Modern Management Engineering
Volume 10, Issue 3, Autumn 2024
Article Type: Research

Optimal Control of Customer Dynamics Using Machine Learning with Polynomial Kernel

Seyed Hamid Emadi[1], *Abolfazl Sadeghian*[2], *Mojdeh Rabani*[3], *Hassan Dehghan Dehnavi*[4]

Received: 09/03/2024 Accepted: 06/06/2024

Extended Abstract

Introduction

Optimal control of customer dynamics is a key tool in marketing for analyzing customer behavior and developing personalized strategies to maintain and increase customer engagement over time (Castillo et al., 2021). Companies spend a significant portion of their revenue (10 to 20 percent) on marketing, and optimizing these resources is of great importance (Rosa et al., 2018). One of the main challenges in this area is customer churn, which incurs high costs for reacquisition (Ortakci & Seker, 2024). Although decision-making in marketing resource allocation is complex, it has historically been carried out using simple rules (Gupta & Steenburgh, 2008).Referral programs, unlike word-of-mouth advertising, allow marketers to control the content of the message (Berman, 2016), but research on resource allocation to these programs is still limited (Rosa et al., 2018). In the past, the primary goal of models was profit maximization (Shawky et al., 2020), but newer models focus on customer value maximization (Foroudi et al., 2018).The use of artificial intelligence in marketing, forecasting, sales, and performance management is rapidly increasing, providing organizations with the ability to adapt quickly to market changes (Ledro et al., 2023). Machine learning algorithms and neural networks have also been applied in data analysis, especially customer behavior time-series data, and solving complex numerical problems, including differential and integral equations (Mehrkanoon & Suykens, 2015)

Related Research

Islam et al. (2024) proposed a hybrid framework for supplier selection and order allocation, which includes deep learning, principal component analysis (PCA), and optimization. The proposed model showed better performance in demand forecasting compared to traditional methods such as the SARIMA model and gradient-boosted machine (GBM).

Ortakci and Seker (2024) focused on customer retention and churn prevention using a combination of machine learning methods such as decision trees, random forests, and support vector machines. Their results showed that using these models, service prices can

[1] PhD Candidate, Industrial Management (Production and Operations), Department of Management, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd
hamid.emadi7@gmail.com
[2]Assistant Professor, Department of Industrial Management, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd, Iran
sadeghian@iauyazd.ac.ir
[3] Assistant Professor, Department of Industrial Management, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd
moz.rabbani@iau.ac.ir
[4] Associate Professor, Department of Industrial Management, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd, Iran
denavi2000@yahoo.com

be estimated in a personalized manner, increasing the profitability of companies by up to 36%.

Ledro et al. (2023) examined the integration of artificial intelligence in customer relationship management (AI-CRM) and concluded that success in this area requires strategic planning and continuous adaptation to environmental changes.

These studies emphasize that the use of artificial intelligence and machine learning techniques can play a significant role in improving business processes, optimizing supplier selection, demand forecasting, and customer retention.

Research Methodology

In this study, the dynamics of three types of customers (referral, permanent, potential) are examined using a nonlinear, non-autonomous differential model as an optimal control problem. To estimate the unknown components of the model, the "Least Squares Support Vector Regression (LSSVR)" machine learning algorithm is employed, which estimates the parameters by solving a second-degree objective function with nonlinear constraints. Finally, the problem is reduced to an algebraic system and solved using methods such as the conjugate gradient method.

Approximation of the Function using LSSVR

The LSSVR algorithm creates a nonlinear regression model for supervised data by mapping to the feature space and solving a linear system. The objective function is obtained in a closed form for estimating the objective function through the Karush-Kuhn-Tucker conditions, which includes weight vectors, kernel functions, and dual variables. The kernel function chosen in this paper is of the polynomial type, which is suitable for interpolating complex functions.

Marketing Modeling

Derivatives in the differential equations are used to describe the rate of changes in customers, and the model is designed as a dynamic system. The function space structure is considered in the form of $C^2(\Omega)$ and $L^2(\Omega)$, which allows the use of machine learning techniques for approximating functions and solving the model.

Variables

- Customers: R(t), C(t), P(t)
- Controls: u_1, u_2
- Parameters: $\lambda 1$, $\lambda 2$،$\alpha 1$, $\alpha 2$, β, γ

Research Findings

In this paper, a mathematical model based on a non-autonomous system of differential equations is presented to analyze customer population dynamics in marketing strategies. The model considers three categories of customers (potential, permanent, and referral) and simulates their changes over time. The primary objective of the model is to optimally

allocate the advertising budget using the Least Squares Support Vector Regression (SVM-LS) algorithm, where an objective function is employed to minimize advertising costs and optimize the number of customers in each category.

The model is optimized using numerical methods such as the NLPSolve algorithm in Maple to solve the nonlinear differential equations. Numerical simulation results show the optimal impact of budget allocation on customer population changes. With this model, advertising strategies can be designed in a way that maximizes the impact on customer acquisition and retention.

The simulations demonstrate that by precisely adjusting conversion rates and optimally allocating resources, significant changes can be made in the number of potential and permanent customers, while minimizing advertising costs. These results have many applications in optimizing marketing and advertising strategies across various industries, especially in e-commerce.

By using this model, companies and organizations can be helped to make better decisions in advertising budget allocation, ultimately avoiding additional costs and increasing profitability

Discussion and Conciuson

In this study, a customer dynamics model based on optimal control was proposed using Least Squares Support Vector Regression (LS-SVR) with a polynomial kernel. The model accurately approximated nonlinear differential equations and successfully predicted the behavior of three customer segments—loyal, potential, and referred—with high precision. Numerical analysis showed that optimized marketing policies led to an increase in loyal customers, a decrease in potential customers, and an upward-fluctuating trend in referred customers.

A key contribution of this research is demonstrating the capability of machine learning methods in solving control problems involving dynamic and complex data. The model's clear structure, expert validation, and strong algorithmic convergence make it highly suitable for marketing applications and strategic decision-making. Additionally, it can be employed in customer behavior analysis, advertising policy design, retention rate improvement, and customer experience enhancement across various industries.

this study has several limitations:

- Control variables were not analyzed independently;
- The model is based on smooth, continuous customer behavior and does not capture sudden fluctuations;
- Parameter tuning is time-consuming and sensitive to data;
- The computational complexity requires powerful processing resources;
- The model has low interpretability for non-expert users.

To address these limitations and enhance the model in future research, the following directions are suggested:

- Employ intelligent optimization algorithms such as PSO and Genetic Algorithms for more efficient parameter tuning;
- Implement the model on real and diverse market data to improve generalizability;
- Use parallel or GPU-based processing to accelerate execution time;
- Compare model performance with deep neural networks and other advanced machine learning methods;
- Develop tools to enhance interpretability and understanding of model outputs for non-specialist managers.

This research provides a practical and reliable foundation for designing intelligent marketing decision-support systems and holds great potential in real-world applications, particularly in competitive and data-driven markets.

Keywords: Optimal control, customer dynamics, machine learning, polynomial kernel

JEL:CO2,C61,M31

مهندسی مدیریت نوین
سال دهم، شماره سوم ، پاییز ۱۴۰۳
نوع مقاله :پژوهشی

کنترل بهینه پویایی مشتری از روش یادگیری ماشین با هسته چندجمله‌ای

سید حمید عمادی[۱]، ابوالفضل صادقیان[۲]، مژده ربانی[۳]، حسن دهقان دهنوی[۴]

تاریخ وصول ۱۴۰۲/۱۲/۱۹ تاریخ پذیرش ۱۴۰۳/۳/۱۷

چکیده

هدف پژوهش :این پژوهش به توسعه‌ی یک مدل کنترل بهینه برای بررسی پویایی مشتریان با تمرکز بر استراتژی‌های بازاریابی پرداخته است. به کارگیری معادلات دیفرانسیل نشان‌دهنده این واقعیت است که مدل یک سیستم غیرخودکار را مورد مطالعه قرار می‌دهد. هدف اصلی، [۵]تحلیل روی رفتار و تغییرات گروه‌های مختلف مشتریان، از جمله دائمی، ارجاعی، و بالقوه است. این تحقیق بر اهمیت اجرای استراتژی‌های بازاریابی موثر برای افزایش کلی تعداد مشتریان و بهبود پویایی آن‌ها تاکید دارد.

روش‌شناسی پژوهش :در این مطالعه، از یک الگوریتم یادگیری ماشین نظارتی جدید که بر پایه هسته‌های چندجمله‌ای فعالیت می‌کند، استفاده شده است. این هسته‌ها امکان مدل‌سازی دقیق توابع پیچیده از داده‌ها را فراهم می‌آورند، به این ترتیب به ما کمک می‌کنند که درک بهتری از پویایی‌های مشتریان حاصل شود. همچنین، با استفاده از رگرسیون بردار پشتیبان کمترین مربعات، یک روش بهینه‌سازی ساده و مؤثر برای استراتژی‌های بازاریابی عرضه می‌گردد. این رویکرد امکان بهینه‌سازی استراتژی‌های بازاریابی را به شکلی فراگیر به اثر کلی این استراتژی‌ها بر مجموعه مشتریان می‌پردازد.

