

توابع حافظ گسترشی روی ماتریس‌های قطعه‌ای

امیرقاسم غضنفری^۱، سمیه ملکی‌نژاد^{۲*}، حمیده محمدزادگان^۳

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

^(۲و۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۳/۰۶/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۱۲/۲۷

چکیده

در دهه‌های اخیر، نامساوی‌های میانگین ماتریسی برای ماتریس‌های مثبت مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است و به دنبال آن، چگونگی این نامساوی‌ها روی ماتریس‌های قطعه‌ای حائز اهمیت است. در این مقاله، ما چندین نامساوی میانگین برای ماتریس‌های قطعه‌ای را به دست آورده‌ایم که برخی از این نامساوی‌ها توسعه‌ای از نتایج بدست آمده توسط بدرانی و همکارانش می‌باشد. به عنوان نمونه، برای یک نگاشت خطی مثبت یکانی Φ ، ماتریس‌های قطعه‌ای A و B ، تابع حقیقی مقدار و حافظ گسترشی f ، و میانگین‌های دلخواه $\sigma_1 \leq \sigma_2$ ، نامساوی مهم زیر را اثبات نمودیم:

$$\mathcal{R}(\Phi(f(A)\sigma_1 f(B))) \leq \sec^{\epsilon}(\alpha) \mathcal{R}(\Phi(f(A))\sigma_2 \Phi(f(B))).$$

این نامساوی برای ماتریس‌های مثبت و میانگین‌های هارمونیک و هندسی به صورت زیر می‌باشد:

$$f(A)!f(B) \leq f(A)\#f(B).$$

از جمله نتایج دیگر مقاله، با شرایط فوق، می‌توان به نامساوی مفید زیر اشاره کرد:

$$\mathcal{R}(f(A)\sigma f(B)) \leq \sec^{\epsilon}(\alpha) \mathcal{R}(f(A\nabla B)).$$

در ادامه، به عنوان کاربردهایی از این نامساوی‌ها، حالت نرمی، دترمینان و مقادیر تکین برای ماتریس‌های قطعه‌ای را بیان و اثبات نموده‌ایم. در پایان نیز مثال‌هایی را برای نشان دادن اهمیت نامساوی‌های اثبات‌شده در مقاله آورده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: تابع ماتریس گسترشی، تابع یکنوای ماتریسی، ماتریس گسترشی، ماتریس قطعه‌ای، میانگین ماتریسی.

۱. مقدمه

فرض کنیم $\mathbb{M}_n$ مجموعه تمام ماتریس‌های مختلط $n \times n$ باشد. هر ماتریس $A \in \mathbb{M}_n$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A = RA + iJA,$$

که در آن $RA = \frac{A+A^*}{2}$ و $JA = \frac{A-A^*}{2i}$. این تجزیه‌ی A به تجزیه‌ی دکارتی معروف می‌باشد که در آن RA و JA به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی A می‌باشند. اگر A خودالحاق باشد، به عبارت دیگر $A = A^*$ ، می‌گوییم A نیمه‌معین مثبت است اگر برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ ، $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ و A را معین مثبت می‌نامیم اگر A نیمه‌معین مثبت و معکوس پذیر باشد. برای ماتریس‌های خودالحاق $A, B \in \mathbb{M}_n$ ، هرگاه $B - A$ نیمه‌معین مثبت باشد، می‌نویسیم: $A \leq B$ یا $B \geq A$.

ماتریس $A \in \mathbb{M}_n$ را گسترشی می‌نامیم هرگاه در تجزیه‌ی دکارتی، $RA \geq 0$.

برد عددی ماتریس $A \in \mathbb{M}_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

واضح است که برد عددی یک زیرمجموعه فشرده و محدب از $\mathbb{C}$ می‌باشد.

هنگامی که درباره ماتریس‌های گسترشی صحبت می‌کنیم، نیاز به توضیحاتی درباره ماتریس‌های قطعه‌ای داریم. یک ماتریس $A \in \mathbb{M}_n$ را قطعه‌ای می‌نامیم اگر $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ثابتی وجود داشته باشد به طوری که $W(A) \subset \mathcal{S}_\alpha$.

