فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال هشتم/ شماره سی‌ویکم/ پائیز ۱۳۹۸

بررسی کارایی انتخاب پرتفوی بهینه بر اساس مدل چولگی در محیط فازی

احسان قدردان
مربی گروه حسابداری دانشگاه پیام نور، ایران
e.gh.pnu@gmail.com

خسرو فغانی ماکرانی
دانشیار گروه حسابداری دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری، ساری، ایران
Kh.makrani@chmail.ir

سمیرا سلگی
کارشناس ارشد حسابداری دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، همدان، ایران (نویسنده مسئول)
Samira_solgi@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۷/۱۳ تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۱/۲۸

چکیده

مهمترین مسئله مطرح برای سرمایه گذاران به خصوص در آغاز فعالیت اقتصادی، مسئله نحوه تخصیص سرمایه به یک یا چند گزینه مختلف سرمایه گذاری است تا ضمن داشتن حداکثر بازده، حداقل ریسک را متحمل شوند. این موضوع در ادبیات اقتصادی به عنوان مسئله انتخاب پرتفوی مطرح است. در پژوهش حاضر، عملکرد بهینه سازی کلاسیک پرتفوی(مدل میانگین واریانس مارکویتز) در صورت استفاده از مدل مبتنی بر چولگی در محیط فازی به عنوان تابع هدف بررسی شده است. در این پژوهش به بررسی ۱۹۵ پرتفوی ماهانه در یک دوره ۱۰ ساله(۱۳۸۶-۱۳۹۵) درمورد شرکت های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران پرداخته شده است و ریسک و بازدهی هر پرتفوی براساس دو مدل بهینه سازی چولگی در محیط فازی و کلاسیک تخمین زده شد. در مرحله بعد با استفاده از آزمون میانگین تفاوت، به بررسی وجود تفاوت معناداری بین ریسک و بازده پیش بینی شده در دو مدل پرداخته شد. نتایج پژوهش حاکی از آن است که، ریسک و بازده پیش بینی شده در مدل چولگی با ریسک و بازده پیش بینی شده در مدل کلاسیک تفاوت معناداری دارد.

واژه‌های کلیدی: پرتفوی بهینه، ریسک پیش بینی شده، بازده پیش بینی شده، مدل چولگی، مدل کلاسیک.

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر روند مباحث سرمایه‌گذاری از شیوه‌های انتخاب سهام به سمت مدیریت پرتفوی متمایل بوده که بدین منظور تلاش‌های زیادی در جهت یافتن شیوه‌هایی برای ارزیابی و انتخاب پرتفوی بهینه با بازده و ریسک مطلوب صورت گرفته است. از آنجا که کاهش ریسک و افزایش بازدهی دو روی سکه سرمایه گذاری هستند، موضوع انتخاب و تشکیل پرتفوی بهینه همواره بحثی اساسی در مباحث سرمایه گذاری بوده و یکی از مسایلی است که ذهن بسیاری از فعالان بازار سرمایه را به خود درگیر نموده است. همچنین، مساله انتخاب مجموعه بهینه‌ای از دارایی‌ها، یکی از نظریه‌های بازار سرمایه است که اهمیت خاصی نیز در مباحث اقتصاد خرد و کلان دارد.

در دنیای امروزی یکی از چالش‌های سرمایه‌گذاری در بازده دارایی ها، عدم اطمینان نسبت به وقایع آینده و پیامدهای آن می‌باشد. رویکرد سنتی در مدل کردن این عدم اطمینان، درنظر گرفتن ریسک دارایی ها به صورت یک متغیر تصادفی است؛ اما این رویکرد از یک سو باعث تحمیل شدن فرضیات غیر واقعی در انتخاب پرتفوی بهینه می‌شود و از سوی دیگر مشکلات زیادی را در پیدا کردن توزیع احتمال و پارامترهای مربوطه در پی خواهد داشت(بهزادی و بختیاری، ۱۳۹۳). آنچه که مدل‌های مختلف بهینه سازی پرتفوی را از یکدیگر متمایز می‌سازد، معیار محاسبه ریسک است. انحراف معیار به عنوان اولین معیار ریسک به کار گرفته شده در این زمینه به وسیله مارکوینز معرفی گردید. اما این معیار دارای کاستی هایی بود که محققان را بر آن داشت تا با به کار بردن معیارهای مختلف، مدل های انتخاب سبد سهام را توسعه دهند. در همین راستا، در پژوهش حاضر سعی شده است کارایی انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از مدل چولگی در محیط فازی، و همچنین مقایسه ریسک پرتفوی انتخاب شده با استفاده از مدل چولگی با ریسک پرتفوی انتخاب شده با استفاده از مدل کلاسیک(مدل میانگین – واریانس) بررسی و سنجیده شود. عدم وجود ابزار و مقیاسی برای سنجش، بررسی، و ارائه این چنین مدلی در داخل کشور سبب شد تا این پژوهش، تأثیر مدل چولگی در انتخاب پرتفوی بهینه را درک و پوشش دهد و منجر به توسعه مدیریت کاربردی و استفاده مدل چولگی در انتخاب پرتفوی بهینه شود.

تبیین ابعاد و متغیرهای اثرگذار بر شیوه انتخاب پرتفوی سرمایه‌گذاری در سطح کلان و بررسی چگونگی مدل‌سازی این متغیرها در قالب الگویی ریاضی جهت کاهش ریسک و بهبود تصمیم گیری سرمایه‌گذاران جهت انتخاب بهینه پرتفوی از اهداف اساسی این پژوهش به شمار می‌رود. ضمن اینکه از ویژگی های این الگو، استفاده از آن را به گروهی از سرمایه‌گذاران محدود نکرده، و کلیه سرمایه‌گذاران و کلیه مدیران شرکت های فعال در بورس اوراق بهادار، سهامداران حقوقی و حقیقی و مدیران شرکت های سرمایه گذاری می‌توانند از یافته این پژوهش که با درنظرگرفتن شرایط خاص بازار سرمایه ایران ارائه شده، استفاده‌کنند. با توجه به ارائه تعریف جدیدی از بهینه سازی مدل چولگی، این الگو می‌تواند حقایق بیشتری در خصوص بازار سرمایه ایران و تشکیل پرتفوی به خصوص در صندوق‌های سرمایه‌گذاری ارائه نماید. و همچنین با توجه به واردکردن متغیری با عنوان نرخ بازدهی و ریسک به تقابل و تعامل بازار سرمایه و بازار پول پی برد.