یافته‌ها :یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که در بازه‌ی زمانی یک سال، تعداد مشتریان دائمی در حال افزایش می باشد، درحالی‌که جمعیت مشتریان بالقوه نشان از کاهش دارد. اما تعداد مشتریان ارجاعی در ابتدای دوره مورد بررسی شاهد رشدی چشمگیر بوده و سپس الگویی نوسانی اما مثبت را تجربه می‌کند.

اصالت/ارزش افزوده علمی :این تحقیق، چگونگی کمک تکنیک‌های پیشرفته‌ی یادگیری ماشین به حل چالش‌های مختلف در حوزه‌های مدیریت و بازاریابی را به اثبات می‌رساند، نشان داده‌شده است که چگونه این فناوری‌ها می‌توانند در فهم و به‌کارگیری استراتژی‌های بهینه در گستره‌ای از سازمان‌ها و صنایع تاثیرگذار باشند.

واژگان کلیدی: کنترل بهینه، پویایی مشتری، یادگیری ماشین، هسته چندجمله‌ای
طبقه‌بندی موضوعی: C02,C61,M31

---

[۱]دانشجوی دکتری، مدیریت صنعتی(تولید و عملیات)، گروه مدیریت، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران.

[۲]استادیار، گروه مدیریت صنعتی، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران. (نویسنده مسئول) sadeghian@iauyazd.ac.ir

[۳]استادیار، گروه مدیریت صنعتی، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران.

[۴]دانشیار، گروه مدیریت صنعتی، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران.

مقدمه

کنترل بهینه پویایی مشـــتری، بهینه‌ســـازی و مدیریت بهتر تعاملات و رفتارهای مشـــتریان در طول زمان را برعهده دارد. این مفهوم در بازاریابی به کار می‌رود تا بهترین راه‌ها برای جلب، حفظ و تشویق مشـــتریان به خرید و ارتباط مداوم با شـــرکت را تعیین کند. با اســـتفاده از کنترل بهینه پویایی مشـــتری، شـــرکت‌ها قادرند تا با تحلیل داده‌ها و رفتارهای مشـــتریان، اســـتراتژی‌هایی را تدوین کنند که بهترین نتایج را در بلندمدت به آن‌ها ارائه دهند. این شامل ارائه پیشنهادهای شخصی‌سازی شده، ایجاد تجربه کاربری بهتر، و ارتقاء ارتباط با مشـــتریان می‌شـــود. کنترل بهینه پویایی مشـــتری اهمیت زیادی در بازاریابی دارد زیرا به شرکت‌ها کمک می‌کند تا با تعامل موثر با مشتریان، روابط مستدام و پربارتری را برقرار کنند و در نتیجه، عملکرد و سودآوری خود را بهبود بخشند (Castillo et all,2021).

به گزارش CMO که در سال ۲۰۱۷ توسط دانشکده بازرگانی فوکوا، انجمن بازاریابی آمریکا انجام شد، نشان می‌دهد که شرکت‌ها به طور کلی بین ۱۰ تا ۲۰ درصد از درآمد خود را بسته به بخشی که در آن فعالیت می‌کنند، به بودجه بازاریابی اختصـــاص می‌دهند. با توجه به مقادیر بالا، بهینه ســـازی آن تخصیص بسیار مهم است(Rosa et all,2018).

از طرفی دیگر ریزش مشتریان به یکی از چالش‌های اساسی تبدیل شده است که شرکت‌ها با آن مواجه می‌شـــوند. این ریزش نه تنها منجر به از دســـت دادن درآمد می‌شـــود، بلکه همچنین هزینه‌های اضافی برای جلب مشتریان جدید را به همراه دارد (Ortakci & Seker,2024).

با این حال، همانطور که گوپتا و اســـتینبرگ[1] بیان کردند، تخصـــیص منابع بازاریابی یک تصـــمیم پیچیده است که تا همین اواخر بر اساس اکتشافی های بسیار ساده یا قوانین تصمیم گیری انجام می شد (Gupta & Steenburgh,2008) .

از جمله تصمیمات و استراتژی بازاریابی، تصمیم به سرمایه گذاری در برنامه‌های ارجاع است. این برنامه ها مشتریان فعلی را تشویق می کند تا مشتریان جدید را بر اساس پاداش ها جذب کنند (Li et all,2019) . بر خلاف ســایر برنامه های بازاریابی که صـرفاً مبتنی بر تبلیغات دهان به دهان هســتند، برنامه های ارجاع توســط بازاریاب هدایت می شــوند و امکان کنترل محتوای پیام را دارند (Berman,2016). با این حال، مطالعاتی که به بازاریابان کمک می کند تا در مورد تخصـــیص منابع به

[1] Gupta &Steenburgh

برنامه‌های ارجاع تصمیم بگیرند، کمیاب هستند (Rosa et all,2018) .

برای چندین دهه، شرکت ها به دنبال بهترین راه برای به حداکثر رساندن سود و کاهش هزینه بوده اند. مدل‌های کلا سیک معمولاً به دنبال راه‌هایی ه ستند که به شرکت‌ها در تخ صیص منابع بازاریابی خود و در عین حال حداکثر کردن سـود کمک می‌کنند(Shawky et all, 2020) . با این حال، مدل‌های اخیر سعی کرده‌اند ارزش ویژه مشتری را به حداکثر برسانند (ارزش فعلی خالص جریان سود آتی در طول عمر مشتری از طریق تخصیص بهینه منابع بازاریابی). از این نظر، و بر اساس این فرض که تعداد مشتریان در یک بازار محدود ا ست، مهم ا ست که مشتریان جدید را در اسرع وقت جذب کنید، زیرا در غیر این صـورت، می‌توانند توسـط رقبا جذب ر شـوند. در عین حال، جذب دیرهنگام مشـتری، ارزش ویژه مشتری را نیز کاهش می‌دهد (Foroudi et all,2018).

فناوری‌های هوش مصـنوعی می‌توانند به طور چشـمگیری بر زمینه‌های کلیدی شـرکت‌ها مثل پیش‌بینی، مدیریت عملکرد، افزایش فروش و بازاریابی متقابل تأثیر بگذارند. علاوه براین یکپارچگی هوش مصـنوعی در مدیریت ارتباط با مشـتری دارای پیامدهای اسـتراتژیک بلندمدت نیز اسـت و به شـرکت‌ها امکان می‌دهد که در یک چشـم انداز پایدار و تطبیقی با بازار در حال تغییر اعمال نمایند و پیشرفت کنند (Ledro et all,2023).

در دوران اخیر، شـاهد افزایش قابل توجهی در تطبیق و توسـعه الگوریتم‌های هوش مصـنوعی، یادگیری ماشـین و شـبکه‌های عصـبی بوده‌ایم که برای رویارویی با چالش‌های مختلف در حوزه‌های علمی و فن‌آوری به کار گرفته شده‌اند. این الگوریتم‌ها در زمینه‌های گوناگونی مانند شناسایی الگوها، که شامل الگوی رفتار م شتریان به صورت داده‌های سری زمانی می شود، تحلیل ت صاویر پز شکی، امنیت سایبری و دیگر موارد متعدد کاربرد دارند. علاوه بر این، در عر صه حل م سائل پیچیده عددی شامل معادلات دیفرانسیل و انتگرالی که به روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند، این تکنیک‌ها راهگشا هستند. مهرکانون و همکارانش پیشگام بهره‌گیری از تکنیک رگرسیون بردار پشتیبان برای شبیه سازی معادلات دیفرانسیل معمولی[1] بوده‌اند که در ادامه مطالعات، رویکرد مشابهی برای حل عددی معادلات جزئی و انتگرالی و معادلاتی در فضـا های بی‌کران نیز توسـعه یافته اسـت (Mehrkanoon & Suykens,2015).

[1] ODEs

پیشینه‌ی پژوهش

جدول ۱ مروری کنترل بهینه پویایی مشتری را ارائه می‌دهد.