در این حالت $\mathcal{S}_\alpha$ ناحیه قطعه‌ای در صفحه مختلط است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{S}_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| \leq (\operatorname{Re} z) \tan \alpha\}.$$

هرگاه $W(A) \subset \mathcal{S}_\alpha$ ، می‌نویسیم $A \in \mathcal{S}_\alpha$. بعلاوه قابل ذکر است که نماد $A \in \mathcal{S}_\alpha$ فقط زمانی قابل تعریف است که $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. به وضوح A نیمه‌معین مثبت است اگر و فقط اگر $W(A) \subset \mathcal{S}$. اگر $W(A), W(B) \subset \mathcal{S}_\alpha$ ، به ازای یک α یکسان که $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه $W(A+B) \subset \mathcal{S}_\alpha$. از آنجایی که $0 \notin \mathcal{S}_\alpha$ ، همه اعضای $\mathcal{S}_\alpha$ وارون پذیر هستند. بعلاوه، اگر $W(A) \subset \mathcal{S}_\alpha$ ، آنگاه به ازای هر ماتریس $n \times m$ غیرصفر X داریم $W(X^*AX) \subset \mathcal{S}_\alpha$ و $W(A^{-1}) \subset \mathcal{S}_\alpha$.

نگاشت خطی $\Phi: \mathbb{M}_n \rightarrow \mathbb{M}_n$ را مثبت می‌نامیم اگر به ازای هر $A \geq 0$ ، داشته باشیم $\Phi(A) \geq 0$. اگر $\Phi(I) = I$ ، که در آن I عملگر همانی است، آنگاه Φ را یکانی می‌نامیم. می‌دانیم اگر Φ یک نگاشت خطی مثبت باشد، آنگاه $\Phi(RA) = R(\Phi(A))$ و $\Phi(JA) = J(\Phi(A))$. با توجه به این مطلب، اگر $W(A) \subset \mathcal{S}_\alpha$ ، آنگاه $W(\Phi(A)) \subset \mathcal{S}_\alpha$. به صورت جزئی‌تر، اگر $A \in \mathcal{S}_\alpha$ ، آنگاه $\Phi(A) \in \mathcal{S}_\alpha$.

تابع $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع یکنوای ماتریسی می‌نامیم اگر حافظ رابطه ترتیبی ماتریسی باشد؛ به عبارت دیگر، برای ماتریس‌های خودالحاق A و B که طیف آن‌ها در بازه J قرار دارد، اگر $A \leq B$ ، آنگاه $f(A) \leq f(B)$. میانگین ماتریسی σ روی عملگرهای معکوس پذیر مثبت، یک عمل دوتایی $A \sigma B$ است با شرایط زیر:

i. اگر $A \leq C$ و $B \leq D$ ، آنگاه

$$A \sigma B \leq C \sigma D.$$

ii. برای هر عملگر C ,

$$C^*(A \sigma B)C = (C^*AC) \sigma (C^*BC).$$

iii. اگر $A_k \downarrow A$ و $B_k \downarrow B$ ، آنگاه $A_k \sigma B_k \downarrow A \sigma B$ ؛ برای هر $A_k, B_k, A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})^+$

$$I \sigma I = I \quad \text{iv}$$

اگر $A, B \in \mathbb{M}_n$ معین مثبت باشند و $\nu \in (0, 1)$ یک عدد حقیقی باشد، میانگین‌های زیر معروفند که به ترتیب به آنها، میانگین حسابی ν -وزن‌دار، میانگین هارمونیک ν -وزن‌دار، میانگین هندسی ν -وزن‌دار و میانگین هارون ν -وزن‌دار دو عملگر A و B می‌گوییم. اگر $\nu = \frac{1}{p}$ ، برای راحتی آنها را به ترتیب با $A \nabla B$ ، $A \# B$ و $A ! B$ نشان می‌دهیم.

$$\begin{aligned} A !_{\nu} B &:= ((1 - \nu)A^{-1} + \nu B^{-1})^{-1} \quad \bullet \\ A \nabla_{\nu} B &:= (1 - \nu)A + \nu B \quad \bullet \\ A \#_{\nu} B &:= A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{\nu}A^{1/2} \quad \bullet \\ F_{\nu}(A, B) &:= (1 - \nu)(A \# B) + \nu(A \nabla B) \quad \bullet \end{aligned}$$

برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی میانگین‌ها به [۱۴] مراجعه نمایید.
میانگین ماتریسی برای دو ماتریس گسترشی $A, B \in \mathbb{M}_n$ توسط بدرانی و همکارانش [۱] به صورت زیر تعریف شده است:

$$A \sigma_f B = \int_0^1 (A ! B) dv_f(s),$$

بعلاوه، آنها تابع یکنوای ماتریسی را برای ماتریس گسترشی $A \in S_{\alpha}$ به صورت زیر تعریف کرده‌اند:

$$f(A) = \int_0^1 ((1 - s)I + sA^{-1})^{-1} dv_f(s),$$

که در آن $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ، $f(1) = 1$ و همچنین ν_f یک اندازه احتمال است. در این مقاله برای راحتی از نماد زیر استفاده خواهیم کرد:

$m := \{f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \mid f(1) = 1\}$.
تابع یکنوای ماتریسی $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را حافظ گسترشی می‌نامیم هرگاه برای هر $A \in S_{\alpha}$ داشته باشیم $f(A) \in S_{\alpha}$. در این مقاله از نماد m_{α} برای توابع حافظ گسترشی استفاده خواهیم کرد:
 $m_{\alpha} := \{f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \mid f \text{ تابع یکنوای ماتریسی و حافظ گسترشی باشد}\}.$

لازم به ذکر است که در حالت $\alpha = 0$ ، تابع حافظ گسترشی f باید از $(0, \infty)$ به $(0, \infty)$ باشد.

