فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گـذاری
سال هشتم/ شماره سی‌ام/ تابستان ۱۳۹۸

حل مساله پورتفوی با استفاده از الگوریتم تجزیه دانتزیگ– ولف

جواد بهنامیان
دانشیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران (نویسنده مسئول)
Behnamian@basu.ac.ir

محمد مشرفی
دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران؛
mohammadmoshrefi1371@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۳/۱۳ تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۷/۲۵

چکیده
فرآیند انتخاب سبد سهام یکی از مسائلی است که همواره مورد توجه محققین بوده و در نتیجه ارائه ابزاری مناسب در جهت پشتیبانی تصمیمات سرمایه‌گذاری ضروری است. هدف از این پژوهش مدلسازی و حل مساله پورتفوی است. از طرفی گاهی ممکن است که ابعاد این مساله در واقعیت آنقدر بزرگ شود که حل بهینه آن در زمان معقول غیرممکن شود. در چنین شرایطی استفاده از روش‌های کوچک کردن ابعاد مساله می‌تواند مفید باشد. یکی از این راه حل‌ها، استفاده از الگوریتم‌های تجزیه است. در این پژوهش از الگوریتم تجزیه دنتزیک- ولف پیشنهاد شده که در آن مساله در ابعاد بزرگ به چند زیر مساله کوچکتر تقسیم و سپس با حل بهینه هر کدام از این زیر مسائل در نهایت جواب‌های بدست آمده یکپارچه شده تا مقدار بهینه مساله نهایی حاصل گردد. نتایج حاصل از بکارگیری این روش حاکی از کارایی آن در حل مسائل با ابعاد بزرگ را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: سبد سهام، الگوریتم تجزیه دنتزیک- ولف، تولید ستون، فضای محدب.

۱- مقدمه

یکی از مباحث مهمّی که در بازارهای سرمایه مطرح است و باید مورد توجه سرمایه‌گذاران اعم از اشخاص حقیقی یا حقوقی قرار گیرد، بحث انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه می‌باشد و در این رابطه، بررسی و مطالعه سرمایه‌گذاران در جهت انتخاب بهترین سبد سرمایه‌گذاری با توجه به میزان ریسک و بازده آن انجام می‌شود (ژای و بای[1] ۲۰۱۸).

معمولاً فرض بر این است که سرمایه‌گذاران ریسک را دوست ندارند و از آن گریزانند و همواره در پی آن هستند تا در اقلامی از دارایی‌ها سرمایه‌گذاری کنند که بیشترین بازده و کمترین ریسک را داشته باشند. به عبارت دیگر، سرمایه‌گذاران به بازده سرمایه‌گذاری به عنوان یک عامل مطلوب می‌نگرند و به ریسک که در واقع واریانس بازده‌ها است به عنوان یک عنصر نامطلوب نظر دارند. مدل‌هایی مثل برنامه‌ریزی خطی[2]، برنامه‌ریزی عدد صحیح، برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط و برنامه‌ریزی (صفر- یک)، در برنامه ریزی‌های ریاضی وجود دارند که می‌توانند با در نظر گرفتن هدف و شرایط حاکم بر مساله، ترکیبی بهینه با مقدار بهینه مشخص از عناصر تشکیل دهنده سبد را ارائه دهند. در نتیجه، می‌توان برای رسیدن به چنین هدفی، اطلاعات مالی را با در نظر گرفتن تمام شرایط حاکم بر سرمایه‌گذاری در دنیای واقعی وارد برنامه‌ریزی ریاضی کرد (سفیر و همکاران[3] ۲۰۱۷).

جهت تحصیل اوراق بهادار و هر گونه سرمایه گذاری، انواع متفاوتی از هزینه ایجاد می‌شود. مطمئنا مهمترین عامل هزینه، هزینه خرید می‌باشد؛ امّا عوامل هزینه دیگری مانند هزینه معاملات، چه تناسبی و چه ثابت نیز ممکن است وجود داشته باشند. با وجود اینکه بعضی از اوراق بهادار را می‌توان در هر مقدار پیوسته‌ای (غیر صحیح) بدست آورد ولی ممکن است، بعضی دیگر از اوراق را تنها به صورت مضاربی از حداقل واحدهای معاملات، خریداری نمود. ممکن است افزون بر محدودیت‌ها و خصوصیات یاد شده، سرمایه‌گذار در یابد که معرفی و ارائه محدودیت‌هایی که ترجیحات را منعکس می‌کند، مفید باشد. بنابراین، مدل بهینه‌سازی باید محدودیتی را در بگیرد که در آن هم حذف ورقه بهادار با یک نوع سرمایه‌گذاری و هم وجود آن، با مقداری از دارایی که بیشتر از مقدار حداقل است وضع شود. اهمیت موضوع مورد بررسی از آنجایی است که سرمایه‌گذاران جهت سرمایه‌گذاری در اوراق بهادار مختلف، به نتایج حاصل از اجرای عملی یک مدل منطقی آگاهی می‌یابند و می‌توانند تصمیم گیری‌های سرمایه‌گذاری پورتفوی خود را در سطح بالاتری از کارایی در جهت بهینه‌تر شدن بازار سرمایه، اتخاذ نمایند. آنچه تا به امروز در محاسبات مالی و در زمینه انتخاب سهام و سبد سرمایه‌گذاری عنوان شده است به گونه‌ای، سرمایه گذاری‌های موجود را از لحاظ درجه ریسک و نرخ بازده، به ترتیب اولویت بندی می‌نماید، تا بدین طریق سرمایه‌گذار بتواند با در نظر گرفتن امکانات مالی و سایر سیاست‌های فرا روی خود، پورتفوی مطلوب خویش را تشکیل دهد. وقتی که فرد سرمایه‌گذار با دارایی‌های متفاوتی روبروست، بایستی در مورد تعداد دارایی‌های انتخابی و میزان سرمایه‌گذاری در هر کدام از آنها، تصمیم‌گیری نماید که در این شرایط فرایند تصمیم‌گیری بسیار دشوار می‌باشد. ترکیب سبد مورد نظر می‌تواند حاصل تصمیمات اتفاقی و غیر مرتبط سرمایه‌گذار باشد یا نتیجه برنامه‌ریزی سنجیده وی گردد (اکساندر و همکاران[4] ۲۰۱۷).