جدول (۱) پیشینه پژوهش

ردیف	نام محقق	سال	عنوان	توضیحات
۱	اسلام و همکاران	۲۰۲٤	چارچوب برنامه ریزی انتخاب تامین کننده و تخصیص سفارش با ادغام یادگیری عمیق، تجزیه و تحلیل اجزای اصلی و تکنیک های بهینه سازی	نتایج مدل‌های پیش‌بینی نشان می دهد که شبکه یادگیری عمیق توسعه‌یافته می‌تواند خطای پیش‌بینی را در مقایسه با روش میانگین متحرک یکپارچه بازگشتی فصلی۵۵,٤۲ درصد و در مقایسه با روش ماشین تقویت‌شده با گرادیان ۱۳,۱ درصد کاهش دهد. همچنین مشاهده می شود که در نظر گرفتن توابع همبستگی بین محصول می تواند تامین کنندگان انتخاب شده و سفارشات مربوطه را تغییر دهد.
۲	اور تاکچی و سکر	۲۰۲٤	بهینه سازی حفظ مشتری: یک رویکرد قیمت گذاری شخصی مبتنی بر هوش مصنوعی	در این مطالعه، روش‌های درخت تصمیم، جنگل تصادفی و ماشین بردار پشتیبان به‌عنوان طبقه‌بندی کننده برای پیش‌بینی ریزش تطبیق داده شده‌اند، و مدل‌های رگرسیونی از همان روش‌ها برای پیش‌بینی بهینه‌ترین هزینه خدمات «شخصی‌شده» برای بالقوه استفاده می‌شوند. ریزش مشتری علاوه بر این، برای کاهش هزینه جمع‌آوری داده‌ها برای شرکت‌ها، از روش انتخاب ویژگی برای تعیین بهینه‌ترین زیرمجموعه

				ویژگی در تحلیل ریزش و پیش‌بینی هزینه خدمات استفاده می‌شود. نتیجه این تحلیل جامع با استفاده از چهار روش هوش مصنوعی بر روی سه مجموعه داده مخابراتی متنوع، نشان می دهد که مدل قیمت‌گذاری «شخصی‌شده» پیشنهادی در بخش مخابرات می‌تواند از ریزش جلوگیری کرده و سودآوری را تا ۳۶ درصد افزایش دهد.
۳	اکاساری و همکاران	۲۰۲٤	نقش هوش مصنوعی و یادگیری ماشینی در هدف گیری دقیق: استراتژی‌های بازاریابی انقلابی	در ای مقاله در مورد تعریف هوش مصنوعی و ML، تحول بخش بازاریابی توسط پلتفرم‌های دیجیتال و تجزیه و تحلیل داده، اکتشاف بازاریابی دقیق و ارتباط روزافزون آن در عصر دیجیتال، نقش هوش مصنوعی و محیط بازاریابی در داده‌کاوی برای هدف یابی دقیق، بحث می‌کند. سهم هوش مصنوعی در ایجاد بخش‌های دقیق‌تر مشتری و مطالعه‌ی محیط بازاریابی در تجزیه و تحلیل پیش‌بینی‌کننده برای پیش‌بینی رفتار مشتری.
٤	سان و همکاران	۲۰۲۳	تحقیق در مورد ارزش طول عمر مشتری بر اساس الگوریتم های یادگیری ماشین و مدل تحلیل مدیریت	در این مقاله بر اندازه‌گیری ارزش مشتری وتقسیم‌بندی مشتری بر اساس تئوری ارزش چرخه عمر مشتری تمرکز می‌کند که ابتدا مهندسی ویژگی مانند انتخاب داده ها، پیش پردازش داده‌ها، تبدیل

			ارتباط با مشتری	داده ها و کشف دانش را انجام می دهد وسپس تقسیم‌بندی ارزش مشتری را براساس الگوریتم‌های یادگیری‌ماشین و مدل‌های تجزیه و تحلیل مدیریت ارتباط با مشتری انجام می‌دهد و یک مدل شناسایی تقسیم‌بندی ارزش مشتری را تحت این شرایط ایجاد می‌کند.
۵	لدرو و همکاران	۲۰۲۳	ادغام هوش مصنوعی در ارتباط با مشتری: چالش ها و دستورالعمل ها	این مطالعه پر کردن این شکاف با شناسایی چالش‌هایی است که کسب‌وکارها باید در فرآیند یکپارچه‌سازی هوش مصنوعی در زمینه‌ی ارتباط با مشتری، از اولین مرحله کشف تا مرحله پایدار نهایی، بر آن‌ها غلبه کنند. این یافته‌ها به درک تجربی ادغام AI-CRM کمک می‌کند و دیدگاهی بلندمدت در استفاده از هوش مصنوعی برای روابط با مشتری ارائه می‌دهد.
٦	تائوفیک و همکارش	۲۰۲۳	نقش هوش مصنوعی در نوآوری بازاریابی دیجیتال	در این مقاله تحلیل مفاهیم اولیه هوش مصنوعی و شناسایی زمینه‌های مشتقات هوش مصنوعی است که می‌توانند در نوآوری‌های بازاریابی دیجیتال به کار روند. این مقاله همچنین به بررسی کاربردهای مختلف هوش مصنوعی و تأثیر آنها بر اثربخشی

				و کارایی بازاریابی دیجیتال می پردازد. با ترکیب هوش ماشینی و تجزیه و تحلیل داده‌ها، شرکت‌ها می‌توانند هدف‌گذاری، شخصی سازی و اثربخشی تبلیغات خود را بهبود بخشند.
۷	پریرا و همکاران	۲۰۲۲	مدل های مشتری برای پشتیبانی تصمیم‌گیری مبتنی بر هوش مصنوعی در زنجیره‌های تامین خرده‌فروشی آنلاین مد	در این مقاله از اطلاعات باکیفیت ذخیره شده در مدل های مشتری که با استفاده از تکنیک های هوش مصنوعی ساخته شده اند، بهره مند شوند و امکان تصمیم گیری آگاهانه در مورد نحوه شخصی سازی (تطبیق) برای مطابقت با نیازها و ترجیحات مشتری را فراهم کنند که کار بر روی موضوعات دستور کار می‌تواند به نفع ذینفعان مد متمایز باشد، نه فقط مشتریان و تصمیم‌گیری مناسبی را در زمینه‌ها و پویایی های مختلف ایجاد کند.
۸	مصدق و همکاران	۲۰۲۱	پو یایی بخش های مشتری: پیش بینی کننده ارزش طول عمر مشتری	در مطالعه حاضر، پویایی مشتریان بانک را از طریق بخش‌های ارزشی با استفاده از تجزیه و تحلیل داده‌های بزرگ مورد مطالعه قرار گرفته است. در نتیجه الگویی را توسط چند گروه از مبتکران روند بازار یافتیم که روند انتقال آنها با روندهای کلی بازار دنبال می شود که بینشی نسبت به پویایی بازارهای آینده به دست می آورد.

۹	اسنوک و همکاران	۲۰۲۰	یادگیری مسیر: یک رویکرد مبتنی بر یادگیری ماشین برای استنباط مشتریان محدود در مسیرهای تحویل	در این مطالعه، روش هایی برای یک مسئله در حمل و نقل و لجستیک و بهینه سازی مسیریابی است که نتایج، راه‌های امیدوارکننده‌ای برای ترکیب یادگیری ماشین و مشکلات مسیریابی پیشنهاد می‌شود.
۱۰	لیوتوف و همکاران	۲۰۱۹	مدیریت گردش کار نیازهای مشتری با استفاده از یادگیری ماشین	در این مقاله کل فرآیند مدیریت نیازمندی ها دارای دو گلوگاه عمده است که می توان آنها را خودکار کرد. اولین مورد، تشخیص تغییرات، می تواند از طریق یک ابزار مقایسه اسناد انجام شود. مورد دوم، شناخت مسئولیت ها و واگذاری آنها به بخش مناسب، با الگوریتم های یادگیری ماشین استاندارد قابل حل است. در اینجا، چنین الگوریتم‌هایی برای مجموعه داده‌ای به‌دست‌آمده از یک تامین‌کننده جهانی صنعت خودرو اعمال می‌شوند. در نتایج نشان می‌دهد که چگونه چنین روش‌هایی می‌توانند برخی از مشکلات مدیریتی را حل کرده و گردش کار خود را بهبود بخشند.
۱۱	رزا و همکاران	۲۰۱۸	کنترل بهینه پویایی مشتری بر اساس سیاست بازاریابی	در این پژوهش مسئله کنترل بهینه را برای یک مدل غیر مستقل از ODE ها در نظر می گیریم که تکامل تعداد مشتریان را در برخی

				از شرکت ها توصیف می کند. در نتیجه اثربخشی استراتژی کنترل بهینه را در برابر سایر فرمول‌بندی های مسئله با کنترل‌های ساده‌تر نشان داده می‌شود.

روش پژوهش

در این مقاله، هدف این ا ست که از یک د ستگاه معادلات دیفراﻧ سیل غیر خودگردان غیرخطی به عنوان یک مسـئله کنترل بهینه برای مطالعه و پیش‌بینی پویایی جمعیت مشـتری و تصـمیم‌گیری ا ستراتژیک در رابطه با تخ صیص بودجه تبلیغاتی بهره جوییم. م شتریان با انواع مختلفی مورد برر سی قرار گرفته‌اند که شامل م شتریان عادی، بالقوه و معرفی شده می‌با شند. برای این منظور، یک الگوریتم رگر سیون بردار پ شتیبان با حداقل مربعات به عنوان روش یادگیری ما شینی تحت نظر ا ستفاده شده اسـت که در آن یک فرآیند آموزش برای پیدا کردن پارامترهای نامشـخص تابع باقی مانده مربوط به مدل پیاده‌سازی می‌گردد. این فرمول‌بندی به یک تابع هدف درجه دوم منجر می‌شود که دارای چندین محدودیت غیرخطی ا ست و در نهایت به یک سیستم جبری از معادلات تبدیل می‌شود که با ا ستفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی غیرخطی مانند گرادیان مزدوج حل می‌شوند.