سپس بدرانی و همکارانش [۱] نشان دادند که هرگاه $f \in m$ و $A \in S_{\alpha}$ ، آنگاه:

$$f(\mathcal{R}(A)) \leq \mathcal{R}(f(A)) \leq \sec^{\gamma}(\alpha) f(\mathcal{R}(A)). \quad (۱.۱)$$

اخیراً غضنفری و ملکی‌نژاد [۷] توانستند یک تعریف توسعه‌یافته‌ای برای f به دست بیاورند؛ به این صورت که اگر $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع یکنوای ماتریسی و A یک ماتریس گسترشی باشد، آنگاه

$$f(A) = a + bA + \int_a^{\infty} \lambda A(\lambda + A)^{-1} d\mu(\lambda), \quad (۱.۲)$$

که در آن $b \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ و μ یک اندازه مثبت روی نیم صفحه مثبت بسته $[0, \infty)$ می‌باشد بطوریکه $\int \frac{\lambda}{1+\lambda} d\mu(\lambda) < \infty$ ؛ همچنین نامساوی زیر را برای $A \in \mathcal{S}_\alpha$ و f تعریف شده در (۱.۲) به اثبات رساندند:

$$f(\mathcal{R}(A)) \leq \mathcal{R}(f(A)) \leq \sec^2(\alpha) f(\mathcal{R}(A)). \quad (۱.۳)$$

واضح است که نامساوی (۱.۳) یک توسیع از نامساوی (۱.۱) می‌باشد.

در انتهای این بخش، لم‌های مورد نیاز برای اثبات قضیه‌های اصلی را بیان می‌کنیم.

لم بعدی رابطه بین قسمت حقیقی معکوس A و معکوس $\mathcal{R}A$ را در ماتریس‌های قطعه‌ای بیان می‌کند.

لم ۱.۱ ([۹]/[۱۰]) فرض کنیم $A \in \mathcal{S}_\alpha$. در این صورت

$$\mathcal{R}(A^{-1}) \leq \mathcal{R}(A)^{-1} \leq \sec^2(\alpha) \mathcal{R}(A^{-1}).$$

برای میانگین ماتریسی ماتریس‌های گسترشی، نتایج زیر را داریم:

لم ۱.۲ ([۱۱]/[۱]) اگر σ_1 و σ_2 دو میانگین ماتریسی باشند به طوری که $\sigma_1 \leq \sigma_2$ و $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$ ، آنگاه

$$\mathcal{R}(A\sigma_1 B) \leq \sec^2(\alpha) \mathcal{R}(A\sigma_2 B).$$

لم ۱.۳ ([۱]/[۱]) فرض کنیم $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$ و $f \in m$. در این صورت $A\sigma B \in \mathcal{S}_\alpha$

$$\mathcal{R}A\sigma_f \mathcal{R}B \leq \mathcal{R}(A\sigma_f B) \leq \sec^2(\alpha) (\mathcal{R}A\sigma_f \mathcal{R}B).$$

برای مطالعه بیشتر به [۱، ۲، ۶، ۷، ۱۱] مراجعه کنید.

برای $A \in \mathbb{M}_n$ نرم عملگری $\|A\|$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\| = \max\{\langle x^*, Ay \rangle : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1\}.$$

یادآوری می‌کنیم که نرم $\|\cdot\|$ روی $\mathbb{M}_n$ تحت یکانی پایاست اگر برای هر $A \in \mathbb{M}_n$ و برای تمامی ماتریس‌های

یکانی $U, V \in \mathbb{M}_n$ ، داشته باشیم $\|UAV\| = \|A\|$.

بنا به قضیه یکنوایی ویل، اگر $0 \leq A \leq B$ ، آنگاه برای هر $0 \leq j \leq n$

$$0 \leq \lambda_j(A) \leq \lambda_j(B). \quad (۱.۴)$$

بعلاوه بنا به قضیه مغلوب فان برای هر نرم تحت یکانی پایای $\|\cdot\|$ ،

$$\|A\| \leq \|B\|. \quad (۱.۵)$$

در لم زیر به رابطه بین $\|A\|$ و $\|\mathcal{R}A\|$ اشاره شده است.