۲- بیان مسئله

مفاهیم بهینه‌سازی سبد سهام و تنوع‌بخشی به مثابه ابزاری در راستای توسعه و فهم بازارهای مالی و تصمیم‌گیری مالی درآمده‌اند. انتشار نظریه پرتفوی سهام مارکویتز، اصلی‌ترین و مهمترین موفقیت در این راستا بود(فابوزی و دیگران، ۲۰۰۷). از زمانی که مارکویتز مدل خود را منتشر کرد(مدل کلاسیک)، این مدل تغییرات و بهبودهای فراوانی را در شیوه نگرش مردم به سرمایه‌گذاری و سبد سهام ایجاد کرد و به عنوان ابزاری کارا برای بهینه‌سازی سبد سهام به کار گرفته شد(لی و همکاران، ۲۰۰۹). مارکویتز پیشنهاد کرد که سرمایه گذاران ریسک و بازده را به صورت توامان در نظر گیرند و میزان تخصیص سرمایه بین فرصت‌های سرمایه گذاری گوناگون را بر اساس تعامل بین این دو انتخاب نمایند(فابوزی و دیگران، ۲۰۰۷). در واقع، مدل پرتفوی مارکویتز که واریانس را به عنوان شاخص ریسک ارائه داد، مسئله بهینه سازی است که بر اساس دو معیار بازده منتظره و ریسک به دنبال پیدا کردن تعادل منطقی میان این دو معیار جهت به دست آوردن حداقل ریسک به ازای سطح معینی از بازده منتظره و یا حداکثر بازده منتظره در سطح مشخصی از ریسک می باشد. بعد از این مدل، محققان مدل های انتخاب سبد سهام را با استفاده از معیارهای ریسک مختلف توسعه دادند. از جمله مارکویتز(۱۹۵۹) در پژوهش دیگری نیمه واریانس را برای معیار ریسک بکار گرفت. کانو و یامازاکی (۱۹۹۱) قدر مطلق انحراف از میانگین را به عنوان معیار ریسک در نظر گرفتند و مدل میانگین - قدرمطلق انحراف از میانگین خود را ارائه دادند. روکافلر و یوراسر(۲۰۰۰) ریسک سرمایه گذاری را برای بازده از پیش تعیین شده ارائه نمودند و مدل میانگین - ارزش در معرض خطر شرطی را ارائه کردند. خصوصیت بارز تمامی این مدل ها در این است که در آن ها تنها دو گشتاور اول توزیع بازده یعنی میانگین و واریانس به حساب آورده شده است و با فرض تصادفی بودن بازده دارایی ها است(کانو و همکاران، ۱۹۹۳). و معمولا بر این فرض حاکم است که سرمایه گذار تمام اطلاعات لازم برای تصمیم گیری را در اختیار دارد. اما اطلاعات معمولا ناقص و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان صورت می گیرد و همواره برخی عوامل غیرتصادفی بر بازده دارایی ها تاثیرگذار است(لیو و لیو، ۲۰۰۲). در حالی که بسیاری از محققان معتقد بودند که بدون داشتن اطلاعاتی مبنی بر متقارن بودن توزیع بازده، نمی توان گشتاورهای بالاتر از جمله گشتاور سوم را در نظر نگرفت. در نتیجه، در برخی مطالعات(مائو،۱۹۷۰؛ کانو و سوزوکی، ۱۹۹۵) مفهوم تعادل منطقی میان میانگین و واریانس توسعه داده شد تا معیار چولگی توزیع بازده را نیز در برگیرد. بدین ترتیب مدل توسعه یافته میانگین - واریانس - چولگی به منظور انتخاب بهینه پرتفوی معرفی گردید، که در آن فرض بر این بود با توجه به بازارهای متغیر کنونی و هم چنین ناکافی بودن داده های در دست برای سرمایه گذار، منطقی است که بازده ها به صورت فازی در نظر گرفته شوند(آرناس و همکاران، ۲۰۰۱؛ لیو و همکاران، ۲۰۰۳). در نتیجه به دلیل کارآیی منطق فازی برای لحاظ کردن نظرات کارشناسی و عدم اطمینان موجود در بازارهای مالی، استفاده از این منطق می تواند یکی از راه حل های مفید برای مدل کردن بازده دارایی ها در مسئله پرتفوی باشد.

منطق فازی برای اولین بار توسط لطفی زاده معرفی شد(لطفی زاده، ۱۹۶۵). منطق فازی ابزاریست قدرتمند برای توصیف عدم اطمینان در شرایطی که تصمیم گیرنده با عدم اطمینان مواجه است. پس از آن تئوری امکان برای مقابله با عدم اطمینان نیز توسط لطفی زاده معرفی شد و توسط دوبویس توسعه داده شد(دوبویس و

همکاران، ۱۹۹۸؛ لطفی زاده، ۱۹۹۹). با توجه به این مسائل محققان به این نتیجه رسیدند که استفاده از منطق فازی، که بازده ها در آن به عنوان یک عدد فازی درنظر گرفته می شود می تواند مفید واقع شود(تاناکا و جیو، ۱۹۹۹؛ کارلسون و همکاران، ۲۰۰۲). در ادامه چندی از تحقیقات انجام شده در این زمینه آمده است.