این مقاله متمرکز بر شبیه سازی رفتار پویای سه نوع م شتری مختلف با ا ستفاده از یک الگوریتم یادگیری ما شینی جدید ا ست، که م سئله مورد برر سی را به صورت یک د ستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخودکار بیان کرده اسـت. فرآیند آموزش برگرفته از دیدگاه معکوس اسـت و از تکنیک رگرسـیون بردار پشـتیبان با حداقل مربعات برای کمینه‌سـازی تابع زیانی به کار می‌رود که با مسـئله کنترل بهینه مرتبط است.

مقاله از این قسمت به بعد به شرح زیر چیدمان یافته است: بخش دوم به بررسی مفاهیم کلیدی در فرآیند تقریب تابع، مودل‌های رگر سیون، و رگر سیون بردار پشتیبان در یادگیری ما شین می‌پردازد، که زیربنای بخش‌های بعدی را تشکیل می‌دهد. بخش سوم به تشریح مدل‌های ریا ضی مربوط به پویایی مشـتری می‌پردازد. در بخش چهارم، یک روش شـبیه‌سـازی عددی برای مسـئله کنترل بهینه پویایی مشـتری، به صـورت یک الگوریتم یادگیری ماشـینی تحت نظر پیشـنهاد می‌گردد. و در نهایت بخش پنجم به ارائه پیاده سازی عددی می‌پردازد.

تخمین تابع با رگرسیون بردار پشتیبان

این بخش به ارائه مبانی و اصول مقدماتی در فرآیند تقریب‌زدایی از توابع و همچنین نحوه انطباق یک مدل روی داده‌های معین با ا ستفاده از الگوریتم‌های یادگیری ما شینی تحت نظارت می‌پردازد. در مرحله بعدی، این فرآیند برازش را در بخش چهارم بسط خواهیم داد تا شامل حالت خاصی از سیستم دینامیکی پویایی مشتری باشد که به عنوان یک چالش کنترل بهینه شناخته می‌شود.

توابع و مدل سازی در بازاریابی

در مدل‌سازی پویایی تکامل جمعیت مشتریان، از مشتق به عنوان شاخصی برای اندازه‌گیری سرعت تغییر نسبت به زمان استفاده می‌شود. هدف، توسعه سیستمی دینامیکی است که به وسیله آن بتوان ارتباط بین اقسام گوناگون مشتریان و نحوه تغییرات آن‌ها را توصیف کرد. این توصیف می‌تواند با استفاده از انواع معادلات دیفرانسیلی همچون معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی[۱]، محاسبات تغییراتی، یا روش‌های کنترل بهینه انجام گیرد. الهام برای مدل‌های جدید بازاریابی می‌تواند از مسائل متداول فیزیکی مانند نشر ناهنجاری در فرایندهای انتقال، تغییرات مولکولی در بافت‌های زیستی، و گسترش بیماری‌ها و ویروس‌ها در مهندسی و علوم گرفته شود.

در پژوهش‌های بازاریابی، متغیرهایی نظیر تعداد مشتریان ارجاعی به صورت متغیرهای گسسته در نظر گرفته می‌شوند، با این حال در بازه‌های زمانی بلندتر می‌توان آن‌ها را به عنوان متغیرهای پیوسته تصور کرد. در اینجا ما $C^2(\Omega)$ را به عنوان فضای توابع پیوسته با دو بار مشتق پذیری پیوسته در دامنه Ω در نظر می‌گیریم. نرم‌های موجود در این فضا در اصل از ضرب داخلی استاندارد بین دو تابع f و g به دست می‌آیند و تعریف آن به صورت زیر است:

$$(f,g) = \int f(x)g(x)dx$$

فضاهای توابع پیوسته بی‌نهایت بعدی هستند و به دلیل پیچیدگی‌های موجود، در آن‌ها به دست آوردن تقریب مناسب برای حل مسائل غیرخطی دشوار است. قضیه تقریب عمومی در هوش مصنوعی – که مانند قضیه تقریب ویرستراس است – تضمین می‌کند که برای هر تابع پیوسته‌ای روی یک دامنه محدود، می‌توان چندجمله‌ای را به عنوان تقریب دقیقی از تابع با دقت مطلوب یافت. بیان دیگر این قضیه این است که برای هر تابع $f \in C[a,b]$ است و برای هر ε مثبت و دلخواه در اعداد حقیقی،

[۱] PDEs

یک چندجمله‌ای p وجود دارد به طوری که $\| f - p \| < \epsilon$ کمتر از $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ در دامنه $[a, b]$ باشد. به این ترتیب، برای هر عدد صحیح N، فضای چندجمله‌ای‌های دارای درجات حداکثر N، یک فضای بعد محدود را تشکیل می‌دهد. این ویژگی استفاده از روش‌های یادگیری ماشین و هوش مصنوعی را برای پیدا کردن درون‌یابی و رگرسیون مناسب، حتی برای توابع نامعلوم با ضرایب نامشخص، عملی و قابل اجرا می سازد. با این حال، پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌های مختلف یک عامل کلیدی است که در انتخاب روش‌ها موثر خواهد بود. در حوزه پویایی مشتری‌ها، ما فرض می‌کنیم که توابع مد نظر در فضای $L^2(\Omega)$ قرار دارند، جایی که توابع $C(\Omega)$ در آن چگال هستند و به هر دقتی قابل تقریب می‌باشند.

رگرسیون بردار پشتیبانی با حداقل مربعات برای یک مجموعه داده معلوم

به عنوان یک الگوریتم یادگیری ماشینی نظارت شده، رگرسیون بردار پشتیبانی برای یک مجموعه داده معین $(x_i, y_i), i = 0,1, \dots, n$ دارای مدل ریاضی در قالب یک منحنی رگرسیون است که با حل مسئله بهینه‌سازی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \min_{w,b,e} \quad & \frac{1}{2} w^T w + \frac{\gamma}{2} e^T e \\ \text{s.t.} \quad & y_i - (w^T \phi(t_i) + b) = e_i, \quad i = 0, \dots, n, \end{aligned}$$

که در آن منحنی رگرسیون $y(t) = w^T \phi(t) + b, \gamma \in \mathbb{R}^+$ است، و $b \in \mathbb{R}$ پارامتر تنظیم است، $w \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ بردار وزن‌های است، $\phi(\cdot): \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$ نگاشت فضای ویژگی‌ها است و d بعد فضا را نشان می‌دهد. شکل دوگان این مسئله آن را به یک سیستم معادلات جبری کارآمد محاسباتی به شرح زیر کاهش می دهد (Pakniyat et all,2021).

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} + \frac{1}{\gamma} I_N & 1_N \\ 1_N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

که در آن $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N} \times \mathrm{N}}$ یک ماتریس معین مثبت به صورت $M_{ij} = k(x_i, x_j) = \phi(x_i)^T \phi(x_j)$ است، I_N ماتریس واحد است و $1_N = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$. معین مثبت بودن M و ساختار نواری ویژه ماتریس ضرایب در معادله (۱) منحصر به فرد بودن جواب را تضمین می کند. برای ارائه چارچوبی برای روش پیشنهادی خود، ابتدا ایده اصلی اثبات مسئله دوگانه (۱) را ارائه می شود. توابع لاگرانژی را به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}w^T w + \frac{\gamma}{2}\varepsilon^T \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i - w^T \phi(x_i) - b - \varepsilon_i)$$

شرایط کاروش- کان- تاکر منجر به معادله‌های زیر می‌شود:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_k} = 0 \rightarrow w_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_k(x_i), \quad (۲)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_k} = 0 \rightarrow \varepsilon_k = \frac{1}{\gamma}\alpha_k \quad (۳)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_k} = 0 \rightarrow w^T \phi(x_k) + b + \varepsilon_k = y_k \quad (٤)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = ۰ \rightarrow \alpha^T \cdot \mathbf{1}_N = ۰. \quad (۵)$$

با قرار دادن معادلات (۲) و (۳) در معادله (٤) داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega_{k,i}\alpha_i + b + \frac{1}{\gamma}\alpha_k = 0, k = 1, \dots, n$$

لحاظ کردن معادله فوق با معادله (۵) به مسئله دوگان سیستم خطی معادله (۱) منجر می‌شود. جواب آن را می‌توان با استفاده از متغیرهای دوگان به شرح زیر نوشت:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K(x, x_i) + b \quad (٦)$$

که در آن $K(x, x_i) = \phi^T(x_i)\phi(x)$ تابع هسته است. این تابع، داده‌ها را به یک فضای ویژگی با ابعاد بالاتر تبدیل می‌کند. علاوه بر این، این هسته طبقه‌بندی و رگرسیون غیرخطی را با بزرگ‌تر کردن فضای در ماشین بردار پشتیبان و رگرسیون بردار پشتیبان تسهیل می‌کند. در اینجا، تابع هسته یک چند جمله ای است که در تقریب تابع، هسته های چند جمله ای به دلیل سادگی این توابع به طور گسترده در درون یابی و رگرسیون استفاده می‌شوند (Parand et all,2021).