فنون موجود در مباحث مدیریت مالی در مورد تعیین میزان هر نوع سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن شرایط یاد شده، ناتوان هستند. نگاهی به تکنیک‌های برنامه‌ریزی ریاضی، نشان می‌دهد که آنها با در نظر گرفتن تابع هدف مساله، میزان و ترکیب بهینه‌ای را از مساله موجود در اختیار ما قرار می‌دهند؛ بنابراین، به نظر می‌رسد که ادغام تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی و مدیریت مالی، بتواند ما را در جهت ساخت مدلی ریاضی جهت حل مشکل یاد شده یاری دهد. در این تحقیق سعی بر این است که مدلی ارائه و با استفاده از الگوریتم تجزیه دانتزیگ- ولف مورد ساده‌سازی قرار بگیرد. در ابتدا ما به تشریح مساله مورد نظر می‌پردازیم.

۲- پیشینه پژوهش

رویکرد سرمایه‌گذاری در چارچوب سبد سرمایه گذاری، در پرتو اندیشه‌های مارکوویتز و شارپ[۵]، روند تکاملی پیموده و کاربرد برنامه‌ریزی ریاضی، دقت تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاری در سبد سرمایه‌گذاری را افزایش داده است. مدل‌های مختلفی برای هدایت سرمایه‌گذاری در چارچوب سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی ارائه گردیده اند. مدل مارکوویتز[۶] به نام مدل (میانگین-واریانس)، از دو معیار بازده و ریسک به همراه محدودیت بودجه سرمایه گذاری، در قالب برنامه‌ریزی درجه دو، استفاده کرده است.

مهمترین پیشرفت در زمینه استفاده عملی از تئوری سبد سرمایه‌گذاری از طریق توسعه مدل بازار، توسط شارپ[۷] در سال ۱۹۶۳، صورت گرفت و تحت عنوان مدل تک شاخصی معروف گردید (شارپ ۱۹۹۳). پس از آن، مدل‌های چند شاخصی در جهت تحت کنترل درآوردن بعضی از تاثیرات غیر بازاری که باعث می‌شوند، قیمت اوراق بهادار، به صورت هم جهت با یکدیگر تغییر نمایند، ارائه گردیدند. در رابطه اسپرانزا و گرازیا[۸] در سال ۱۹۹۵، مدلی از برنامه‌ریزی مختلط را با خصوصیات واقعی مثل هزینه معاملات و حداقل واحدهای معاملات ارائه داد. وی بعد از طراحی مدل یاد شده، آن را برای بازار سهام میلان ایتالیا به کار گرفت و به علت اینکه در زمان معقول و مطلوبی توسط رایانه قابل حل نبود و یا در بعضی از مواقع، با افزایش نرخ بازده و تعداد سهام، حل آن به طور کلی غیر ممکن می‌شد. یونگ[۹] در سال ۱۹۹۸، مدل بهینه‌سازی پورتفوی LP را مبنای ریسک تعریف شده به وسیله بدترین سناریو ارائه داد که در آن ریسک بر مبنایقابل حل توسط بدترین حالت تعریف می‌شد و آن را رویکرد حداقل نمودن حداکثر نامیدند. در سال ۲۰۰۳، مانسینی و همکاران[۱۰] مدلی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با محدودیت‌های کاهش دهنده ارائه دادند. آخرین مدل و راهکار ارائه شده در مورد بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری توسط گاندزیو و گروسی[۱۱] در سال ۲۰۰۷ در مقاله‌ای تحت عنوان حل مسائل غیرخطی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از روش نقطه درونی اولیه-ثانویه[۱۲] ارائه شد.

در ایران، راعی در سال ۱۳۸۱ برای تشکیل سبد سهام جهت سرمایه‌گذار مخاطره‌پذیر از شبکه عصبی و روش مارکوویتز استفاده کرده است. شاه علیزاده و معماریانی در سال ۱۳۸۲ چارچوب ریاضی برای گزینش سبد سهام با اهداف چندگانه جهت تشکیل سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی پرداختند. در مدل ارائه شده عموماً سهم‌های مختلف به نسبتی با یکدیگر مخلوط می‌شوند به طوری که سبد سهام به ازای بازده معین، از کمترین ریسک برخوردار بوده یا به ازای ریسک معین، از بیشترین بازده برخوردار باشد.

مسری[۱۳] (۲۰۱۵) برای تابع هدف مسئله خود از چندین هدف تصادفی استفاده کرد. این روش این امکان را به سرمایه‌گذار می‌دهد که برای تابع هدف چندین مقدار مورد نظر را از قبل تنظیم کند. او در مدل خود برای حداقل مقدار مورد قبول بازده سبد خود از روش محدودیت های احتمالی استفاده و نتایج مدل خود را در بازارهای مالی بحرین مورد آزمایش قرار داد. چاتسانگا[۱۴] (۲۰۱۷) به منظور انتخاب بهینه سبد دارایی ها از برنامه‌ریزی تصادفی دومرحله‌ای استفاده کرد. او همچنین هزینه معاملات را نیز در مدل خود لحاظ کرد. به منظور واردکردن اثر بازده در مدل خود از یک روش جدید تولید سناریو استفاده کرد و ثابت کرد چنانچه بازده دارایی‌ها از توزیع نرمال پیروی نکند نسبت به مدل های موجود کارایی بهتری خواهدداشت. پیتر[۱۵] (۲۰۱۶) به ارائه مدلی پرداخت که به تولید سناریو برای قیمت‌های سهام با توجه به فرصت‌های آربیتراژ می‌پرداخت. او در این مدل توانست سناریو های گسسته‌ای تولید کند که با توجه به اطلاعات گذشته قیمت‌ها بهترین تخمین‌ها از آینده را برای تصمیم‌گیرنده ارائه می‌داد. ایراد اصلی این مدل غیرخطی بودن و ناکاراشدن مدل در صورت بزرگ‌شدن مسئله بود.