لم ۱.۴ ([۳]/[۳]) فرض کنیم $A \in \mathcal{S}_\alpha$. در این صورت برای هر نرم تحت یکانی پایای $\|\cdot\|$ روی $\mathbb{M}_n$ ،

$$\|\mathcal{R}A\| \leq \|A\| \leq \sec(\alpha) \|\mathcal{R}A\|.$$

غضنفری و ملکی‌نژاد [۷]، برای $A \in \mathcal{S}_\alpha$ ، تابع یکنوای ماتریسی $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ و نرم $\|\cdot\|$ که تحت

یکانی پایاست نامساوی نرمی زیر را نیز اثبات نموده‌اند:

$$\begin{aligned} f(\|\mathcal{R}A\|) &\leq \|f(\mathcal{R}A)\| \leq \|\mathcal{R}(f(A))\| \\ &\leq \sec^2(\alpha) \|f(\mathcal{R}(A))\| \\ &\leq \sec^2(\alpha) \|I\| f(\|\mathcal{R}A\|). \end{aligned} \quad (۱.۶)$$

در لم زیر نامساوی معروف شوارتز-کادیسون را بیان می‌کنیم:

لم ۱.۵ ([۴]/[۴]) فرض کنیم $A \in \mathbb{M}_n$ مثبت و معکوس‌پذیر باشد، در این صورت برای هر نگاشت خطی مثبت یکانی

Φ

$$\Phi(A)^{-1} \leq \Phi(A^{-1}).$$

همچنین نامساوی مشهور آندو را در لم بعدی معرفی می‌کنیم :

لم ۱.۶/۱۴ اگر Φ یک نگاشت خطی مثبت و یک‌دار، A و B ماتریس‌های معین مثبت و σ میانگین ماتریسی دلخواه باشد، آنگاه

$$\Phi(A\sigma B) \leq \Phi(A)\sigma\Phi(B). \quad (۱.۷)$$

یکی از اهداف این مقاله توسیع برخی از این نامساوی‌ها از حالت توابع یکنوای ماتریسی مثبت به حالت توابع یکنوای ماتریسی حقیقی می‌باشد.

لم ۱.۷/۱۹ اگر $A \in \mathcal{S}_\alpha$ ، آنگاه

$$\det(\mathcal{R}A) \leq |\det(A)| \leq \sec^n(\alpha) \det(\mathcal{R}A).$$

لم ۱.۸/۱۵ اگر $A \in \mathcal{S}_\alpha$ ، آنگاه

$$\lambda_j(\mathcal{R}A) \leq s_j(A) \leq \sec^\gamma(\alpha) \lambda_j(\mathcal{R}A) \quad j = 1, \dots, n,$$

که در آن λ_j و s_j به ترتیب j -مین مقدار ویژه و j -مین مقدار تکین ماتریس A می‌باشند.

۲. نتایج اصلی

هدف اصلی نگارندگان در این بخش این است که برخی از نامساوی‌های مشهوری که برای توابع یکنوای ماتریسی مثبت و ماتریس‌های مثبت و در برخی موارد ماتریس‌های گسترشی به اثبات رسیده است را برای توابع یکنوای ماتریسی حقیقی بدست بیاورند.

بنا به [۱، لم ۲.۱۵] اگر $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های معین مثبت باشند و $f \in m$ ، آنگاه

$$f(A) \# f(B) \leq f(A \nabla B) \quad (۲.۱)$$

در ادامه توسیع نامساوی (۲.۱) برای حالتی که A, B قطعه‌ای باشند را اثبات می‌کنیم. بنا به تعریف (۱.۲)، واضح است که اگر $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع یکنوای ماتریسی باشد، آنگاه f مقعر است و در نهایت

$$f(A \nabla_\nu B) \geq f(A) \nabla_\nu f(B), \quad 0 < \nu < 1. \quad (۲.۲)$$

لازم به ذکر است که نامساوی (۲.۲) برای ماتریس‌های معین مثبت $A, B \in \mathbb{M}_n$ و $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ نیز برقرار است.