متغیرها

در این پژوهش متغیرهای مدل و تفسیر آن‌ها در جداول ۲ و ۳ مشخص شده‌اند:

جدول (۲)متغیرهای مدل

متغیر	تعریف
R (t)	تعداد و وضعیت مشتریان ارجاعی
C (t)	تعداد و وضعیت مشتریان دائمی
P (t)	تعداد و وضعیت مشتریان بالقوه
u_1	متغیر کنترل
u_2	متغیر کنترل

جدول (۳)تفسیر پارامترهای مدل

متغیر	تعریف
λ_1	نرخ انتقال طبیعی بین مشتریان دائمی و مشتریان ارجاعی
λ_2	نرخ انتقال طبیعی بین مشتریان ارجاعی و مشتریان دائمی
α_1	نرخ تبدیل از مشتریان ارجاعی به مشتریان بالقوه با متغیر کنترل u_1
α_2	نرخ تبدیل از مشتریان ارجاعی به مشتریان دائمی با لحاظ کردن اثرات نوع مشتری
β	نرخ جذب تبلیغاتی
γ	نرخ ریزش مشتری

یافته های پژوهش

مدل‌های ریاضی

همانطور که گفته شد، در سیاست‌های بازاریابی برای تکامل، مشتریان بالقوه، عادی و ارجاعی را به عنوان یک دستگاه غیرخطی به صورت زیر ارائه شده است مورد بحث قرار داده اند.

$$\dot{R} = -\lambda_2 R + \lambda_1 C - \gamma(t)R + \alpha_1 u_1 P + \alpha_2(\beta(t) + u_2)PR/N \quad (۷)$$

$$\dot{C} = -\lambda_1 C + \lambda_2 R - \gamma(t)C + (1-\alpha_2)(\beta(t) + u_2)PR/N + u_1(1-\alpha_1)P \quad (۸)$$

$$\dot{P} = -(\beta(t) + u_2)PR/N - u_1 P + \gamma(t)(R + C) \quad (۹)$$

با شرایط اولیه زیر

$$R(0) = R_0, C(0) = C_0, P(0) = P_0, \quad (۱۰)$$

معادلات فوق نشان دهنده تعداد مشتری‌های ارجاعی، دائمی و بالقوه در ابتدای فرایند شبیه سازی هستند. دستگاه معادلات را به می‌توان به شرح زیر بازنویسی کرد.

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (۱۱)$$

که در آن $\boldsymbol{x} = [R, C, P]^T \in \mathbb{R}^3$ و $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^3$ تابع غیرخطی با مولفه های داده شده در سمت راست معادلات است. این مدل‌ها ارتباط نزدیکی با مدل‌های اپیدمی متغیرها و پارامترهای حالت و کنترل در مدل (۷)–(۹) به ترتیب در جداول (۲)، (۳) و (٤) همراه با مقادیر عددی استفاده شده است. متغیرهای کنترل u_1 و u_2 به عنوان توابع محدود در نظر گرفته می شوند.

در اینجا کنترل بهینه مسئله را با به حداقل رساندن انتگرال در بازه $[t_0, t_f]$ در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{J}(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(t, x(t), u(t))dt \quad (۱۲)$$

که در آن $\mathcal{L}(t, x(t), u(t)) = \kappa_1 P + \kappa_2 u_1^2 + \kappa_3 u_2^2$ یک تابع ا سکالر با شرایط معادلات (۷) تا (۹) و همچنین شرایط اولیه (۱۰) است.

روش رگرسیون بردار پشتیبانی با حداقل مربعات کنترل بهینه مشتریان

در این بخش، قصد بر این است یک رگرسیون بردار پشتیبان با حداقل مربعات برای تصمیم‌گیری بهینه در سیاست‌های بازاریابی مشتری توسعه داده شود.

قضیه زیر وجود و منحصر به فرد بودن جواب مدل (۸)–(۹) را تضمین می‌کند.

قضـــیه ۱: متغیرهای حالت و کنترل را در $AC[t_0, t_f]$ ، فضـــای توابع اکیداً پیوســـته در نظر بگیرید. سپس کنترل بهینه (۱۲)، با محدودیت های داده شده توسط سیستم غیرخودگردان معادلات دیفرانسیل معمولی (۷)–(۹)، یک راه حل منحصر به فرد دارد.

برای بحث در مورد منحصـر به فرد بودن راه حل بهینه (۷)–(۹) با تابع هدف (۱۲)، به بخش پیاده سازی عددی در مقاله مراجعه کنید.

در اینجا گام های اساسی برای یک رگرسیون بردار پشتیبان را برای شبیه سازی حل تقریبی یک معادله تابعی به صورت کلی ارائه می‌شود.

$$\mathcal{L}u = f$$

این معادله چند عملگر دیفرانسیل و احتمالاً انتگرال دارد. سپس، فرض می‌کنیم یک تخمین تابع برای پدیده های مجهول به صورت زیر می‌باشد:

$$u(t) \approx u^M(t) = w^T\phi(t)$$

که در آن بردار وزن‌ها و توابع پایه به ترتیب هستند:

$$w = [w_0, \cdots, w_M]^T, \phi(t) = [\phi_0(t), \cdots, \phi_M(t)]^T$$

پارامتر تنظیم برابر است با $b = w_0$ و توابع پایه به گونه‌ای فرض می شوند که تابع ثابت را تولید می کنند. بردار ϕ به عنوان یک بردار پایه شناخته شده در نظر گرفته می شود که در این کار چند جمله ای فرض می‌شود. برای پیدا کردن وزن‌ها، تابع لاگرانژی به شرح زیر را معرفی می‌شود:

$$L = \frac{1}{2}w^Tw + \frac{\gamma}{2}\varepsilon^T\varepsilon + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(w^T\mathcal{L}\phi(t_i) - \varepsilon_i)$$

با فرض خطی بودن اپراتور $\mathcal{L}$ و شرایط کاروش- کان- تاکر در معادلات زیر می‌توان سیستم معادلی در قالب ماتریس زیر به دست آورد:

$$\frac{\partial L}{\partial w_k} = 0 \to w_k = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathcal{L}\phi_k(t_i), \quad (۱۳)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_k} = 0 \to \varepsilon_k = \frac{1}{\gamma}\alpha_k \quad (۱٤)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = 0 \to \mathcal{L}u(t_k) - \frac{1}{\gamma}\alpha_k = f_k \quad (۱٥)$$

قضیه ۲: مسئله دوگان را می‌توان به صورت نوشت:

$$\Omega\boldsymbol{\alpha} = f \quad (۱٦)$$

که در آن $\Omega_{i,j} = \sum_{r=1}^{n}\mathcal{L}\phi_r(t_j)\mathcal{L}\phi_r(t_i) + \frac{1}{\gamma}\delta_{ij}, f_i = f(t_i)$ و دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است.

اثبات: ماتریس (۱٦) حاصل روابط (۱۳) تا (۱٥) است. معین مثبت بودن ماتریس ضرایب $\boldsymbol{\Omega}$ منحصر به فرد بودن جواب را نتیجه می‌دهد.

شایان ذکر است که $\frac{1}{\gamma}\delta_{ij}$ یک ماتریس قطری به ماتریس ضرایب (۱٦) اضافه می‌کند. همچنین توجه داشته باشید که دستگاه به دست آمده برای معادله تابعی مشابه حالتی است که داده ها معلوم باشند، اما ساختار بلوکی به دلیل حذف پارامتر تنظیم و در نظر گرفتن آن به عنوان وزنی با شاخص

صفر در اینجا ظاهر نمی شود.

توابع باقیمانده قیدهای بهینه سازی برای رگرسیون بردار پشتیبانی برای سیر تکامل مشتریان را به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathrm{res}_1^M(t) = \dot{R}_M - (-\lambda_2 R_M + \lambda_1 C_M - \gamma(t) R_M + \alpha_1 u_1^M P_M + \alpha_2(\beta(t) + u_2^M) P_M R_M / N)$$
$$\mathrm{res}_2^M(t) = \dot{C}_M - (-\lambda_1 C_M + \lambda_2 R_M - \gamma(t) C_M + (1-\alpha_2)(\beta(t) + u_2^M) P_M R_M / N$$
$$\mathrm{res}_3^M(t) = \dot{P}_M - \left(-(\beta(t) + u_2^M) P_M R_M / N - u_1^M P_M + \gamma(t)(R_M + C_M)\right)$$

تابع لاگرانژی را به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}_M(R, C, P, u_1, u_2; \lambda) = \mathcal{J}_M(x, u) + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \mathrm{res}_j^M$$

که در آن

$$\mathcal{J}_M(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(t, x_M, u_M) dt, x_M = [R_M, C_M, P_M]^T, u_M = [u_1^M, u_2^M]$$

و λ ضرایب لاگرانژی هستند. برای بهینه سازی عددی این اپراتور بر روی بازه‌ی زمانی $[t_0, t_f]$ ابتدا باید عملگر انتگرال را گسسته شود.

$$J_{\mathcal{M}} \approx \sum_{j=0}^{M} w_{GL,j}(\kappa_1 P_j + \kappa_2 u_{1,j}^2 + \kappa_3 u_{2,j}^2) \qquad (۱۷)$$

با استفاده از انتگرال‌گیری عددی تقریب زده می‌شوند.

برای جلوگیری از هزینه محاسباتی اضافی در الگوریتم ارائه شده، نقاط ادغام با نقاط آموزشی منطبق است.