۳- مدل ریاضی

در این بخش مدل مبنا که بر اساس مدل اسپرانزا است را به طور کامل تشریح می‌کنیم.

$$Min\ Z = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T} \tag{۱}$$

$$St: \quad y_t + \sum_{j\in J}(r_{jt} - r_j)X_j \geq 0 \qquad t = 1,..T \tag{۲}$$

$$\sum_{j\in J}(1+d_j)C_jX_j + \sum_{k\in K} f_k {Z_k}' \geq C_0 \tag{۳}$$

$$\sum_{j\in J}(1+d_j)C_jX_j + \sum_{k\in K} f_k {Z_k}' \geq C_1 \tag{۴}$$

$$\sum_{j\in J}(r_j - \rho - \rho d_j)C_jX_j - \sum_{k\in K} \rho f_k {Z_k}' \geq 0 \tag{۵}$$

$$\sum_{j\in I_k} X_j \leq M{Z_k}' \qquad k \in K \tag{۶}$$

$$ {Z_k}' \leq M \sum_{j\in I_k} \qquad k \in K \tag{۷}$$

$$X_j \leq M{Z_j}'' \qquad j \in J \tag{۸}$$

$$X_j \geq q_j Z_j'' \qquad j \in J \tag{9}$$

$$\sum_{j\in J} Z''_j \leq N \tag{10}$$

$$L_j \leq X_j \leq u_j \;\; ; \;\; j \in J \;, Z_k' \in \{0\,;1\} \;\, k \in K, Z''_j \in \{0\,;1\} \;\, j \in J \tag{11}$$

که در آن از اندیس، پارامتر و متغیرهای زیر استفاده شده است.

n تعداد کل سهامی که می‌شود انتخاب کرد.

j نوع ورق بهاداری که می‌توان آنها را در هر مقداری بدست آورد.

n_j حداکثر اوراقی که از نوع سهام j عرضه می‌شود.

R_{jt} نرخ بازده ورق بهادار j در زمان t.

$\delta^2 R_{jt}$ واریانس نرخ بازده ورق بهادار j در زمان t که ریسک را نشان می‌دهد.

X_j تعداد سهم ورق بهادار j.

C_j هزینه خرید یک واحد ورق بهادار j.

f_j هزینه ثابت ورق بهادار j.

R_e حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار.

w'_{c_j} وزنی که برای شاخص هزینه است.

$w'_{R_{jt}}$ وزن نرخ بازده ورق بهادار j.

$w'_{\delta^2 R_{jt}}$ وزن ریسک ورق بهادار j.

w'_{f_j} وزن شاخص هزینه ثابت.

u_j حد بالای میزان سرمایه‌گذاری سهم j.

L_j حد پایین سرمایه‌گذاری سهم j.

ρ_j نرخ بازده مورد نیاز جهت سرمایه‌گذاری

Z'_k متغیر صفر- یک ورق بهادار دارای هزینه ثابت.

f_k مجموعه‌ای از اوراق بهادار که دارای هزینه ثابت هستند.

نقاط قوت این مدل در مقایسه با مدل‌های پیشین مانند مدل مارکوویتز و شارپ، را می‌توان، در خطی بودن آن دانست، زیرا تا این زمان، هیچ یک از مدل‌های بهینه‌سازی از معادلات درجه یک برای محاسبه انحرافات که آنها را ریسک می‌نامیم استفاده نمی‌کردند. در این مدل اولین بار به محاسبه نیمه انحرافات پایین‌تر از میانگین پرداخته شد. تنها نقطه ضعف این مدل را می‌توان، در وجود متغیرهای عدد صحیح و (صفر- یک) آن دانست. زیرا وجود چنین متغیرهایی باعث پیچیدگی حل آن می‌گردد. همین امر باعث می‌شود تا وقتی تعداد سهام

بیشتری جهت پیدا نمودن سبد بهینه در مدل وارد می‌شود، رایانه نتواند، در بعضی مواقع، در زمان معقول ودر بعضی مواقع در زمان نا محدود، جوابی برای آن بدست آورد.

۴- بکارگیری الگوریتم دانتزیگ- ولف

امروزه در فرموله کردن مسائل واقعی به صورت برنامه‌ریزی خطی وجود هزاران سطر (محدودیت) و ستون (متغیر) امری طبیعی جلوه می‌کند. برای حل اینگونه مدل ها، عمدتا روش‌های بیان شده به دلیل ظرفیت محدود رایانه مشکلاتی را ایجاد می‌کند. حتی استفاده از الگوریتم سیمپلکس تجدید نظر شده برای حل اینگونه مدل‌ها کارساز نیست. این نوع مسائل برنامه‌ریزی خطی را مساله در مقیاس بزرگ گویند. الگوریتم تجزیه یکی از روش‌های پیشرفته در حل این نوع مسائل است. متد تجزیه، روشی برای تفکیک مساله بزرگ به دو یا چند مساله کوچکتر است که با حل آن ها، جواب بهینه مساله بزرگ حاصل گردد. علاوه بر بزرگ بودن مساله، یکی دیگر از دلایل استفاده از تجزیه در حل برنامه‌ریزی خطی وجود ساختار ویژه در برخی از محدودیت مدل است. به طوری که با جداکردن آن دسته از محدودیت‌های ویژه می‌توان، از الگوریتم کارآمد ویژه‌ای برای پیدا کردن جواب آنها استفاده کرد. اصل تجزیه یک روش سیستماتیک برای حل مسائل بزرگ برنامه‌ریزی خطی، یا مسائل برنامه‌ریزی خطی با ساختار ویژه است. محدودیت‌ها معمولا به دو مجموعه تفکیک می‌گردند. ۱- محدودیت‌های مشترک(عمومی) و ۲- محدودیت‌هایی با ساختار ویژه. در الگوریتمی که در پی می‌آید، مشخص خواهد شد که ضرورتی ندارد برخی از محدودیت‌ها ساختار ویژه‌ای داشته باشند تا بتوان از این روش استفاده کرد، گرچه داشتن ساختار ویژه برای قیود مسأله کارایی الگوریتم را در حل مسائل بزرگ افزایش می‌دهد.