باتاچاریا و همکاران(۲۰۰۹) با استفاده از اندازه اعتبار مدل خود را مبتنی بر میانگین، آنتروپی و چولگی ارائه دادند و بازده دارایی ها را عدد فازی مثلثی در نظر گرفتند و در انتها بوسیله شبیه سازی فازی و الگوریتم ژنتیک مسئله را حل کردند. آراشیوگلو و همکاران (۲۰۱۱)، طی پژوهشی که روی بورس اوراق بهادار استانبول انجام دادند به این نتیجه رسیدند که بازده پرتفوی، در زمانی که چولگی به مدل میانگین - واریانس هری مارکویتز اضافه گردد تغییرات قابل توجهی خواهد داشت. فیلد و همکاران(۲۰۱۲)، پرتفوی مارکویتز را با ترکیب، میانگین-واریانس- چولگی در عملکرد سرمایه گذاران گسترش دادند و تحقیقات آنها نشان می دهد که علاوه بر بازده، نقد شوندگی نیز برای سرمایه گذاران یک نگرانی است و هر لحظه به عنوان یک عامل جداگانه در عملکرد سرمایه گذاران دخیل است. به این نتیجه رسیدند که اضافه کردن چولگی در هماهنگ سازی پرتفوی بهینه به همراه اضافه کردن ۴مرحله اول نقد شوندگی الزامیست. کیم و همکاران(۲۰۱۴)، در پژوهش خود به این نتیجه رسیدند که روش کلاسیک در انتخاب پرتفوی بهینه مشکلات محاسباتی را نادیده گرفته است و برای رفع این مشکل پیشنهاد دادند که به مدل، واریانس–میانگین مارکویتز باید عدم تقارن اضافه گردد. باتاچاریا و همکاران(۲۰۱۴) نیز در بررسی های خود دریافتند که با به حداکثر رساندن عدم تقارن و به حداقل رساندن واریانس و کراس آنتروپی، انتخاب پرتفوی بهینه معقول‌تر می باشد.

شاه محمدی و همکاران(۱۳۹۱)، در بررسی های خود از پرتفوی مبتنی بر مدل میانگین-واریانس-چولگی استفاده کرده و به منظور تطبیق هرچه بیشتر مدل با دنیای واقعی، بازده‌های سهام را به صورت متغیرهای فازی در نظر گرفته اند. در روش ارائه شده از الگوریتم ژنتیک به منظور جستجوی پرتفوی و از شبکه عصبی مصنوعی آموزش داده شده با شبیه سازی فازی جهت تخمین بازده و ریسک پرتفوی استفاده شده است. بهزادی و بختیاری(۱۳۹۳)، در پژوهش خود مدلی بر مبنای میانگین- آنتروپی- چولگی برای حل مسأله بهینه سازی پرتفوی ارائه داده اند، و برای مقایسه این مدل با مدل کلاسیک از شاخص عملکرد اقتصادی استفاده شده است. و با به کار بردن داده‌های بورس اوراق بهادار تهران دریافتند مدلی که بر مبنای میانگین-آنتروپی -چولگی است دارای شاخص عملکرد اقتصادی بالاتری است. رستمی و همکاران(۱۳۹۴) مدل هایی که گشتاورهای مراتب بالاتر(چولگی و کشیدگی) در آن ها در نظر گرفته شده باشد را برای انتخاب پرتفوی بهینه سهام در محیط فازی مورد استفاده قرار دادند. برای محاسبه گشتاورها از تئوری اعتبار و از شاخص عملکرد اقتصادی برای محاسبه کارایی مدل های ارائه شده استفاده نمودند. با بکار بردن داده های بورس اوراق بهادار تهران نشان داده شد که در نظر گرفتن گشتاورهای مراتب بالاتر موجب بهبود کارایی پرتفوی بدست آمده خواهد شد. شیری قهی و همکاران(۱۳۹۶) در مطالعه تطبیقی مدل بهینه سازی پرتفوی چند دوره ای چند هدفه در محیط اعتبار فازی با معیار های متفاوت ریسک از سه مدل بهینه سازی پرتفوی بهره گرفتند. نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد پرتفوهای بهینه با در نظر

گرفتن معیارهای شارپ و ترینر نشان داد، مدل میانگین- ارزش در معرض خطر میانگین نسبت به دو مدل میانگین- نیم آنتروپی و میانگین- ارزش در معرض خطر عملکرد بهتری دارد.

۳- فرضیه های پژوهش

از آنجاییکه در پژوهش حاضر هدف مقایسه دو معیار بازده و ریسک پرتفوی در بهینه سازی کلاسیک و پرتفوی مبتنی بر چولگی می باشد، بنابراین فرضیه ها به شرح زیر بیان می گردند، که هرکدام نیز در سه سطح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ به طور جداگانه مورد بررسی قرار می گیرند:

فرضیه اول: بازده پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی با مدل مبتنی بر چولگی از بازدهی پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک کاراتر است.

فرضیه دوم: ریسک پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی با مدل مبتنی بر چولگی از ریسک پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک کاراتر است.

۴-روش شناسی پژوهش

روش پژوهش حاضر با توجه به هدف، کاربردی و طرح آن از نوع شبه تجربی است و با توجه به روش پژوهش، براساس روش های توصیفی و همبستگی صورت گرفته است. در این پژوهش، با استفاده از نرم افزار ره آورد نوین و به روش کتابخانه ای، اطلاعات مربوط به شرکت های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار در فاصله زمانی ۱۳۸۶-۱۳۹۵(دوره ده ساله) بررسی و ۱۹۵ شرکت انتخاب گردید. با استفاده از برنامه Excel، به تفکیک هر سال به انتخاب شرکت‌ها براساس نسبتی از میانگین ارزش روز معاملات آن ها از کل ارزش روز معاملات بازار پرداخته شد. سپس میانگین بازدهی شرکت ها یمنتخب از بازده روزانه شرکت ها محاسبه شد و متغیر فازی که نشان دهنده بازده اوراق بهادار می باشد و از نوع فازی مثلثی است و از سه کران بالا، کران پایین و حد وسط تشکیل می شود، توسط بازده روزانه شرکت ها محاسبه می شود. در ادامه با استفاده از انحراف معیار، جدول ماتریس واریانس- کوواریانس را تشکیل داده که همراه میانگین بازدهی شرکت‌ها توسط نرم‌افزارlingo جهت بهینه‌سازی پرتفوی به دو روش مدل مبتنی بر چولگی و کلاسیک «میانگین - واریانس مارکویتز» با استفاده از میانگین بازدهی و ریسک شرکت‌های مذکور پرداخته شد. خروجی این دو روش بهینه‌سازی به ترتیب محاسبه، وزن هریک از دارایی‌ها در ترکیب پرتفوی و ریسک و بازده پیش‌بینی شده پرتفوی می‌باشد. در پایان، مقایسه و تعیین تفاوت معناداری این دو روش بهینه‌سازی، جهت تصمیم‌گیری در خصوص کارایی روش پیشنهادی در پژوهش حاضر، توسط نرم‌افزار تحلیل آماری Spss، به بحث و تجزیه و تحلیل گذاشته شده است.