قضیه ۲.۱ فرض کنیم $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$ ، Φ یک نگاشت خطی مثبت یکانی، $f \in m_\alpha$ و $\sigma_\gamma \leq \sigma_1$ آنگاه

$$\mathcal{R}(\Phi(f(A)\sigma_\gamma f(B))) \leq \sec^\gamma(\alpha) \mathcal{R}(\Phi(f(A))\sigma_\gamma \Phi(f(B))).$$

اثبات. بنا به لم ۱.۲،

$$\mathcal{R}(f(A)\sigma_\gamma f(B)) \leq \sec^\gamma(\alpha) \mathcal{R}(f(A)\sigma_\gamma f(B)),$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}(\Phi(f(A)\sigma_\gamma f(B))) \leq \sec^\gamma(\alpha) \Phi(\mathcal{R}(f(A)\sigma_\gamma f(B))) \\ & \leq \sec^\gamma(\alpha) \Phi(\mathcal{R}(f(A))\sigma_\gamma \mathcal{R}(f(B))) \\ & = \sec^\gamma(\alpha) (\mathcal{R}(\Phi(f(A)))\sigma_\gamma \mathcal{R}(\Phi(f(B)))) \quad (\text{بنا به لم ۱.۶}) \\ & \leq \sec^\gamma(\alpha) \mathcal{R}(\Phi(f(A))\sigma_\gamma \Phi(f(B))). \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۲.۱ نتایج زیر را داریم :

نتیجه ۲.۲ اگر $f \in m_\alpha$ و $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$ ، آنگاه

$$\mathcal{R}(f(A)!f(B)) \leq \sec^r(\alpha)\mathcal{R}(f(A)\#f(B)).$$

در حالت جزئی‌تر می‌توان گفت اگر A و B ماتریس‌های معین مثبت باشند و $f \in m$ ، آنگاه

$$f(A)!f(B) \leq f(A)\#f(B). \quad (2.3)$$

قضیه ۲.۳ فرض کنیم $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$ و $f \in m_\alpha$ ، در این صورت برای هر میانگین ماتریسی $\sigma \leq \nabla$ ، داریم

$$\mathcal{R}(f(A)\sigma f(B)) \leq \sec^r(\alpha)\mathcal{R}(f(A\nabla B)).$$

اثبات. اگر $f \in m_\alpha$ و $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$ ، آنگاه بنا به خاصیت‌های میانگین داریم

$$\cos^r(\alpha)\mathcal{R}(f(A)\sigma f(B)) \leq \mathcal{R}f(A)\sigma\mathcal{R}f(B) \quad (\text{بنا به لم ۱.۳})$$

$$\leq \sec^r(\alpha)(f(\mathcal{R}A)\sigma f(\mathcal{R}B)) \quad (\text{بنا به لم (۱.۱)})$$

$$\leq \sec^r(\alpha)(f(\mathcal{R}A)\nabla f(\mathcal{R}B))$$

$$\leq \sec^r(\alpha)f(\mathcal{R}A\nabla\mathcal{R}B) \quad (\text{بنا به لم (۲.۲)})$$

$$= \sec^r(\alpha)f(\mathcal{R}(A\nabla B))$$

$$\leq \sec^r(\alpha)\mathcal{R}f(A\nabla B) \quad (\text{بنا به لم ۱.۳}).$$

نتیجه ۲.۴ فرض کنیم $A, B \in \mathbb{M}_n$ معین مثبت باشند و $f \in m_\alpha$ در این صورت برای هر میانگین ماتریسی

$$\sigma \leq \nabla \text{ داریم}$$

$$f(A)\sigma f(B) \leq f(A\nabla B).$$

قضیه ۲.۵ فرض کنیم $f \in m_\alpha$ و $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$. در این صورت

- $\mathcal{R}(f(A)\nabla_\nu f(B)) \leq \sec^r(\alpha)\mathcal{R}(f(A\nabla_\nu B)),$
- $s_j(f(A)\nabla_\nu f(B)) \leq \sec^r(\alpha)s_j(f(A\nabla_\nu B)),$
- $|\det(f(A)\nabla_\nu f(B))| \leq \sec^{rn}(\alpha)|\det(f(A\nabla_\nu B))|,$
- $\|f(A)\nabla_\nu f(B)\| \leq \sec^r(\alpha)\|f(A\nabla_\nu B)\|,$

که در آن $0 < \nu < 1$.

اثبات.

(a) بنا به (۱.۳) و (۲.۲)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(A\nabla_\nu B) &= \mathcal{R}f((1-\nu)A + \nu B) \\ &\geq f(\mathcal{R}((1-\nu)A + \nu B)) \\ &\geq (1-\nu)f(\mathcal{R}A) + \nu f(\mathcal{R}B) \\ &\geq (1-\nu)\cos^r(\alpha)\mathcal{R}(f(A)) + \nu\cos^r(\alpha)\mathcal{R}(f(B)) \\ &= \cos^r(\alpha)((1-\nu)\mathcal{R}(f(A)) + \nu\mathcal{R}(f(B))) \\ &= \cos^r(\alpha)(\mathcal{R}(f(A))\nabla_\nu\mathcal{R}(f(B))) \\ &= \cos^r(\alpha)(\mathcal{R}(f(A)\nabla_\nu f(B))). \end{aligned}$$

