پوشش بازی برای $L(x)$ باشد. چون $x \in L(x)$، پس یک $\lambda \in \Lambda$ وجود دارد به طوری که $x \in O_\lambda = \bigcup_{L(x)\subseteq O_\lambda} L(x)$ لذا $L(x) \subseteq O_\lambda$. بنابراین $L(x)$ فشرده است.

(۴) طبق نتیجه ۳.۱۲، $U = L(U) = \bigcup_{x\in U} L(x)$
همچنین طبق قسمت (۲)، اگر A باز باشد، $A = \bigcup_{L(x)\subseteq A} L(x)$ لذا B_R پایه این توپولوژی می‌باشد.

لم ۴.۳. فرض کنید R رابطه $\mathbf{n}-$تایی تحمل‌پذیر و شبه متعدی روی مجموعه ناتهی U و $A \subseteq U$ باشد. اگر $\overline{R}(A) = A$، آنگاه A بسته است.

برهان. نشان می‌دهیم متمم A باز است. بدین منظور نشان می‌دهیم که $\underline{R}(A^c) = A^c$ طبق گزاره (۲) ۴.۱ بنابراین کافی است نشان دهیم $\underline{R}(A^c) \subseteq A^c$
فرض $A^c \subseteq \underline{R}(A^c)$ کنید $x \in A^c$ لذا $x \notin A = \overline{R}(A)$ در نتیجه $L(x) \cap A = \emptyset$. بنابراین $L(x) \subseteq A^c$ که با توجه تعریف تقریب پایین، $x \in \underline{R}(A^c)$ پس $A^c \subseteq \underline{R}(A^c)$.
حال اگر A در (U, τ_R) باز باشد. انگاه طبق گزاره ۴.۱(۵)، $\overline{R}(A) = \overline{R}(\underline{R}(A) = \underline{R}(A) = A$ و طبق لم قبل، A بسته است. بنابراین در فضای توپولوژیک تعمیم یافته (U, τ_R)، هر زیرمجموعه باز، بسته است و برعکس. لذا نتیجه زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۴.۴. (U, τ_R) شبه گسسته است.
اکنون فرض کنید (U, τ_R) فضای توپولوژیک نادقیق القایی وابسته به رابطه $\mathbf{n}-$تایی شبه متعدی و تحمل پذیر R روی U باشد. در نظر بگیرید:
$d : U \times U \to [0, \infty)$

برای هر $x, y \in U$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & L(x) = L(y) \\ 1, & L(x) \neq L(y). \end{cases}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که d یک تابع شبه متر است و برای هر $x \in U, r > 0$

$$B(x, y) = \begin{cases} L(x), & r \leq 1 \\ U, & r > 1. \end{cases}$$

نتیجه ۴.۵. فرض کنید R یک رابطه $\mathbf{n}-$تایی تحمل پذیر و شبه متعدی باشد. در این صورت
الف) (U, τ_R) شبه متریک پذیر است.
ب) (U, τ_R) همبند موضعی است.
پ) (U, τ_R) موضعاً جدایی پذیر است.
ت) (U, τ_R) فضای منتظم است.
ث) (U, τ_R) فضای نرمال است.

نتیجه‌گیری
در این مقاله یک رابطه $\boldsymbol{n}-$تایی تحمل‌پذیر و شبه متعدی روی مجموعه ناتهی U تعریف شده است. فضای تقریب تعریف شده در [6] و قضایای اثبات شده در

[4, 10, 15, 16] مورد بازبینی قرار گرفته و تعمیم یافته است. تحقیق آینده می‌تواند این باشد که نتایج و قضایای بیان شده این مقاله را در شرایط ضعیف‌تر برای یک رابطه $\boldsymbol{n}$−تایی بتوان بیان و اثبات کرد.

قدردانی. از داوران و همکاران دانشگاهی در گروه ریاضی واحد ساری که در ارتقا این مقاله نقش ارزنده ایفا کرده‌اند صمیمانه سپاسگزارم.

فهرست منابع

[1] Cristea and M. Stefanescu, *Hypergroup and n- ary relations*, European J. Combin. 31 (2010), no. 3, 780-789

[2] R. Engelking, *General Topology*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[3] Z. Li, *Topological properties of generalized rough sets*, in: 2010 Seventh International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, vol. 5, 2010, pp. 2067–2070.

[4] M. Kondo, *On the structure of generalized rough sets*, Information Science 176 (2006) 589–600.

[5] M. Novotny, *Ternary structures and groupoids*, Czech. Math. J. 41 (116) (1991) 90-98.

[6] Z. Pawlak, *Rough sets*, International Journal of Computing and Information Sciences 11 (1982) 341–356.

[7] Z. Pawlak, *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.

[8] Z. Pawlak, A. Skowron, *Rough sets: some extensions*, Information Sciences 177 (2007) 28–40.

[9] Z. Pawlak, A. Skowron, *Rudiments of rough sets*, Information Sciences 177 (2007) 3–27.

[10] K. Qin, J. Yang, Z. Pei, *Generalized rough sets based on reflexive and transitive relations*, Information Sciences 178 (2008) 4138–4141.

[11] T. K. Sheeja, T. M. Jacob , A. Sunny Kuriakose, *Rough topology on approximation spaces*, International Journal of advanced research in computer science, Vo. 8, No. 9, 2017, 379-384.

[12] Slowinski, D. Vanderpooten, *Similarity relation as a basis for rough approximations*, ICS Research Report 53 (1995) 249–250.

[13] R. Slowinski, D. Vanderpooten, *A generalized definition of rough approximations based on similarity*, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering 12 (2000) 331–336.

[14] Skowron, J. Stepaniuk, *Tolerance approximation spaces*, Fundamenta Informaticae 27 (1996) 245–253.

[15] Zhang, Y. Ouyang, Z. Wang, Note on ‘‘*Generalized rough sets based on reflexive and transitive relations*’’, Information Sciences 179 (2009) 471–473.

[16] W. Zhu, *Generalized rough sets based on relations*, Information Sciences 177 (2007) 4997–5011.

[17] W. Zhu, *Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering*, Information Sciences 179 (2009) 210–225.

[18] W. Zhu, *Topological approaches to covering generalized rough sets*, Information Sciences 177 (2007) 1499–1508.