۵- مدل پژوهش و اندازه گیری پارامترهای آن

۵-۱- مدل کلاسیک انتخاب پرتفوی

مدل میانگین-واریانس مارکویتز برای تشکیل پرتفوی به صورت زیر است(مارکویتز، ۱۹۵۲):

متغیر N نشان دهنده تعداد سهام قابل سرمایه گذاری است که از بین آنها می توان سهام برتر را برای تشکیل پرتفوی انتخاب کرد. این سهام قابل سرمایه گذاری هستند و با مجموعه $A=\{a1\dots an\}$ نشان داده می شوند. برای هر سهمi، شناسه Ai درنظرگرفته شده است، این متغیر همان کد شناسایی است که توسط بورس به هر سهم تخصیص داده میشود؛ مقدار بازده مورد انتظار سهم a_i را با R_i و ریسک هر سهم با متغیر واریانس قیمت نشان داده می شود. چون ممکن است که سهام به یکدیگر وابستگی داشته باشند از متغیر σ_{ij} برای نشان دادن همبستگی بین سهام استفاده می شود. برای هر سهم i متغیر w_i نشان دهنده وزن سهم i ام در پرتفوی است. هر سهمی که در پرتفوی شرکت می کند دارای وزن غیر منفی است به گونه ای که جمع کل وزن سهام برابر با یک است و پرتفوی $P=\{w_1\dots w_n\}$ یک مجموعه از سهام است که w_i وزن هر سهم در پرتفوی است.

$$\sum_{i=0}^{n} Wi = 1 \qquad (1)$$

برای به دست آوردن بازده هر معامله‌ای که انجام می‌گیرد، از نسبت تغییرات آخرین قیمت سهام با آخرین قیمت بسته شده قبلی آن استفاده می‌شود یعنی برای محاسبه بازده معامله در زمان t و ۱-t به صورت زیر عمل می شود:

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}} \qquad (2)$$

P_t: آخرین قیمت بسته شده سهم در زمان t؛ P_{t-1}: آخرین قیمت بسته شده سهم در زمان t -1؛ R_t: بازده معادله سهم در زمان t.

تغییرات قیمت سهام می تواند باعث رشد و سوددهی پرتفوی شود یا باعث ضرر و زیان آن شود. همین تغییرات به عنوان ریسک سرمایه گذاری مطرح می شود، بنابر تعریف مدل واریانس میانگین، مقدار ریسک هر سهم در دوره معاملاتی برابر با مقدار واریانس قیمت هایی است که در یک دوره رخ می دهد.

$$\sigma^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{i=0}^{n}(P_i - \bar{\eta})(P_i - \bar{P}_i) \qquad (3)$$

در رابطه فوق دامنه تغییرات قیمت برای M روز محاسبه شده است؛ $\bar{n}$: متوسط بازده هر معامله نسبت به معامله قبلی در دوره معاملاتی؛ $\bar{pi}$: متوسط قیمت سهام در این مدت؛ P_i: آخرین قیمت بسته شده سهم در روز iام.

بعد از انجام محاسبات فوق، می توان معاملات سهام را ارزیابی نمود و بر مبنای این ارزیابی و تابع هدف معین، سهام منتخب را برای تشکیل پرتفوی گزینش نمود. بعد از گزینش و تعیین کردن نسبت وزن هر سهم در پرتفوی، می توان دوباره به وسیله مدل میانگین واریانس، بازده و ریسک پرتفوی را محاسبه نمود. بازده پرتفوی از مجموع حاصل ضرب میانگین بازده در وزن هر سهم به دست می آید، که به صورت رابطه زیر بیان می گردد:

$$E(R_P) = \sum_{i=0}^{n} W_i * E(R_P) \qquad (4)$$

$E(R_p)$: بازده مورد انتظار پرتفوی؛ W_i: وزن هر سهم حاضر در پرتفوی است که توسط الگوریتم تعیین می‌گردد؛ $E(R_i)$: بازده مورد انتظار سهم iام است؛ n: تعداد سهام منتخب برای تشکیل پرتفوی.

سهامی که در پرتفوی قرار دارند ممکن است که با یکدیگر رابطه مستقیم یا غیرمستقیم داشته باشند. این رابطه توسط ضریب همبستگی سهام بیان و برای محاسبه ریسک پرتفوی استفاده می‌شود و به این صورت است:

$$\sigma_P^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 \qquad (5)$$

ضریب همبستگی بین دو سهم:

$$\sigma_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} [R_{ki} - E(R_k)]\,[R_{ji} - E(R_j)]P_i \qquad (6)$$

$\sigma_{k,j}$: کوواریانس سهام i و j؛

P_i: احتمال رخداد هر کدام از حالات. این مقدار برای همه یکسان درنظرگرفته شده است. P_k: یکی از بازده‌های محتمل سهم k در دوره معاملاتی است. روابط فوق براساس مدل پیشنهاد شده مارکویتز است.