(b) بنا به لم ۱.۸، داریم

$$\begin{aligned} s_j(f(A)\nabla_\nu f(B)) &\leq \sec^r(\alpha)\lambda_j(\mathcal{R}(f(A)\nabla_\nu f(B))) \\ &\leq \sec^r(\alpha)\lambda_j(\mathcal{R}(f(A\nabla_\nu B))) \quad (\text{بنا به قسمت (a) و (۱.۴)}) \\ &\leq \sec^r(\alpha)s_j(f(A\nabla_\nu B)). \end{aligned}$$

(c) بنا به لم ۱.۷، داریم

$$\begin{aligned} |det(f(A)\nabla_v f(B))| &\leq \sec^n(\alpha) det(\mathcal{R}(f(A)\nabla_v f(B))) \\ &\leq \sec^{rn}(\alpha) det(\mathcal{R}(f(A\nabla_v B))) \quad ((a) \text{ بنا به قسمت}) \\ &\leq \sec^{rn}(\alpha) |det(f(A\nabla_v B))|. \end{aligned}$$

(d) بنا به لم ۱.۴،

$$\begin{aligned} \|f(A)\nabla_v f(B)\| &\leq \sec(\alpha) \|\mathcal{R}(f(A)\nabla_v f(B))\| \\ &\leq \sec^r(\alpha) \|\mathcal{R}(f(A\nabla_v B))\| \quad ((a) \text{ بنا به قسمت}) \\ &\leq \sec^r(\alpha) \|f(A\nabla_v B)\|. \end{aligned}$$

با به کار بردن برهانی شبیه قضیه قبل و با استفاده از قضیه ۲.۱ نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۲.۶ فرض کنیم $f \in m_\alpha$ و $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$. در این صورت برای هر نگاشت خطی مثبت یکانی Φ ،

- a) $s_j(\Phi(f(A)!f(B))) \leq \sec^c(\alpha) s_j(\Phi(f(A))\#\Phi(f(B)))$,
- b) $|det(\Phi(f(A)!f(B)))| \leq \sec^{\Delta n}(\alpha) |det(\Phi(f(A))\#\Phi(f(B)))|$,
- c) $\|\Phi(f(A)!f(B))\| \leq \sec^\Delta(\alpha) \|\Phi(f(A))\#\Phi(f(B))\|$.

در گزاره زیر نامساوی های نرمی را برای ماتریس های قطعه ای بدست آورده ایم که توسیعی از نتایج بدست آمده در [۱] می باشند

گزاره ۲.۷ فرض کنیم $A \in \mathcal{S}_\alpha$ و $\|\cdot\|_\infty$ نرم عملگری باشد. در این صورت برای هر $f \in m_\alpha$ ، داریم

$$f(\|\mathcal{R}A\|_\infty) \leq \|\mathcal{R}f(A)\|_\infty \leq \sec^r(\alpha) f(\|\mathcal{R}A\|_\infty).$$

اثبات. بنا به نامساوی (۱.۳)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\langle f(A)x, x \rangle &= \langle \mathcal{R}f(A)x, x \rangle \\ &\leq \sec^r(\alpha) \langle f(\mathcal{R}A)x, x \rangle \\ &\leq \sec^r(\alpha) f(\mathcal{R}\langle Ax, x \rangle) \end{aligned}$$

از طرفی اگر A ماتریس قطعه ای باشد، آنگاه $f(A)$ نیز قطعه ای است. حال اگر از نامساوی فوق روی x هایی که $\|x\| = 1$ می باشد، ماکسیم بگیریم، داریم

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}f(A)\|_\infty &= \max \mathcal{R}\langle f(A)x, x \rangle \\ &\leq \sec^r(\alpha) \max f(\mathcal{R}\langle Ax, x \rangle) \quad ((۱.۳) \text{ بنا به نامساوی}) \\ &= \sec^r(\alpha) f(\max \langle \mathcal{R}Ax, x \rangle) \\ &= \sec^r(\alpha) f(\|\mathcal{R}A\|_\infty). \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}f(A)\|_\infty &= \max \mathcal{R}\langle f(A)x, x \rangle \\ &\geq \max f(\mathcal{R}\langle Ax, x \rangle) \quad ((۱.۳) \text{ بنا به نامساوی}) \\ &= f(\max \langle \mathcal{R}Ax, x \rangle) \\ &= f(\|\mathcal{R}A\|_\infty). \end{aligned}$$

به این ترتیب حکم ثابت می شود.