۴-۱- مراحل الگوریتم تجزیه

مرحله ۱) مرحله کاهش محدودیت: در این مرحله با استفاده از تعریف ترکیب محدب مجموعه X تعداد محدودیت‌های مساله اصلی کاهش می‌یابد.

مرحله ۲) مرحله تولید ستون: در این مرحله برای حل مساله اصلی در هر تکرار یک ستون تولید می‌شود و به جواب اساسی آغازین اضافه می‌شود.

اگر $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ دو نقطه در یک فضای n بعدی باشند. هر نقطه واقع بر پاره خط رابط $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ به صورت روبرو بدست می‌آید.

$$x\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_t\right) = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \cdots \ldots\ldots + \lambda_t x^{(t)} \quad (۱۲)$$

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1 \quad \lambda_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2 \ldots\ldots t) \quad (۱۳)$$

حال مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در این مدل C بردار ضرایب تابع هدف، A یک ماتریس m در n، X محدودیت‌های چند وجهی محدودیت‌هایی با ساختار ویژه و b بردار مقادیر سمت راست، محدودیت‌های کارکردی است.

$$Max\ Z = C.X \tag{۱۴}$$

$$\text{St:}\ \ AX \le b \qquad x \in X \tag{۱۵}$$

برای سادگی بحث فرض کنید X یک مجموعه محدب محدود است، $x \in X$ را می‌توان به صورت ترکیب محدب از نقاط گوشه ای، $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(t)}$ نوشت.

$$X = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j x^{(j)} \tag{۱۶}$$

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1 \quad \lambda_j \ge 0\ \ (j = 1،2\ldots\ldots\ t) \tag{۱۷}$$

با جایگذاری روابط (۱۶) و (۱۷) در مدل متعارف تابع هدف، مدلی تحت عنوان مساله اصلی محدود شده نامیده می‌شود، بدست می‌آید.

$$Max\ Z(\lambda) = \sum_{j=1}^{t} (CX^{(j)})\lambda_j \tag{۱۸}$$

$$St:\ \ \sum_{j=1}^{t} (AX^{(j)})\lambda_j \le b \tag{۱۹}$$

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1 \quad \lambda_j \ge 0\ (j = 1\ \ 2\ \ \ldots .\ t) \tag{۲۰}$$

این مرحله از الگوریتم به مرحله کاهش محدودیت معروف است. حال مساله‌ای را در نظر بگیریدکه محدودیت‌های ویژه آن به بیش از یک دسته تقسیم شود، بنابراین چنین مساله‌ای قابل تقسیم به N مساله فرعی خواهد بود. ساختار آن به شکل زیر است.

$$Max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots . + C_NX_N \tag{۲۱}$$

$$St:\ \ A_1X_1 + A_2X_2 + \cdots + A_NX_N \le b \tag{۲۲}$$

$$B_1X_1 \le b_1 \tag{۲۳}$$

$$B_2X_2 \leq b_2$$ (۲۴

$$B_NX_N \ \leq b_N$$ (۲۵

$$X_1X_2X_N \geq 0$$ (۲۶

با جایگزین کردن رابطه (۱۲) و (۱۳) در مدل (۲۱) ،معادله‌ای به صورت زیر خواهیم داشت.

$$Max\ Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{t}\left(C_jX^{(i|j)}\right)\lambda_{ij}$$ (۲۷

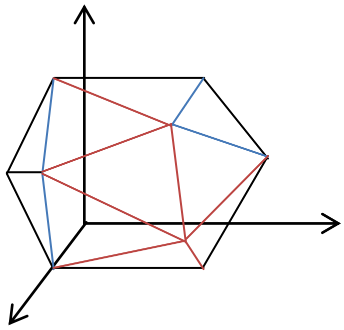
$$St:\ \ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{t}(A_iX^{(i\ j)})\lambda_{ij} \leq b$$ (۲۸

$$\sum_{i=1}^{t}\lambda_{ij} = 1$$
$$\lambda_{ij} \geq 0(i = 1,2,\dots,N\ and\ j = 1,2,..,t)$$ (۲۹

اگر قیمت‌های سایه‌ای محدودیت‌های مشترک را با $W_1, W_2, \dots, W_N$ و قیمت سایه‌ای محدودیت مساوی کننده بلوک‌ها را با $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ نشان دهیم، در اینصورت:

$$\binom{W}{\alpha} = \begin{pmatrix} w_1w_2 & \dots\dots\dots.w_N \\ \alpha_1\alpha_2 & \dots\dots\dots..\alpha_N \end{pmatrix}$$ (۳۰

که در آن C_B ضرایب متغیرهای پایه‌ای λ_{ij} در تابع هدف با مقدار $C_{\lambda_{ij}} = C_iX^{(i,j)}$ می‌باشد. در هر تکرار منفی ترین $Z_{ij} - C_{ij}$ به عنوان متغیر ورودی به مساله اصلی محدود شده معرفی می‌گردد. هرگاه حاصل مقدار $Z_{ij} - C_{ij}$، مثبت باشد به جواب بهینه زسیده ایم. محدودیت‌های یک برنامه‌ریزی خطی، تشکیل یک چند وجهی محدب می‌دهد. شکل (۱) یک چند وجهی محدب را برای حالت سه متغیره نشان می‌دهد.