اکنون فرم رگرسیون بردار پشتیبان متغیرهای حالت و کنترل را بر حسب هسته چند جمله‌ای به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$x_i^M(t) = \sum_{j=0}^{M} w_{i,j} \phi_j(t) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\phi}, i = 1,2,3$$
$$u_i^M(t) = \sum_{j=0}^{M} \widetilde{w}_{i,j} \phi_j(t) = \widetilde{\boldsymbol{w}}^T \boldsymbol{\phi}, i = 1,2$$

که در آن توابع برداری $\boldsymbol{x}^M = [R^M, C^M, P^M], \boldsymbol{u}^M = [u_1^M, u_2^M]$ تقریب هایی برای متغیر های وضعیت و کنترل در سیستم حاکم معادلات دیفرانسیل معمولی هستند.

شکل اولیه رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات را به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\min_{w,\tilde{w},b,e} \frac{1}{2} w_u^T w_u + \frac{\gamma}{2} e_u^T e_u + \tilde{J}_M^2 \qquad (۱۹)$$

با قیدهای:

$$\mathrm{res}_1^M(t_i) = e_{R,i} \qquad (۲۰)$$

$$\mathrm{res}_2^M(t_i) = e_{C,i} \qquad (۲۱)$$

$$\mathrm{res}_3^M(t_i) = e_{P,i} \qquad (۲۲)$$

که در آن:

$$w_u = [w_{R,j}, w_{C,j}, w_{P,j}; j = 0, \dots, M]^T \text{ و } e_u = [e_{R,j}, e_{C,j}, e_{P,j}; j = 0, \dots, M]^T$$

باید توجه دا شت که شرایط اولیه به دلیل ویژگی‌های مدل جواب برای همه توابع نا شناخته، قبلاً در قیدها گنجانده شـده‌اند. مسـئله بهینه سـازی با بعد متناهی (۱۹)-(۲۲) را می توان به عنوان مثال با برنامه نوی سی درجه دوم متوالی و الگوریتم های کاهش با بی شترین شیب حل کرد. مراحل روش در الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات شرح داده شده است. حل‌کننده عددی ممکن است یک تکنیک گرادیان مبتنی بر نیوتن یا مزدوج باشـد، با این حال، از دسـتور داخلی NLPSolve در نرم‌افزار میپل استفاده شده است.

الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات

- نقاط آموزشی را انتخاب کنید.
- هسته‌ی الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات را مشخص کنید.
- تمام متغیرهای مجهول را بر پایه هسته بازنویسی کنید.
- مسئله بهینه‌سازی را بنویسید
- شرایط کاروش- کان- تاکر را اضافه کنید.
- از حل‌کننده‌ی عددی استفاده کنید.

اکنون، مدل اولیه مدنظر در قالب مجموعه‌ای از معادلات گسسته نوشته شده است که می‌توان آن

را به راحتی به یک سیستم جبری از معادلات خطی که به شکل معین ارائه شده است تبدیل کرد. شرایط بهینه در فرآیند ساخت یک سیستم خطی در نظر گرفته می شود.

برای بحث در مورد شرط بهینه بودن مسئله، فرض کنید $\overline{H}$ لاگرانژی همیلتونی برای (۱۲) و (۷) – (۹) باشد که با معادله زیر داده شده است.

$$\overline{H} = \mathcal{L}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t)^T \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) + \mu^T \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \lambda}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} + \mu^T \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \boldsymbol{u}} = 0$$

معادلات فوق در حقیقت شرایط لازم برای جواب بهینه هستند که می‌توان از آنها در الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات استفاده کرد.

جدول (٤)مقادیر پیشنهادی برای نرخ‌های تبدیل طبیعی بین انواع مختلف مشتری در مدل

نرخ‌های تبدیل طبیعی	**تعریف**	مقادیر پیشنهادی
α_1	نرخ تبدیل از R به P با متغیر کنترل u_1	۰/۰۵
α_2	نرخ تبدیل از R به C با اثرات انواع دیگر مشتری‌ها	۰/۱۰
λ_1	نرخ تبدیل از C به R بدون لحاظ کردن انواع دیگر مشتری‌ها	۰/۰۰۲
λ_2	نرخ تبدیل از C به R بدون لحاظ کردن انواع دیگر مشتری‌ها	$\lambda_1 C_0/R_0$

تکنیک یادگیری در الگوریتم پیشنهادی بر اساس مقادیر پیشنهاده شده در بازه زمانی مسئله (۲۰)–(۲۲) ارائه شده است. می‌توان برای اینکار از مجموعه جدیدی از هسته چند جمله‌ای است که یک دستگاه متعامد ایجاد می‌کند استفاده کرد. این کار را می توان با استفاده از چند جمله‌ای‌های دوگان برنشتاین معرفی شده انجام داد.

در قسمت بعد چند نمونه از ارائه می‌کنیم از شبیه‌سازی عددی برای تایید صحت و کارکرد روش رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات برای کنترل بهینه پویایی مشتری.

پیاده‌سازی عددی

در مثال‌های عددی زیر از جمله جداول و شکل‌ها، از میانگین مربعات خطا به شرح زیر استفاده می‌شود:

$$\mathrm{MSE}_u = \frac{\sum_{i=0}^{n} (u_i - \hat{u}_i)^2}{n+1}$$

که در آن $u = C, P, R$، $n+1$ تعداد نقاط آموزشی است، u_i جواب دقیق یا بهینه با دقت دو رقم اعشار در شبیه سازی عددی است و $\hat{u}_i$ جواب تقریبی است. توابع همگی در فضای $L^2(\Omega)$ فرض شده‌اند تا نظریه تقریب جهانی قابل اتلاق باشد.

همانطور که قبلا نیز ذکر شد، از میان توابع مختلف هسته، یک هسته چند جمله‌ای برای الگوریتم پیشنهادی انتخاب شده است، که دلیل این کار سادگی محاسبات، مشتقات و سیستم جبری حاصل می باشد. این انتخاب همچنین بر پیچیدگی محاسباتی تأثیر می‌گذارد که در آن زمان اجرا به عنوان یک تابع قابل قبول از نقاط آموزشی در هنگام افزایش داده‌های آموزشی رفتار می‌کند. از سوی دیگر، انتخاب شبیه سازی عددی بر اساس تکنیک هم سازی و نحوه آموزش تابع باقی‌مانده برای به حداقل رساندن منجر به همگرایی طیفی می‌شود. در مثال زیر، هدف ما بررسی اثرات تغییر نرخ ها بر سیستم است.

در ضمن، از آنجایی که یک هسته چند جمله‌ای برای شبیه سازی عددی تکامل پویایی مشتری استفاده شده است تعداد داده‌های آموزشی را به $N = 10$ محدود می کنیم تا رفتارهای ناخواسته چند جمله‌ای‌های درجه بالا جلوگیری کنیم.

سیستم زیر را به عنوان یک نمونه موردی لحاظ می‌شود:

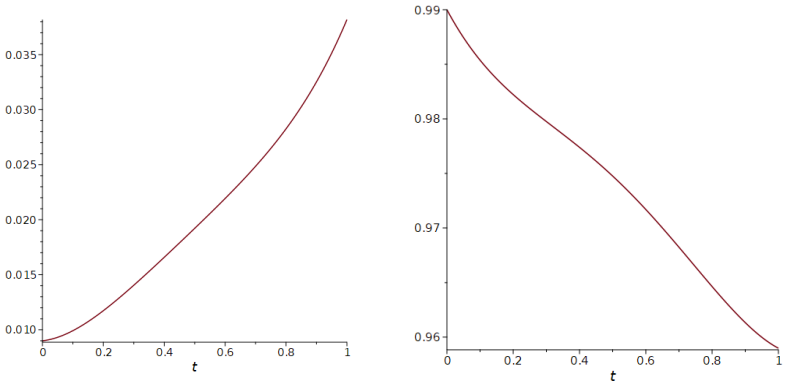
$$\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 1.5, \kappa_3 = 0.01$$
$$\gamma = 10^6,$$
$$\gamma_0 = 0.1,$$
$$\gamma_1 = \gamma_0,$$
$$\gamma_2 = 0.01 + \frac{0.18}{1 + \exp(-2t + 7)}$$
$$\gamma_3 = \gamma_0(1 - 0.9\cos(2\pi t + 0.26))$$
$$\beta_1 = 0.01 + \frac{0.99}{1 + \exp(-2t + 8)}$$
$$\beta_2 = 0.01 - 0.99\left(1 - \frac{0.99}{1 + \exp(-2t + 6)}\right),$$
$$\beta_3 = 0.01 + 0.49(1 - 2\cos(2\pi t + 0.26)),$$
$$\alpha_1 = 0.05,$$
$$\alpha_2 = 0.1,$$
$$\lambda_1 = 0.002$$
$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 c_0}{r_0}$$

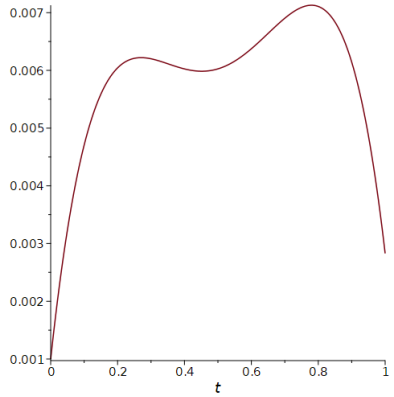
در حل معادلات بالا نرخ های تبدیل به عنوان توابع در زمان در رابطه‌ی (۱) نشان داده شده است.