شعاع عددی $\omega(A)$ برای هر $A \in \mathbb{M}_n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega(A) = \sup\{\langle Ax, x \rangle : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}.$$

اگر $A \in \mathcal{S}$ ، آنگاه $\omega(A) = \|A\|$ بنابراین

$$\omega(\mathcal{R}A) = \|\mathcal{R}A\|. \quad (۲.۴)$$

بدرانی و همکارانش [۲] نشان داده‌اند که اگر $A \in \mathcal{S}_\alpha$ ، آنگاه

$$\cos(\alpha) \|A\| \leq \| \mathcal{R}A \| = \omega(\mathcal{R}A) \leq \omega(A) \leq \|A\|, \quad (۲.۵)$$

و

$$\omega(\mathcal{R}A) \leq \omega(A) \leq \sec^\tau(\alpha) \omega(\mathcal{R}A). \quad (۲.۶)$$

در انتهای این بخش، نامساوی‌های جدیدی را برای برد عددی ماتریس‌های قطعه‌ای بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲.۸ فرض کنیم $f \in m$ یک تابع حافظ گسترشی باشد و $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$. در این صورت

- a) $\omega(f(A)) \leq \sec^\tau(\alpha) f(\omega(A))$,
 b) $\omega(f(A) \nabla_\nu f(B)) \leq \sec^\tau(\alpha) f(\omega(A) \nabla_\nu \omega(B))$,

که در آن $0 < \nu < 1$.

اثبات.

(a)

$$\begin{aligned} \omega(f(A)) &\leq \|f(A)\| && \text{(بنا به نامساوی (۲.۵))} \\ &\leq \sec(\alpha) \| \mathcal{R}f(A) \| && \text{(بنا به لم ۱.۴)} \\ &\leq \sec^\tau(\alpha) f(\| \mathcal{R}A \|) && \text{(بنا به نامساوی (۱.۶))} \\ &= \sec^\tau(\alpha) f(\omega(\mathcal{R}A)) \\ &\leq \sec^\tau(\alpha) f(\omega(A)). && \text{(بنا به نامساوی (۲.۶))} \end{aligned}$$

(b) بنا به قسمت (a)

$$\begin{aligned} \omega(f(A) \nabla_\nu f(B)) &= \omega((1-\nu)f(A) + \nu f(B)) \\ &\leq (1-\nu)\omega(f(A)) + \nu\omega(f(B)) \\ &\leq \sec^\tau(\alpha)((1-\nu)f(\omega(A)) + \nu f(\omega(B))) \\ &= \sec^\tau(\alpha) f(\omega(A) \nabla_\nu \omega(B)). \end{aligned}$$

۳. مثال‌ها

در مثال‌های زیر با انتخاب میانگین‌های متفاوت و انجام محاسبات لازم از طریق سایت <https://www.wolframalpha.com/> و نرم افزار MATLAB به ترتیب درستی نتیجه ۲.۲، نامساوی (۲.۳)،

قضیه ۲.۳ و نتیجه ۲.۴ را مشاهده می‌کنیم:

مثال ۳.۱ فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} 5+i & 1+i \\ 1-i & 4+i \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2.5+i & -0.25+0.25i \\ -0.5-0.5i & 2.5+i \end{bmatrix}$ و $f(t) = \sqrt{t}$ در این صورت $f \in m_\pi$, $A, B \in \mathcal{S}_\pi$ و $f(A), f(B) \in \mathcal{S}_\pi$. واضح است که

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1.8413 & 0.014+0.2581i \\ 0.014-0.2581i & 1.7521 \end{bmatrix} &\simeq \mathcal{R}(f(A) \# f(B)) \\ &\leq \sec^\tau\left(\frac{\pi}{6}\right) \mathcal{R}(f(A) \# f(B)) \\ &\simeq 1.7778 \begin{bmatrix} 2.4920 & 0.22-0.2283i \\ 0.22-0.2283i & 2.2205 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

مثال ۳.۲ فرض کنیم $f: (\cdot, \infty) \rightarrow B = \begin{bmatrix} ۷ & ۲-i \\ ۲+i & ۲ \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} ۵ & -۱+i \\ -۱-i & ۳ \end{bmatrix}$

در این صورت $f(t) = \frac{t}{1+t}$ و $f(A), f(B) > \cdot, A, B > \cdot$ و $f \in m$ همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ۰.۸۱۷۷ & ۰.۰۳۷۶ - ۰.۰۰۸۸i \\ ۰.۰۳۷۶ + ۰.۰۰۸۸i & ۰.۶۳۴۳ \end{bmatrix} &\simeq f(A)!f(B) \\ &\leq f(A)\#f(B) \\ &\simeq \begin{bmatrix} ۰.۸۲۳۹ & ۰.۰۳۳۸ - ۰.۰۰۶۲i \\ ۰.۰۳۳۸ + ۰.۰۰۶۲i & ۰.۶۴۳۶ \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