شکل ۱- فضای چند وجهی محدب برای حالت سه متغیره

با آگاهی از نقاط فرین ،هر پاسخ شدنی ترکیب محدبی از نقاط فرین است.

۵- نتایج عددی

فرض کنید که چهار نوع سهم در تالار بازار سرمایه عرضه شده است. این سهم‌ها هر کدام عبارتند از: ایران خودرو، سایپا، نفت آبادان و شرکت نفت لاوان که نوع نماد آن شاوان است. هر کدام از این سهم‌ها را با نمادهای به ترتیب X_1،X_2، X_3 و X_4 نمایش می‌دهیم. اگر سود حاصل از سهم ایران خودرو برابر ۲ واحد پولی ،شرکت سایپا برابر ۱واحد پولی ،شرکت نفت آبادان برابر ۱ واحد پولی و در نهایت شرکت نفت لاوان (شاوان) برابر ۳ واحد پولی باشد. آن گاه هدف ما این است که برآورد کنیم با توجه به محدودیت‌های موجود چه تعداد سهم باید خرید که سود حاصل از خرید آنها که به اصطلاح عایدی می‌گویند، بیشتر شود. اگر ریسک خرید مجموع سهام از ۶ کمتر باشد و هزینه خرید هر واحد سهم ایران خودرو برابر ۲ ،هزینه خرید هر واحد سهم سایپا برابر ۳، هزینه خرید هر واحد شرکت نفت آبادان برابر ۱و هزینه خرید هر واحد سهم شرکت نفت لاوان (شاوان) برابر ۴ باشد. از طرفی کل سرمایه اولیه و آورده فرد سرمایه‌گذار را برابر با ۱۲ واحد باشد. به طبع هزینه‌ها باید از آورده سرمایه‌گذار کمتر باشد. تعداد سهم‌های ایران خودرو و سایپا نباید بیشتر از ۵ واحد باشد و حداکثر تعداد سهام خریداری شده در شرکت سایپا برابر ۲ واحد باشد. همچنین مجموع سهم‌های شرکت نفت آبادان و شرکت نفت لاوان کمتر از ۴ واحد باشد و ۲ برابر تعداد سهم شرکت نفت آبادان با سه برابر شرکت نفت لاوان حداکثر برابر ۹ باشد. شکل ریاضی مساله به صورت ذیل است:

$$Max\ Z = 2X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4 \tag{۳۱}$$

$$St:\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \le 6 \tag{۳۲}$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 + 3X_4 \le 12 \tag{۳۳}$$

$$X_1 + X_2 \le 5 \tag{۳۴}$$

$$X_2 \ \le 2 \tag{۳۵}$$

$$X_3 + X_4 \leq 4$$ (۳۶

$$2X_3 + 3X_4 \leq 9$$ (۳۷

$$X_1\ ;\ X_2\ ;\ X_3\ ;\ X_4 \geq 0$$ (۳۸

در مدل (۳۱)، محدودیت (۳۲) و (۳۳) مشترک است. محدودیت (۳۴) و (۳۵) ،محدودیت بخش۱ و محدودیت (۳۶) و (۳۷)، محدودیت بخش۲ هستند. متغیرها در مدل بالا بصورت $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$، $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$، $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$،$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$، $X_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$،$b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$،$b_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ است.

گام اول حل: مساله دارای دو بخش است:

$$S_1 = \{X_1 | D_1X_1 \leq b_1 \quad ;\ X_1 \geq 0\}$$ (۳۹

$$X_1^1\ ;\ X_1^2\ ;\ \ldots\ldots ;X_1^{t1}$$ (۴۰

$$S_2 = \{X_2 | D_2X_2 \leq b_2 \quad ;\ X_2 \geq 0\}$$ (۴۱

$$X_2^1\ ;\ X_2^2\ ;\ \ldots\ldots ;X_2^{t2}$$ (۴۲

محدودیت (۳۹) ، منطقه شدنی بخش ۱ را نشان می‌دهد. محدودیت (۴۰) ،نقاط فرین منطقه شدنی بخش ۱را نشان می‌دهد. محدودیت(۴۱) ،منطقه شدنی بخش ۲ و محدودیت(۴۲) ،نقاط فرین منطقه شدنی بخش ۲ را نشان می‌دهد. مدل جدید مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{t1} (C_1X_1^i)\lambda_{1i} + \sum_{i=1}^{t2} (C_2X_2^i)\lambda_{2i}$$ (۴۳

$$ST\colon \sum_{i=1}^{t1} (A_1X_1^i)\lambda_{1i} + \sum_{i=1}^{t2} (A_2X_2^i)\lambda_{2i} + X_s = b_0$$ (۴۴

$$\sum_{i=1}^{t1} \lambda_{1i} = 1$$ (۴۵

$$\sum_{i=1}^{t2} \lambda_{2i} = 1$$ (۴۶

$$\lambda_{1i} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots., t1$$ (۴۷

$$\lambda_{2i} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots., t2$$ (۴۸

مساله دارای دو محدودیت مشترک است، پس$X_s = [\begin{matrix}S_1\\S_2\end{matrix}]$ است. حال متغیرهای پایه‌ای، پاسخ ابتدایی ما در محدودیت‌های مشترک هستند که $\lambda_{11}, \lambda_{21}$ است، پس $X_B = [\, S_1 S_2 \lambda_{11} \lambda_{21} \,]$ بوده و در نهایت پاسخ ابتدایی مساله به صورت زیر خواهد بود.