این مقادیر به عنوان توابع تناوبی انتخاب می شـــوند. از آنجایی که راه حل دقیقی برای مســـئله وجود ندارد، از بهترین سناریو برای مقایسه و اعتبارسنجی شبیه سازی عددی الگوریتم پیشنهادی استفاده می کنیم. الگوریتم پیشنهادی با نقاط آموز شی مساوی می‌تواند فراوانی، مشتریان ارجاعی، بالقوه و دائمی و همچنین متغیرهای کنترل را مشـــخص کند. مشـــاهده می شـــود که کل جمعیت به این ســـه قســـمت تقسیم می شود، به عنوان مثال در وسط بازه زمانی که مجموع سه مقدار برابر می‌شود با ۱ می شود.

R (0.2) = 0.00605 ،P (0.2) = 0.98222 ،C (0.2) = 0.01173
R (0.6) = 0.00638 ،P (0.6) = 0.97169 ،C (0.6) = 0.02193
R (0.8) = 0.00711 ،P (0.8) = 0.96463 ،C (0.8) = 0.02826
R (1.0) = 0.00282 ،P (1.0) = 0.95898 ،C (1.0) = 0.03818

شکل ۱ مقدار تکامل C، P و R را نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که با گذر زمان مشتریان دائمی افزایش پیدا می‌کند و مشـــتریان بالقوه کاهش پیدا می‌کند. با این حال، تعداد مشـــتریان ارجاعی حاکی از رشد سریع در ابتدای بازه‌ی زمانی و داشتن یک رویه‌ی افزایشی نوسانی در ادامه کار است و در پایان دوره کاهشی می شود. این توابع با استفاده از هسته‌های چندجمله‌ای ساده در شکل ۱ در فرآیند شبیه‌سازی به دست می‌آیند. یافته‌ها حاکی از هزینه محاسباتی قابل قبولی از نظر مرتبه پیچیدگی چند جمله ای می‌باشد.





شکل (۱)چپ: مشتریان دائمی، راست: مشتریان بالقوه و پایین: مشتریان ارجاعی

بحث و نتیجه گیری

در این مطالعه، ما به بررسی عمیق یک مسئله کنترل بهینه پیشرونده پرداخته‌ایم که در آن پویایی های مشتری به کمک مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل غیرخطی و غیرخودکار توصیف شده‌اند. پیچیدگی‌های ناشی از خصوصیات غیرخطی بسیار قوی این معادلات، کاربرد روش‌های تحلیلی سنتی برای یافتن پاسخ های دقیق را عملاً بی‌نتیجه می‌سازد. با توجه به این چالش ها، ما استفاده از تکنیک‌های پیشرفته یادگیری ماشین را به عنوان یک راه‌حل، مطرح کرده‌ایم و به خصوص رویکرد رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات با استفاده از هسته چندجمله‌ای متناسب را تدوین نموده‌ایم.

همانطور که در شکل(۱) مشخص است مشتریان دائمی افزایش پیدا می کند، تعداد مشتریان بالقوه رو به کاهش و مشتریان ارجاعی حاکی از رشد سریع در ابتدای بازه‌ی زمانی و داشتن یک رویه افزایشی در ادامه کار است که این نشانگر سیاست مناسب بازاریابی شرکت مذکور می‌باشد.

در اخر برای اعتبارسنجی مدل پشتیبانی از نظر کارشناسی: مدل مورد بررسی و تایید متخصصین و کار شنا سان صنعت قرار گرفته ا ست که این امر می‌تواند به عنوان یک نشانه‌ی قوی برای اعتبار مدل باشد.

و از طرفی دیگر تمام مراحل ساخت و تست مدل شفاف و مستند شده است و پشتوانه‌ی ریاضیات دارد که این خود بیانگر این است که مدل به خوبی قابل درک و قابل تجزیه و تحلیل است.

این فرآیند پیش‌بینی به تعیین پاسخ‌ها به شکل بردار در یک فضای محدود می‌پردازد که توسط فرآیند دیسکرتیزاسیون با پارامترهای نامعین مشخص می‌شود. تمرکز اصلی آموزش مدل بر روی کمینه‌سازی تابع باقی‌مانده در کل دامنه مسئله است که امکان پیش‌بینی دقیق‌تری از پارامترهای نامعلوم

را فراهم آورده و در نتیجه، تقریب بهینه‌ای از راه‌حل واقعی را ارائه می‌دهد.

بر اساس نتایج به دست آمده، رویکرد آموزشی که بر مدل‌سازی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های با درجه ی کمتر یا مساوی ۱۰ تکیه دارد، به شکل قابل‌توجهی مؤثر بوده و توانسته است محدودیت نگهداری صد در صدی تعداد کل مشتریان را محقق سازد. جواب‌های تقریبی حاصل، به صورت مجموعه‌ای از معادلات جبری بیان می‌گردند که نه تنها سهولت و کارآیی زمانی بالایی در پردازش‌های محاسباتی به ارمغان می‌آورند، بلکه با روش های کمینه‌سازی مربعاتی در هماهنگی هستند که در آن ها از چندجمله‌ای‌های درجه دوم استفاده شده است. این تطبیق پذیری بین راه‌حل‌های جبری و تکنیک‌های یادگیری ماشین به کار رفته در این تحقیق، نشان‌گر قدرت برجسته مدل‌سازی ما در مواجهه با پیچیدگی‌های پویایی‌های غیرخطی است.

کاربردی کردن این تحقیق در زمینه‌های مختلف کسب و کار، از جمله در طراحی سیاست‌های بازاریابی مؤثر، تجزیه و تحلیل الگوهای رفتاری مشتریان، بهبود راهبردهای مدیریت ارتباط با مشتری و ارتقاء خدمات پس از فروش، امکان‌پذیر است. اعتبار و دقت این تحقیق توسط آزمایش‌های عددی گسترده‌ای که با بهره‌گیری از نرم‌افزار میپل انجام شده، تأیید گردیده است. این مطالعه پیش‌بینی می کند که استراتژی‌ها و تکنیک‌های معرفی شده می‌توانند به عنوان ابزارهای کاربردی و قدرتمندی در تصمیم‌گیری‌های استراتژیک و تاکتیکی عمل کنند، به ویژه در شرایطی که با محدودیت‌های اطلاعاتی و پیچیدگی‌های عملیاتی مواجه هستیم.

محدودیت‌ها

پژوهش حاضر محدودیت‌هایی نیز دارد. در این تحقیق، تک‌تک عوامل کنترلی به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار نگرفته‌اند، که این خود بخشی از برنامه‌ریزی‌های ما برای تحقیقات آتی است. علاوه بر این، فرض بر این است که رفتارها در دامنه‌هایی با توابع صاف و بدون نوسانات ناگهانی قرار دارند، اما تجزیه و تحلیل نوسانات سریع و پیچیده‌تر زمانی نیز بخشی از دستورکار ما برای پژوهش‌های آینده به شمار می‌روند.

در مورد کنترل بهینه پویایی مشتری با استفاده از روش یادگیری ماشین با هسته چندجمله ای، بعضی از محدودیت‌های ممکن شامل موارد زیر می‌باشد:

۱. د ستر سی به داده‌های کافی: برای اجرای الگوریتم‌های یادگیری ما شین به داده‌های بزرگ و کیفیت

بالا نیاز باشد که محدودیت‌های مربوط به جمع‌آوری و پردازش این داده‌ها موجب مشکل شود.
۲. پیچیدگی محاسباتی: الگوریتم‌های یادگیری ماشین با هسته چندجمله ای نیازمند محاسبات پیچیده و زمان‌بر هست که نیاز به منابع محاسباتی قدرتمند دارد.
۳. نیاز به تنظیم پارامترها: برای بهینه‌سازی فرایند یادگیری و اجرای مدل، نیاز به تنظیم و بهینه‌سازی پارامترها و هایپرپارامترها وجود دارد که ممکن است زمان‌بر و دشوار باشد.
٤. حساسیت به نویز در داده‌ها: مدل‌های یادگیری ماشین، حساس به نویز در داده‌ها باشند که ممکن است منجر به بیش‌برازش[۱] شوند و عملکرد آنها را تضعیف کنند.
۵. تفسیرپذیری مدل: معمولاً از مدل‌های یادگیری ماشین پیچیده تفسیرپذیری پایینی داشته باشند که ممکن است مانع از درک دقیق عملکرد مدل شوند.

برای پیاده‌سازی این روش، لازم است محدودیت‌های فنی و محاسباتی مورد نیاز را به دقت در نظر گرفته و بررسی کرد.