یکی از مدل هایی که کاملا نزدیک به مدل میانگین – واریانس کلاسیک می باشد، انتخاب پرتفوی بهینه، از طریق مدل مبتنی بر چولگی می باشد. چولگی به عدم تقارن توزیع ارجاع می‌کند. یک توزیع با عدم تقارن دهی که در سمت راست گسترش داده شده، به چولگی مثبت یا چوله به راست معروف می‌باشد در حالی که یک توزیع با عدم تقارن دهی که در سمت چپ گسترش داده شده، به چولگی متفی یا چوله به چپ معروف می‌باشد. چولگی می‌تواند از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی نهایت مقدار بپذیرد. چولگی نشان‌دهنده میزان عدم تقارن توزیع احتمالی است. اگر داده‌ها نسبت به میانگین متقارن باشند، چولگی برابر صفر خواهد بود(جانسون و همکاران، ۲۰۰۱).

۵-۲- چولگی متغیر فازی

فرض کنید ξ متغیر فازی با بازده مورد انتظار محدود باشد .چولگی ξ این گونه تعریف می شود.

$$S[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^3] \qquad (7)$$

فرض کنید $\xi = (a, b, c)$ متغیر فازی مثلثی باشد، در آن صورت نتیجه ی زیر به راحتی قابل استحصال است.

$$S[\xi] = \frac{(c-a)^2}{32}[(c-b) - (b-a)], \qquad (8)$$

$$\mu(x) = 2\left[1 + \exp(\pi|x - e|\left(\sqrt{\delta}\sigma\right))\right]^{-1} \qquad (9)$$

که در اینجا s چولگی را نشان میدهد.

ξ متغیر فازی است که بازده اوراق بهادار را نشان می دهد. از آنجایی که متغیر فازی، فازی مثلثی می باشد به طبع دارای سه کران، از جمله a کران بالا، b کران پایین و c که حد وسط را نشان می دهد می باشد. کران بالا a که max بازده روزانه شرکت، کران b که min بازده روزانه شرکت و حد وسط c میانگین بازده روزانه شرکت می باشد. مدل میانگین واریانس چولگی فازی به صورت زیر نشان داده شده است که تابع هدف مدل بیشینه کردن چولگی در صورت ثابت بودن میانگین و واریانس، برای رسیدن به پرتفوی بهینه می باشد.

$$\begin{cases} \text{maximize} & S[\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \cdots + \xi_n X_n], \\ \text{Subject to:} & E[\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \cdots + \xi_n X_n] \geq \alpha \\ & V[\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \cdots + \xi_n X_n] \leq \gamma \\ & X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 1, \\ & X_i \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,n. \end{cases} \qquad (10)$$

E: بازده مورد انتظار؛ V: واریانس؛ X_i: وزن (نسبت سرمایه گذاری)؛ γ: حداکثر ریسک قابل تحمل برای پرتفوی؛ α: حد اقل بازده مورد انتظار.

همانطور که مشاهده می نمایید تابع دارای قیودی به شرح زیر می باشد:

قید اول بیان می کند که بازده مورد انتظار از حد مشخص کمتر نخواهد بود، و قید دوم بیان می کند که ریسک از حد مشخص بیشتر نخواهد شد. دو قید آخر بیان می کند که سرمایه گزار تمام سرمایه را روی n اوراق سرمایه گذاری می کند و این که نمی تواند مقدار منفی از یک دارایی را داشته باشد. همانطور که شرح داده شد مدل به صورت تابع نشان داده شده است و از آنجایی که برای فرموله کردن مدل ازنرم افزارlingo استفاده شده است مدل باید تبدیل به یک مدل کاملا ریاضی و قطعی شود که مدل قطعی به صورت زیر نشان داده می شود.

فرض کنید $\xi_1 = (a_i, b_i, c_i)$ متغیر فازی مثلثی مستقل برای $i = 1,2,\dots,n$ باشد آن گاه مدل فوق به برنامه قطعی مشخص زیر تبدیل خواهد شد.

a: کران بالای بازده روزانه شرکت؛ b: کران پایین بازده روزانه شرکت؛ c: میانگین بازده روزانه شرکت.

$$\begin{cases} \max \left(\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i)\right)^2 . \sum_{i=1}^{n} x_i (c_i + a_i - 2b_i), \\ s.t \quad \sum_{i=1}^{n} x_i (a_i + 2b_i + a_i) \geq 4\alpha, \\ 11 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i)\right)^2 . \left|\sum_{i=1}^{n} x_i (2b_i - a_i - c_i)\right| \\ +2\left(8\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i) + 3\left|\sum_{i=1}^{n} x_i (2b_i - a_i - c_i)\right|\right)\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i)\right)^2\right) \quad (11) \\ \leq 192\gamma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i) + \left|\sum_{i=1}^{n} x_i (2b_i - c_i - a_i)\right|\right) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0 \; i = 1,2, \ldots, n \end{cases}$$

اثبات: از آن جایی که $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ تماماً متغیرهای فازی مثلثی هستند از اصل توسعه بسط لطفی زاده این گونه می فهمیم که:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i X_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i , \sum_{i=1}^{n} x_i b_i , \sum_{i=1}^{n} x_i c_i\right) \quad (12)$$

که این خود ما متغیر فازی مثلثی خواهد بود به علاوه خواهیم داشت:

$$E[X_1\xi_1 + X_2\xi_2 + \cdots + X_n\xi_n] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i + 2b_i + c_i)x_i}{4} \quad (13)$$

$$S[X_1\xi_1 + X_2\xi_2 + \cdots + X_n\xi_n] = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i)\right)^2 . \sum_{i=1}^{n} x_i (c_i + a_i + 2b_i) \quad (14)$$

در ضمن داریم:

$$V[X_1\xi_1 + X_2\xi_2 + \cdots + X_n\xi_n] = \frac{11(\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i))^2 |\sum_{i=1}^{n} x_i (2b_i - a_i - c_i)|}{192\left(\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i) + \left|\sum_{i=1}^{n} x_i (2b_i - a_i - c_i)\right|\right)} \quad (15)$$
$$+ \frac{2(8\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i) + 3|\sum_{i=1}^{n} x_i (2b_i - a_i - c_i)|)((\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - b_i))^2 + (\sum_{i=1}^{n} x_i (b_i - a_i))^2)}{192\left(\sum_{i=1}^{n} x_i (c_i - a_i) + \left|\sum_{i=1}^{n} x_i (2b_i - a_i - c_i)\right|\right)}$$

با جایگزین این معادلات در مدل قضیه اثبات می‌شود.