$X_1^1 = [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$

$X_2^1 = [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$

ماتریس B^{-1} مساله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

گام دوم حل: در این گام باید متغیر ورودی انتخاب شود. برای تعیین متغیر ورودی به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$Y = [y_0 y_1 y_2] = G_B B^{-1} = [\,0\ 0\ 0\ 0\,].\mathrm{I} = [\,0\ 0\ 0\ 0\,]$

$X_B = [S_1 S_2 \lambda_{11} \lambda_{21}\,]$

$$\begin{aligned} &Max\ Z \\ &= C_1 X_1 - y_0 A_1 X_1 \\ &St{:}\ D_1 X_1 = b_1 \\ &\quad X_1 \geq 0 \end{aligned} \qquad (49)$$

$$\begin{aligned} &Max\ Z \\ &= C_2 X_2 - y_0 A_2 X_2 \end{aligned} \qquad (50)$$

$St{:}\ D_2 X_2 = b_2$ (۵۱

$X_2 \geq 0$

$St{:}\ X_1 + X_2 \leq 5$ (۵۲

$X_2 \leq 2$ (۵۳

$X_1 , X_2 \geq 0$ (۵۴

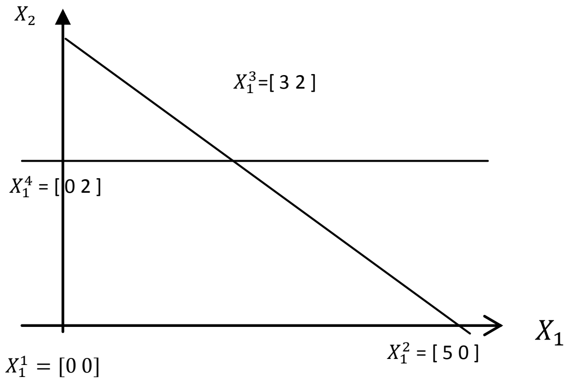
$Max\ Z_2' = [\,1 \quad 3\,] \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} - [\,0\ \ 0\,] A_2 \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = X_3 + 3X_4$ (۵۵

$St{:}\ X_3 + X_4 \leq 4$ (۵۶

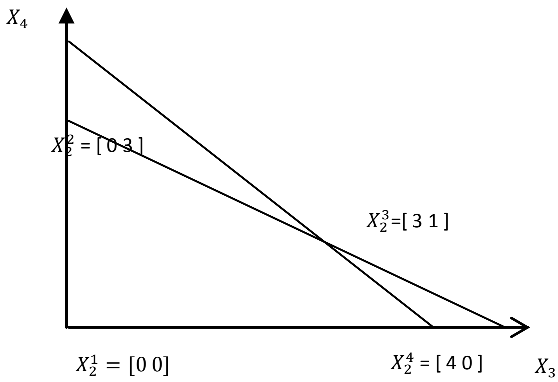
$2X_3 + 3X_4 \leq 9$ (۵۷

$X_3 , X_4 \geq 0$ (۵۸

حال با توجه به معادلات بالا ،می توانیم که حل حالات ترسیمی آنها را نیز دنبال کنیم.



شکل ۲- ناحیه مدل (۵۱)



شکل ۳- ناحیه مدل (۵۵)

نتایج حاصل از ترسیم معادله (۵۱)در شکل (۲)، چنین بدست می‌آید:

$X_1^{2*} = [\ X_1 X_2\ ]^T = [5\ \ 0\ ]^T\ ;\ Z_1' = 10$
$C_{12} - Z_{12} = Z_1^{*'} - y_1 = 10 - 0 = 10$
$C_{ij} - Z_{ij} = 10$ مثبت ترین

و نتایج حاصل از ترسیم معادله (۵۵)در شکل (۳)،چنین بدست می‌آید:

$X_2^{2*} = [\ X_3 X_4]^T = [0\ 3]^T\ ;\ Z_2' = 9$
$C_{22} - Z_{22} = Z_2^{*\prime} - y_2 = 9 - 0 = 9$

پس همانطور که از مشاهدات بالا دریافتیم، مثبت‌ترین مقدار برابر با ۱۰ است که مربوط به مساله فرعی نخست است. پس داریم:

$X_1^{2*} = [\begin{smallmatrix}5\\0\end{smallmatrix}] X_1^2 = [5\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,]$

پس، λ_{12} متغیر ورودی است و ضریب آن در تابع هدف، مطابق زیر است:

$$Max\ Z = 2X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4$$

$$C_1 X_1^{2*} = [\ 2\ \ 1\ ] \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix} = 10$$

گام سوم حل: در این مرحله باید متغیر خروجی را تعیین کرده و به تبع آن، ستون محور را هم محاسبه کنیم:

$$A_1 X_1^{*2} = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix} = [\begin{smallmatrix}5\\10\end{smallmatrix}] \tag{۵۹}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \le 6 \tag{۶۰}$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 + 3X_4 \le 12 \tag{۶۱}$$

محدودیت‌های شماره (۶۰) و (۶۱) از جمله محدودیت‌های مشترک هستند. حال ستون محور را محاسبه می‌کنیم:

$$a_2 = B^{-1}\begin{bmatrix}A_1 X_1^{*2}\\1\\0\end{bmatrix} = \mathrm{I}.[5\ \ 10\ \ 1\ \ 0] = [5\ \ 10\ \ 1\ \ 0]$$

حال مقادیر سمت راست را محاسبه می‌کنیم:

$$b = B^{-1}\begin{bmatrix}b_0\\1\\1\end{bmatrix} = \mathrm{I}.[6\ \ 12\ \ 1\ \ 1] = [6\ \ 12\ \ 1\ \ 1]$$

پس داریم:

$$\min\left\{\frac{6}{5}\frac{12}{10}\frac{1}{1}\frac{1}{0}\right\} = 1$$

پس سومین متغیر λ_{11} از پایه خارج شود. البته متغیرهای پایه در تکرار بعد به صورت:

$X_B = [S_1 S_2 \lambda_{11} \lambda_{21}]\quad]$ $\qquad X_B = [S_1 S_2 \lambda_{12}\ \ \lambda_{21}]\quad]$

گام چهارم حل: باید مقدار B^{-1} جدید را محاسبه کنیم. در نتیجه از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$B_{new}{}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\,-5 & 0\\0 & 1{-}10 & 0\\0 & 0\ \ 1 & 0\\0 & 0\ \ \ 0 & 1\end{bmatrix} \times \mathrm{I} = \begin{bmatrix}1 & 0\,-5 & 0\\0 & 1{-}10 & 0\\0 & 0\ \ 1 & 0\\ & 0\ \ 00 & 1\end{bmatrix}$$

حال باید متغیر ورودی را انتخاب کنیم:

$$Y = [y_0 y_1 y_2] = [0\ \ 0\ \ 10\ \ 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\ \ 0\ \ 10\ \ 0]$$

حل مساله فرعی را در دستور کار قرار می‌دهیم.

$$Max\ Z_1' = [\ 2\ \ 1\ ]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - [\ 0\ \ 0\ ]A_1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1 + x_2 \qquad (۶۲$$

$$St{:}\ x_1 + x_2 \le 5 \qquad (۶۳$$

$$x_2 \le 2 \qquad (۶۴$$

$$x_1\ ;\ x_2 \ge 0 \qquad (۶۵$$

پاسخ بهینه معادله (۶۲) برابر با $X_1^{*2} = [5\ \ 0]$ و $Z_1^{*\prime} = 10$ و $C_{12} - Z_{12} = Z_1^{*\prime} - y_1 = 10 - 10 = 0$. حال باید مساله فرعی دوم را حل کنیم:

$$Max\ Z_2' = [\ 1\ \ 3\ ]\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - [\ 0\ \ 0\ ]A_2\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 + 3x_4 \qquad (۶۶$$

$$St{:}\ x_3 + x_4 \le 4 \qquad (۶۷$$

$$2x_3 + 3x_4 \le 9 \qquad (۶۸$$

$$x_3\ \ ,\ \ x_4\ \ge 0 \qquad (۶۹$$

پس پاسخ بهینه معادله (۶۶) به صورت $X_2^{*2} = [0\ \ 3]$ و $X_2^2 = [0\,0\,0\,3]$ و $Z_2^{*\prime} = 9$ از طرفی داریم: $C_{22} - Z_{22} = Z_2^{*\prime} - y_2 = 9 - 0 = 9$. پس نتیجه می‌گیریم که λ_{22} تنها نامزد برای متغیر ورودی و ضریب آن در تابع هدف مساله اصلی عبارت است از $C_2X_2^{*2} = [\ 1\ \ 3\ ]\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 9$. حال به گام سوم باز می‌گردیم و متغیر خروجی را تعیین می‌کنیم که برابر $A_2X_2^{*2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$. حال نوبت به محاسبه ستون محور می‌رسد:

$$a_3 = B^{-1}\begin{bmatrix} A_2X_2^{*2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}[3\ 9\ 0\ 1] = [3\ 9\ 0\ 1]$$

سپس باید مقادیر سمت راست را محاسبه کنیم:

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}[6\ \ 12\ \ 1\ \ 1] = [1\ \ 2\ \ 1\ \ 1]$$

در نتیجه $\frac{2}{9} = Min\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}\right\}$، پس متغیر S_2 متغیر خروجی است و متغیرهای پایه در تکرار بعد $X_b = [\,S_1 \lambda_{22} \lambda_{12} \lambda_{21}\,]$. حالا دوباره به گام چهارم بر می‌گردیم:

$$B_{new}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -5/3 & 0 \\ 0 & 1/9 & -10/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 10/9 & 1 \end{bmatrix}$$

حال باید متغیرهای ورودی را انتخاب کنیم:

$$Y = [y_0 \quad y_1 \quad y_2] = [\,0\ 9\ \ 10\ \ 0\,] \times \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -5/3 & 0 \\ 0 & 1/9 & -10/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 10/9 & 1 \end{bmatrix} = [0\ 1\ 0\ 0]$$

در نتیجه نوبت به محاسبه مساله فرعی نخست می‌رسد که به صورت:

$$Max\ Z_1' = [\,2\ \ 1\,]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - [\,0\ \ 1\,]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_2 \qquad (۷۰)$$

$St\colon x_1 + x_2 \le 5$ (۷۱)

$x_2 \le 2$ (۷۲)

$x_1\ ,\ x_2\ \ge 0$ (۷۳)

پاسخ بهینه (۷۰) ، $Z_1^{*\prime} = 0$ ، $X_1^{*1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $C_{11} - Z_{11} = Z_1^{*\prime} - y_1 = 0 - 0 = 0$ است.
نوبت به محاسبه مساله فرعی دوم می‌رسد:

$$Max\ Z_2' = [\,1\ \ 3\,]\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - [\,0\ \ 1\,]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \qquad (۷۴)$$

$St\colon x_3 + x_4 \le 4$ (۷۵)

$2x_3 + 3x_4 \le 9$ (۷۶)

$x_3\ ,\ x_4\ \ge 0$ (۷۷)

پاسخ بهینه معادله (۷۴) به صورت، $X_2^{*1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $Z_2^{*\prime} = 0$ و $C_{21} - Z_{21} = Z_2^{*\prime} - y_2 = 0 - 0 = 0$. مقدار $C_{ij} - Z_{ij}$ برای هر دو مساله فرعی مقداری نامثبت است، پس برای تعیین جواب اصلی داریم:

$$b = [S_1 \lambda_{22} \lambda_{12} \lambda_{21}] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} - \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} - \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 \quad 1 & 0 \\ 0 & -\frac{110}{9\,9} & 1 \end{bmatrix} [6 \;\; 12 \;\; 1 \;\; 1] = [\frac{1}{3} \frac{2}{9} \; 1 \;\; \frac{7}{9}]$$