پیشنهادات آتی

در پایان، امیدواریم که نتایج ارائه شده در این مقاله بتواند به عنوان یک ابزار مفید در افزایش کارایی و بهبود تصمیم‌گیری‌های استراتژیک در زمینه بازاریابی و مدیریت مشتری عمل کند و زمینه‌ساز پیشرفت‌های بیشتر در حوزه‌های تحلیل پویایی سیستم‌ها و کنترل بهینه شود.

با توجه به موضوع کنترل بهینه پویایی مشتری با استفاده از روش یادگیری ماشین با هسته چندجمله‌ای، پیشنهادات آتی برای پژوهش‌های آینده می‌تواند شامل موارد زیر باشد:
۱. ارزیابی عمقی عملکرد مدل
*انجام آزمایش‌های گسترده با داده‌های متنوع برای ارزیابی کارایی مدل‌های یادگیری ماشین با هسته چندجمله‌ای در شرایط مختلف.
*توسعه‌ی معیارهای برای مقایسه عملکرد این مدل‌ها نسبت به تکنیک‌های سنتی و جدید در کنترل پویایی مشتری.
*بررسی اثربخشی مدل در حل مشکلات واقعی بازار، مانند افزایش نگهداشت مشتری و بهینه‌سازی سیاست‌های بازاریابی.

---

[۱] Overfitting

۲. بهره‌گیری از فناوری‌های پردازش موازی

*آزمایش اجرای الگوریتم‌ها بر روی سخت‌افزارهای پیشرفته نظیر نماپردازشگرها و معماری‌های پردازش موازی برای کاهش زمان آموزش مدل‌ها.

*ارزیابی تأثیر سرعت پردازش بر روی عملکرد و همچنین بر روی توانایی مدل برای پردازش داده‌های بزرگ و پیچیده.

۳. توسعه روش‌های بهینه‌سازی جدید

*کاوش در استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی جدید و پیچیده مانند بهینه‌سازی ازدحام ذرات یا الگوریتم ژنتیک، برای بهبود عملکرد مدل‌های یادگیری ماشین.

*تطبیق پارامترهای الگوریتم و مدل‌ها برای حل مشکلات خاص کنترل بهینه با استفاده از این روش‌های بهینه‌سازی.

٤. بررسی تأثیر پارامترها و هایپرپارامترها

*اجرای آزمون‌های سیستماتیک برای درک تأثیر هایپرپارامترها، نظیر نرخ یادگیری یا تعداد درختان در مدل‌های به خصوص بر کارایی نهایی.

*به‌کارگیری ابزارهای اتوماسیون برای تنظیم هایپرپارامترها، مانند جستجوی گرید یا بهینه‌سازی بیزی، به منظور یافتن بهترین تنظیمات برای هر مسئله به صورت خودکار.

۵. مقایسه عملکردی با روش‌های دیگر

*سازماندهی مطالعه مقایسه‌ای برای ارزیابی نتایج حاصل از مدل‌های یادگیری ماشین با هسته چندجمله‌ای در مقایله با تکنولوژی‌های پیشرفته دیگر مانند شبکه‌های عصبی عمیق.

*تجزیه و تحلیل نقاط قوت و ضعف هر تکنیک از دیدگاه‌های مختلف: دقت پیش‌بینی، زمان آموزش، نیازهای محاسباتی و سهولت پیاده‌سازی.

به‌طور خلاصه، این پیشنهادات کاربردی با هدف بهبود روش‌ها، افزایش دقت مدل‌ها و کاهش هزینه‌های عملیاتی در زمینه کنترل بهینه پویایی مشتری طراحی شده‌اند. اجرای این پیشنهادات می تواند به توسعه رویکردهای نوین و کارآمد در استفاده از یادگیری ماشین برای حل چالش‌های صنعتی منجر شود.

تعارض و منافع

هیچ گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

منابع و مآخذ

Bakshizadeh, Nastaran, Azimi, Parham. (2019). Optimization of a supply chain network using the simulation technique and Harmony Search algorithm. **Industrial Management Studies,** 17(54), 67-109. https://doi.org/10.22054/jims.2019.2247.1069.

Berman, B. (2016). Referral marketing: Harnessing the power of your customers. **Business Horizons**, 59(1), 19-28.https://doi.org/10.1016/j.bushor.2015.08.001.

Castillo, A., Benitez, J., Llorens, J., Luo, X. R. (2021). Social media-driven customer engagement and movie performance: Theory and empirical evidence. **Decision Support Systems**, 145:113516. https://doi.org/10.1016/j.dss.2021.113516.

Ekasari, S., Judijanto, L., & Vandika, A. Y. (2024). The Role of Artificial Intelligence and Machine Learning in Precision Targeting Revolutionizing Marketing Strategies. Jurnal Ekonomi dan Bisnis, 2(3), 347-361.

Foroudi, P., Gupta, S., Sivarajah, U., & Broderick, A. (2018). Investigating the effects of smart technology on customer dynamics and customer experience. **Computers in Human Behavior**, 80, 271-282. https://doi.org/10.1016/j.chb.2017.11.014.

Islam, S., Amin, S. H., & Wardley, L. J. (2024). A supplier selection & order allocation planning framework by integrating deep learning, principal component analysis, and optimization techniques. **Expert Systems with Applications**, 235, 121121. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121121.

Ledro, C., Nosella, A., & Dalla Pozza, I. (2023). Integration of AI in CRM: Challenges and guidelines. Journal of Open Innovation: Technology, **Market, and Complexity**, 9(4), 100151. https://doi.org/10.1016/j.joitmc.2023.100151.

Li, X., Zhuang, Y., Lu, B., & Chen, G. (2019). A multi-stage hidden Markov model of customer repurchase motivation in online shopping. **Decision Support Systems**, 120, 72-80. https://doi.org/10.1016/j.dss.2021.113516.

Lyutov, A., Uygun, Y., & Hütt, M. T. (2019). Managing workflow of customer requirements using machine learning. **Computers in Industry,** 109, 215-225. https://doi.org/10.1016/j.compind.2019.04.010.

Mehrkanoon, S., & Suykens, J. A. (2015). Learning solutions to partial differential equations using LS-SVM. **Neurocomputing**, 159, 105-116. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.02.013.

Mehrkanoon, S., Falck, T., & Suykens, J. A. (2012). Approximate solutions to ordinary differential equations using least squares support vector machines. **IEEE transactions on neural networks and learning systems**, 23(9), 1356-1367. https://doi.org/10.1109/TNNLS.2012.2202126.

Mosaddegh, A., Albadvi, A., Sepehri, M. M., & Teimourpour, B. (2021). Dynamics of customer segments: A predictor of customer lifetime value**.** **Expert Systems with Applications**, 172, 114606. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.114606.

Ortakci, Y., & Seker, H. (2024). Optimising customer retention: An AI-driven personalised pricing approach. **Computers & Industrial Engineering**, 188, 109920. https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.109920.

Pakniyat, A., Parand, K., & Jani, M. (2021). Least squares support vector regression for differential equations on unbounded domains. Chaos, **Solitons & Fractals**, 151, 111232. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111232.

Parand, K., Hasani, M., Jani, M., Yari, H. (2021). Numerical simulation of Volterra–Fredholm integral equations using least squares support vector regression. **Computational and Applied Mathematics**; 40:1-5. https://doi.org/10.1007/s40314-021-01471-0.

Pereira, A. M., Moura, J. A. B., Costa, E. D. B., Vieira, T., Landim, A. R., Bazaki, E., & Wanick, V. (2022). Customer models for artificial intelligence-based decision support in fashion online retail supply chains. **Decision Support Systems**, 158, 113795. **https://doi.org/10.1016/j.dss.2022.113795.**

Rosa, S., Rebelo, P., Silva, C. M., Alves, H., & Carvalho, P. G. (2018). Optimal control of the customer dynamics based on marketing policy. **Applied Mathematics and Computation**, 330, 42-55. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.027.

Shawky, S., Kubacki, K., Dietrich, T., & Weaven, S. (2020). A dynamic framework for managing customer engagement on social media. **Journal of Business Research**, 121, 567-577. https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2020.03.030.

Snoeck, A., Merchán, D., & Winkenbach, M. (2020). Route learning: A machine learning-based approach to infer constrained customers in delivery routes. **Transportation Research Procedia**, 46, 229-236. https://doi.org/10.1016/j.trpro.2020.03.185.

Sun, Y., Liu, H., & Gao, Y. (2023). Research on customer lifetime value based on machine learning algorithms and customer relationship management analysis model. **Heliyon**, 9(2). https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e13384.

Taboada, H., Davizón, Y. A., Espíritu, J. F., & Sánchez-Leal, J. (2022). Mathematical Modeling and Optimal Control for a Class of Dynamic Supply Chain: A Systems Theory Approach. **Applied Sciences**, 12(11), 5347. https://doi.org/10.3390/app12115347.

Taufik, I., & Kurniawan, A. A. (2023). The Role of Artificial Intelligence in Digital Marketing Innovation. In Prosiding Seminar Nasional Ilmu Manajemen, Ekonomi, **Keuangan dan Bisnis,** 2(1), 29-40. https://doi.org/10.55927/snimekb.v2i1.4602.

COPYRIGHTS

© 2023 by the authors. Licensee Advances in Modern Management Engineering Journal. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).