در مدل برای مقدار α حداقل بازده، عدد صفر یعنی بدبینانه ترین حالت ممکن و برای γ نیز حد اکثر ریسک که بازهم بدبینانه ترین حالت ممکن را در سه سطح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ در نظر گرفته شده است.

۶- یافته های پژوهش

۶-۱- آمار توصیفی

جدول(۱) آمار توصیفی متغیرهای پژوهش را نشان می‌دهد که بیانگر مقدار پارامترهای توصیفی برای هر یک از متغیرهای زیر می باشد:

- بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۹۰٪ (RET90)، در سطح ۹۵٪ (RET95) و در سطح ۹۹٪ (RET99).
- ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۹۰٪ (RISK90)، در سطح ۹۵٪ (RISK95) و در سطح ۹۹٪ (RISK99).
- بازدهی پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک (Return_markoeitz)
- ریسک پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک (risk_markoeitz)

جدول ۱- نتایج آمار توصیفی متغیرهای پژوهش

متغیر	RET90	RISK90	RET95	RISK95	RET99	RISK99	risk_ markoeitz	Return_ markoeitz
مشاهدات	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵	۱۹۵
حداقل	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰
حداکثر	۱/۰۵	۰/۰۵	۱/۰۵	۰/۰۵	۱/۱۵	۰/۵۴	۱/۲۷	۱/۱۷
میانگین	۰/۳۴۷۲	۰/۰۰۱۴	۰/۳۴۶۸	۰/۰۰۱۶	۰/۳۴۷۸	۰/۰۰۴۲	۰/۲۵۰۵	۰/۱۱۲۵
انحراف معیار	۰/۲۳۴۰	۰/۰۰۶۲	۰/۲۴۷۰	۰/۰۰۶۷	۰/۲۵۱۹	۰/۰۳۸۷	۰/۲۵۱۳	۰/۱۵۷۸

منبع: یافته های پژوهش

در جدول(۱) اصلی‌ترین شاخص مرکزی، میانگین است که نشان‌دهنده نقطه تعادل و مرکز ثقل توزیع است و شاخص خوبی برای نشان دادن مرکزیت داده‌هاست. به طور مثال میانگین ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ کمتر از میانگین ریسک پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک می باشد همچنین میانگین بازده پیش‌بینی شده پرتفوی بر اساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ بیشتر از میانگین بازده پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک می باشد.

۶-۲- نرمال بودن متغیرهای پژوهش

برای بررسی نرمال بودن متغیرها و باقیمانده ها از آزمون کولموگروف- اسمیرنوف بر اساس جدول(۲) استفاده شده است.

جدول ۲- نتایج آزمون نرمال بودن متغیرهای پژوهش

متغیر	RET90	RISK90	RET95	RISK95	RET99	RISK99	risk_ markoeitz	Return_ markoeitz
Z کولموگروف- اسمیرنوف	۱/۱۲۷	۵/۷۸۱	۱/۲۳۵	۵/۶۵۶	۱/۳۴۴	۶/۳۷۹	۲/۲۲۷	۳/۳۲۲
سطح معنی‌داری	۰/۱۵۸	۰/۰۰۰	۰/۰۹۵	۰/۰۰۰	۰/۰۵۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

منبع: یافته های پژوهش

نتایج جدول(۲) نشان می دهد که تمام متغیرهای پژوهش به شکل دو به دو (جفت جفت برای آزمون تفاوت) با توجه به اینکه سطح معناداری کمتر از ۰/۰۵ است، دارای توزیع نرمال نمی باشند. از این رو فرض پارامتریک بودن آزمون ها با عدم درستی اولین آزمایش رد می شود. با توجه به استفاده از آزمون همبستگی در پژوهش حاضر، و عدم برقراری فرض نرمال بودن تمام متغیرهای پژوهش، از آزمون ویلکاکسون برای بررسی فرضیه های پژوهش استفاده می شود.(جدول ضریب همبستگی و تخمین فاصله ای حذف گردید)

۶-۳- نتایج آزمون فرضیه‌ها

بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ با بازدهی پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک و ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در سطح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ با ریسک پیش بینی شده پرتفوی بر اساس بهینه سازی کلاسیک دارای توزیع نرمال نیستند. لذا برای آزمون فرضیه های پژوهش از آزمون ویلکاکسون استفاده می شود. این آزمون از آزمون‌های آماری ناپارامتری است که برای ارزیابی همانندی دو نمونه وابسته با مقیاس رتبه‌ای به کار می‌رود.

جدول ۳- نتایج آزمون ویلکاکسون فرضیه اول

	تعداد مشاهدات		میانگین بازده		Z آماره	سطح معناداری
سطح اطمینان ٪۹۰	تعداد بازده مبتنی بر چولگی	تعداد بازده بهینه سازی کلاسیک	میانگین بازده مبتنی بر چولگی	میانگین بازده بهینه سازی کلاسیک	-۱۰/۸۱۵	۰/۰۰۰
	۱۹۵	۱۹۵	۰/۱۱۲۵	۰/۳۴۷۲		
سطح اطمینان ٪۹۵	تعداد بازده مبتنی بر چولگی	تعداد بازده بهینه سازی کلاسیک	میانگین بازده مبتنی بر چولگی	میانگین بازده بهینه سازی کلاسیک	-۱۰/۴۰۲	۰/۰۰۰
	۱۹۵	۱۹۵	۰/۱۱۲۵	۰/۳۴۶۸		
سطح اطمینان ٪۹۹	تعداد بازده مبتنی بر چولگی	تعداد بازده بهینه سازی کلاسیک	میانگین بازده مبتنی بر چولگی	میانگین بازده بهینه سازی کلاسیک	-۱۰/۴۱۵	۰/۰۰۰
	۱۹۵	۱۹۵	۰/۱۱۲۵	۰/۳۴۷۸		

منبع: یافته های پژوهش

در جدول(۳) از آنجایی که میانگین بازدهی پیش بینی شده پرتفوی براساس بهینه سازی کلاسیک در تمامی سطوح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ بیش از بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی می باشد، لذا بین این دو جامعه آماری در تمامی سطوح تفاوت وجود دارد. همچنین با توجه به اینکه در آمارهz سطوح مختلف، سطح معناداری کمتر از ۵٪ است، بنابراین می توان گفت که بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در تمامی سطوح مورد بررسی تفاوت معناداری با بازدهی پیش‌بینی شده پرتفوی براساس بهینه سازی کلاسیک دارد.