مثال ۳.۳ با فرض $f(t) = \frac{1+t}{۲}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳+i & \cdot \\ \cdot & ۲+i \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} ۲+i & \cdot \\ \cdot & ۳+i \end{bmatrix}$ واضح است که $f \in m$

و $A, B \in \mathcal{S}_{\frac{\pi}{۶}} \cap \mathcal{M}_{\frac{\pi}{۶}}$. در جدول زیر، در حالت‌های مختلف $\mathcal{R}(f(A)!_{\nu} f(B))$ را با

$$\sec^{\epsilon}(\alpha)\mathcal{R}(f(A\nabla B)) \simeq \begin{bmatrix} ۳.۱۱۲ & \cdot \\ \cdot & ۳.۱۱۲ \end{bmatrix}$$

ν	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$
$\mathcal{R}(f(A)!_{\nu} f(B))$	$\begin{bmatrix} ۱.۶۰۲ & \cdot \\ \cdot & ۱.۸۴۹ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱.۷۱۷ & \cdot \\ \cdot & ۱.۷۱۷ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱.۸۴۹ & \cdot \\ \cdot & ۱.۶۰۲ \end{bmatrix}$

مثال ۳.۴ با فرض $f(t) = \frac{1+t}{۲}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & \cdot \\ \cdot & ۳ \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۲ \end{bmatrix}$ واضح است که $f \in m$ و $A, B > \cdot$.

در جدول زیر، در حالت‌های مختلف $F_{\nu}(f(A), f(B))$ از $\begin{bmatrix} ۱.۲۵ & \cdot \\ \cdot & ۱.۷۵ \end{bmatrix}$ کوچک‌تر است:

ν	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$
$F_{\nu}(f(A), f(B))$	$\begin{bmatrix} ۱.۲۳۱ & \cdot \\ \cdot & ۱.۷۳۷ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱.۲۳۷ & \cdot \\ \cdot & ۱.۷۴۱ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱.۲۴۴ & \cdot \\ \cdot & ۱.۷۴۶ \end{bmatrix}$

فهرست منابع

- [۱] Bedrani, Y., Kittaneh, F., Sababheh, M. (۲۰۲۱). From positive to accretive matrices. *Positivity*, ۲۵(۴), ۱۶۰۱–۱۶۲۹.
- [۲] Bedrani, Y., Kittaneh, F., Sababheh, M. (۲۰۲۱). Numerical radii of accretive matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, ۶۹(۵), ۹۵۷–۹۷۰.
- [۳] Bhatia, R. (۱۹۹۷). *Matrix Analysis*. Springer-Verlag, New York.
- [۴] Bhatia, R. (۲۰۰۷). *Positive Definite Matrices*. Princeton University Press, Princeton.
- [۵] Durury, S., Lin, M. (۲۰۱۴). Singular value inequalities for matrices with numerical ranges in a sector. *Operators and Matrices*, ۸, ۱۱۴۳–۱۱۴۸.
- [۶] Ghazanfari, A., Malekinejad, S. (۲۰۲۱). Heron means and Pólya inequality for sector matrices. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, ۶۴, ۳۲۹–۳۳۹.
- [۷] Ghazanfari, A. G., Malekinejad, S. (۲۰۲۳). Operator monotone functions on accretive matrices. *Positivity*, ۲۷(۵), ۵۹.
- [۸] Horn, R. A., Johnson, C. R. (۲۰۱۳). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [۹] Lin, M. (۲۰۱۵). Extension of a result of Hanynsworth and Hartfiel. *Archiv der Mathematik*, ۱۰۴, ۹۳–۱۰۰.
- [۱۰] Lin, M. (۲۰۱۶). Some inequalities for sector matrices. *Operators and Matrices*, ۱۰(۴), ۹۱۵–۹۲۱.
- [۱۱] Malekinejad, S., Khosravi, M., Sheikhhosseini, A. (۲۰۲۲). Mean inequalities for sector matrices involving positive linear maps. *Positivity*, ۲۶(۴۴), ۱–۱۷.
- [۱۲] Tan, F., Che, H. (۲۰۱۹). Inequalities for sector matrices and positive linear maps. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, ۳۵, ۴۱۸–۴۲۳.
- [۱۳] Zhan, F. (۲۰۱۵). A matrix decomposition and its applications. *Linear and Multilinear Algebra*, ۶۳(۱۰), ۲۰۳۳–۲۰۴۲.