جدول ۴- نتایج آزمون ویلکاکسون فرضیه دوم

	تعداد مشاهدات		میانگین ریسک		Z آماره	سطح معناداری
سطح اطمینان ٪۹۰	تعداد ریسک مبتنی بر چولگی	تعداد ریسک بهینه سازی کلاسیک	میانگین ریسک مبتنی بر چولگی	میانگین ریسک بهینه سازی کلاسیک	-۱۱/۱۱۰	۰/۰۰۰
	۱۹۵	۱۹۵	۰/۲۵۰۵	۰/۰۰۱۴		
سطح اطمینان ٪۹۵	تعداد ریسک مبتنی بر چولگی	تعداد ریسک بهینه سازی کلاسیک	میانگین ریسک مبتنی بر چولگی	میانگین ریسک بهینه سازی کلاسیک	-۱۰/۸۵۴	۰/۰۰۰
	۱۹۵	۱۹۵	۰/۲۵۰۵	۰/۰۰۱۶		
سطح اطمینان ٪۹۹	تعداد ریسک مبتنی بر چولگی	تعداد ریسک بهینه سازی کلاسیک	میانگین ریسک مبتنی بر چولگی	میانگین ریسک بهینه سازی کلاسیک	-۱۰/۸۷۴	۰/۰۰۰
	۱۹۵	۱۹۵	۰/۲۵۰۵	۰/۰۰۴۲		

منبع: یافته های پژوهش

نتایج جدول(۴) نشان می دهد که میانگین ریسک پیش بینی شده پرتفوی براساس بهینه سازی کلاسیک در تمامی سطوح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ کمتر از میانگین ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی می باشد، لذا بین این دو جامعه آماری در تمامی سطوح تفاوت وجود دارد. همچنین همانند نتایج جدول(۴) با توجه به اینکه در آمارهz سطوح مختلف، سطح معناداری کمتر از ۵٪ است، بنابراین می توان گفت که ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در تمامی سطوح مورد بررسی تفاوت معناداری با ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس بهینه سازی کلاسیک دارد.

۷- بحث و نتیجه گیری

در مشارکت فعال افراد جامعه در بازارهای سرمایه، عمده ترین مساله که هریک از سرمایه گذاران با آن مواجه هستند، تصمیم گیری برای انتخاب اوراق بهادار و دارایی های مناسب برای سرمایه گذاری و تشکیل سبد سهام است. دو عامل مهم در مقوله تصمیمات سرمایه گذاری و مدیریت پرتفوی، ریسک و بازده می باشد. ریسک و بازده

معیارهایی هستند که میزان مطلوبیت سرمایه‌گذار را از انتخاب مجوعه دارایی سرمایه‌گذاری مشخص می‌کند. مجموعه دارایی هر سرمایه‌گذار باتوجه به شرایط وی، افق زمانی، ریسک و میزان جریان نقدینگی مورد نظر وی متفاوت است. هدف از مدیریت مجموعه دارایی به طور عام و مجموعه سهام به طور خاص تعیین این متغیرها به گونه‌ای است که ریسک حداقل و بازده حداکثر شود. انتخاب یک مجموعه از سهام معمولا با تعامل بین ریسک و بازده مطرح می‌شود. هرچه ریسک سبد سهام بیشتر باشد، احتمال دریافت بازده بالاتر بیشتر خواهد بود.

در همین راستا، در پژوهش حاضر به مقایسه و ارزیابی بازده و ریسک های پیش بینی شده در دو مدل پرتفوی بهینه مبتنی بر مدل چولگی در محیط فازی و پرتفوی بهینه در مدل کلاسیک پرداخته شد. نتایج بدست آمده نشان داد که میانگین بازده پیش بینی شده پرتفوی بر اساس مدل بهینه سازی کلاسیک به طور معناداری بیشتر از بازده پیش بینی شده بر اساس مدل چولگی در تمامی سطوح مورد بررسی می باشد. همچنین، میانگین ریسک پیش بینی شده پرتفوی براساس بهینه سازی کلاسیک در تمامی سطوح کمتر از ریسک پیش‌بینی شده پرتفوی براساس مدل مبتنی بر چولگی در محیط فازی است. سرمایه گذاران همواره تمایل دارند در سطح معینی از ریسک، بازدهی خود را افزایش داده یا در سطح معینی از بازده، ریسک خود را کاهش دهند. که نتیجه پژوهش حاضر با هیچیک از این دو مورد سازگار نیست، و مغایر با یافته های آراشیوگلو(۲۰۱۱) و فیلد و همکاران(۲۰۱۲) می باشد. به عبارت دیگر بازده پرتفوی انتخاب شده بر اساس مدل مبتنی بر چولگی در سه سطح ۹۰٪، ۹۵٪ و ۹۹٪ کمتر از بازده پرتفوی انتخاب شده بر اساس مدل کلاسیک می باشد. و همچنین مدل مبتنی بر چولگی، ریسک بیشتری نسبت به مدل کلاسیک دارد و نمی تواند در فعالیت های سرمایه گذاری در کشور راه گشا باشد.

موضوع پیش بینی بازده و ریسک سهام از جمله موضوعات مهمی است که یافته های تحقیقات علمی درباره آنها میتواند به سرمایه گذاران در کشور ما کمک کرده و راهنمایی برای اخذ تصمیمات معقول و منطقی برای استفاده کنندگان به خصوص سرمایه گذاران باشد. در نتیجه در راستای توسعه و تکمیل نتایج این پژوهش پیشنهاد می شود که در تحقیقات آتی به مقایسه بازده تخمینی با بازده واقعی و ریسک تخمینی با ریسک واقعی در مدل مبتنی بر چولگی پرداخته شود. همچنین پیشنهاد می شود سنجش کارایی مدل مبتنی بر چولگی در تشکیل پرتفوی با سایر مدل های تشکیل پرتفوی مانند الگوریتم ژنتیک، تئوری آشوب و شبکه عصبی مورد بررسی قرار گیرد. در ضمن، استفاده از معیارهای دیگر ریسک مانند ریسک منفی و نسبت تعداد روزهایی که سهم نوسانات قیمتی مثبت دارد به تعداد روزهایی که سهم نوسانات منفی دارد، می تواند مدنظر تحقیقات آتی قرار گیرد.

فهرست منابع

* بهزادی، عادل و بختیاری، مصطفی(۱۳۹۳). ارائه مدلی برمبنای میانگین- آنتروپی- چولگی برای بهینه سازی سبد سهام در محیط فازی. مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، دوره پنجم، شماره ۱۹، صص ۵۵-۳۹.

* رستمی، محمدرضا، کلانتری بنجار، محمود و بهزادی، عادل(۱۳۹۴). گشتاورهای مراتب بالاتر در بهینه سازی سبد سهام در محیط فازی. مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره۲۴، صص ۴۱-۶۱.
* شاه محمدی، محسن، امامی میبدی، لیلی و زارع مهرجردی، یحیی(۱۳۹۱). ارائه الگوریتم هوشمند ترکیبی بر پایه مدل فازی میانگین واریانس-چولگی برای انتخاب پرتفوی، مجله مهندسی صنایع و مدیریت تولید، شماره چهارم، دوره ۲۳، صص ۴۴۸-۴۵۸.
* -شیری قهی، امیر، دیده خانی، حسین، خلیلی دامغانی، کاوه و سعیدی، پرویز(۱۳۹۶). مطالعه تطبیقی مدل بهینه سازی پرتفوی چند دوره‌ای چند هدفه در محیط اعتبار فازی با معیارهای متفاوت ریسک. مجله راهبرد مدیریت مالی، سال پنجم، شماره ۱۸، صص ۱-۲۶.
* Aracioglu, B., Demircan, F., & Soyuer, H. (2011). Mean–Variance – Skewness–Kurtosis Approach to Portfolio Optimization: An Application in İstanbul Stock Exchange. 11, 9-17.
* Arenas, M., Bilbao, A., Rodriguez, M. (2001). A Fuzzy Goal Programming Approach to Portfolio Selection. European Journal of Operational Research, 133, 287-297.
* Bhattacharyya, R., Hossain, S.A., & Kar, S. (2014) Fuzzy cross-entropy, mean, variance, skewness models for portfolio selection. Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences, 26, 79–87.
* Bhattacharyya, R., Kar, M. B., Kar, S., & Majumder, D. D. (2009). Mean-entropy-skewness fuzzy portfolio selection by credibility theory approach. in Pattern Recognition and Machine Intelligence, 603-608.
* Carlsson, R., Fullér, R., & Majlender, P. (2002). A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. Fuzzy sets and systems, 131, 13-21.
* Dubois, D., Prade, H. M., Farreny, H., Martin-Clouaire, R., & Testemale, C. (1998). Possibility theory: an approach to computerized processing of uncertainty. vol. 2: Plenum press New York.
* Fabozzi, F.J., Kolm, P.N., Pachamanova, D., & Focardi, S.M. (2007). Robust Portfolio Optimization and Management. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
* Field, B., Beardsley, X.W., & Xiao, M. (2012). Mean-Variance-Skewness-Kurtosis Portfolio Optimization with Return and Liquidity. Communications in Mathematical Finance, 1(1), 13-49
* Johnson, M. D., Gustafsson, A., Andreassen, T. W., Lervik, L., & Cha, J. (2001). The evolution and future of national customer satisfaction index models. Journal of economic Psychology, 22(2), 217-245.
* Kima, W.C., Fabozzi, F.J., Cheridito, P., & Fox, C. (2014). Controlling portfolio skewness and kurtosis without directly optimizing third and fourth moments. Economics Letters. 122.154–158.
* Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management science, 37, 519-531.
* Konno, H., Shirakawa, H., & Yamazaki, H. (1993). A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model. Annals of Operations Research, 45, 205-220.
* Konno, H., Suzuki, K. (1995). A Mean-Variance-Skew ness Optimization Model. Journal of the Operations Research of Japan, 38, 87-137.
* Li, X., Zhang, Y., Wong, H.S., Qin, Z. (2009). A Hybrid Intelligent Algorithm for Portfolio Selection Problem with Fuzzy Returns. Journal of Computational and Applied Mathematics, 233, 264-278.
* Liu, B., & Liu, Y.-K. (2002). Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 10, 445-450.
* Liu, S.C., Wang, S.Y., Qiu, W.H.. (2003). A Mean–Variance–Skewness Model for Portfolio Selection with Transaction Costs. International Journal of Systems Sciences, 34 (4), 62-255.

* Lotfizadeh, A. (1965). Fuzzy sets. Information and control, 8, 338-353.
* Lotfizadeh, A. (1999). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy sets and systems, 100, 9-34.
* Mao, J.C.T. (1970). Models of Capital Budgeting, E-V vs. E-S. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 5, 57-75.
* Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. The journal of finance, 7(1), 77-91.
* Markowitz, H. (1959). Portfolio selection: efficient diversification of investments. Yale university press.
* Markowitz, H.M. (1959) Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. John Wiley & Sons, New York.
* Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. Journal of risk, 2, 21-42.