بنابراین جواب بهینه بصورت زیر است.

$$X^* = [x_1 x_2 x_3 x_4] = \lambda_{22} X_2^{*2} + \lambda_{12} X_1^{*2} + \lambda_{21} X_2^{*1} = \frac{2}{9} [0\;0\;0\;3\,] + [5\;\,0\;\;0\;\;0\,] + \frac{7}{9} [0\;\;0\;\;0\;\;0\,]$$
$$= [\,5\;\;0\;\;0\;\;\frac{2}{3}]$$

مقدار سود بهینه مورد نظر ما عبارت است از:

$$Z^* = (2 \times 5) + (0 \times 1) + (0 \times 1) + \left(3 \times \frac{2}{3}\right) = 12$$

استفاده از این روش اگرچه محدودیت‌های مساله را با روشی خاص کاهش می‌دهد ولی اینکار نیز دارای مشکلاتی است که از آن دسته می‌توان به افزایش حجم محاسبات و در نتیجه افزایش زمان حل اشاره کرد که در استفاده از این روش باید متحمل شد. از طرفی به دلیل کاهش در تعداد محدودیتها تعداد متغیرهای مساله افزایش یافته و این موضوع سبب پیچیدگی روند حل خواهد شد. به هر حال در استفاده از هر الگوریتم حل باید به این موضوع توجه داشت که هیچ روش جامع که بتواند تمام کلاسهای مسائل پیچیده را در زمان معقول حل نماید وجود نداشته و همواره توازنی بین کیفیت حل و زمان مورد نیاز به آن مورد توجه می‌باشد که در این بین الگوریتم تجزیه دنتزیک- ولف سعی داشته دسته از نمودهای مساله با پیچیدگی میانه را در زمانی مناسب به بهینگی برساند.

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

امروزه با انتشار اوراق مشارکت و عرضه‌ی سهام‌های گوناگون توسط شرکت‌های مختلف دولتی و خصوصی در بسیاری از کشورها و خرید این اوراق یا سهام توسط افراد عام، این موضوع مطرح می‌شود که یک فرد با دارایی محدود چگونه می‌تواند از این فرصت اقتصادی پیش آمده در جهت کسب منافع بیشتر و افزایش سود ناشی از سرمایه‌گذاری بر روی این سهام استفاده کند. در این راستا حل مسئله بهینه‌سازی سبدسهام به عنوان یکی از مسائل مهم در حوزه تصمیم‌گیری‌های در حوزه‌های مالی توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده‌است. در این مقاله برای حل این مساله کاربردی از الگوریتم تجزیه دنتزیک- ولف استفاده شد و سعی گردید با استفاده از آن دسته از نمودهای مساله با پیچیدگی میانه در زمانی مناسب به بهینگی حاصل گردد. با توجه به تعدد معیارهای مختلف دخیل در فرآیند انتخاب سبد سهام طی زمان دچار تغییر و تحول شده و این

وضعیت استفاده از ابزار مناسب پشتیبانی تصمیمات سرمایه‌گذاری را ضروری می‌سازد. نتایج حاصل از بکارگیری روش تجزیه دنتزیک- ولف در این مقالi نشان داد که استفاده از چنین روشهای می‌تواند ابزاری قدرتمند در اختیار تصمیم‌گیرندگان قرار دهد. با توجه به اهمیت این موضوع، به عنوان پیشنهادی برای مطالعات آتی محققان می‌توانند با ترکیب این روش با روشهای فرابتکاری روشی مناسب برای حل مسائل در ابعاد بزرگتر را توسعه دهند که بدیهی به دلیل اندازه بزرگ مسائل واقعی، پیشنهاد چنین روشی بسیار کاربردی خواهد بود. همچنین با اضافه‌کردن محدودیت‌های کنترل مقادیر حداقل و حداکثر خرید از هر سهم می توان نتایج واقعی‌تری را بدست آورد.

فهرست منابع

* راعی، رضا. (۱۳۸۱)، تشکیل سبد سهام برای سرمایه‌گذار مخاطره پذیر: مقایسه‌ی شبکه‌های عصبی و مارکوویتز، مجله‌ی پیام مدیریت، ۲، ۲، ۹۶-۷۸.

شاه علی‌زاده، محمد. معماریانی، عزیزاله. (۱۳۸۲)، چارچوب ریاضی گزینش سبد سهام با اهداف چندگانه، بررسی‌های حسابداری و حسابرسی، مجله‌ی دانشکده‌ی مدیریت دانشگاه تهران. ۳۲، ۱۰۲-۸۳

* Markowitz, H., (1952) Portfolio Selection, Journal of Finance, 7, pp. 77-91.
* Chatsanga, N. (2017) Two-Stage Stochastic International Portfolio Optimisation under Regular-Vine-Copula-Based Scenarios.
* Masri, H. (2015) A multiple stochastic goal programming approach for the agent portfolio selection problem, Springer Science+Business Media.
* Pieter, K. (2016) Generating Scenario Trees for MultistageDecision Problems, Institute for Operations Research and the Management Sciences.
* Zhai, J., Bai, M. (2018) Mean-risk model for uncertain portfolio selection with background risk, Journal of Computational and Applied Mathematics, 330, 59-69
* Sefair, J.A., Méndez, C. Y., Babat, O., Medaglia, A.L., Zuluaga L. F. (2017) Linear solution schemes for Mean-SemiVariance Project portfolio selection problems: An application in the oil and gas industry,Omega, 68, 39-48.
* Alexander, G. J., Baptista, A. M., Yan, S. (2017) Portfolio selection with mental accounts and estimation risk, Journal of Empirical Finance, 41, 161-186
* Gondzio, J., Grothey, A. (2007) Solving non-linear portfolio optimization problems with the primal-dual interior point method, European Journal of Operational Research, 181, 3, 1019-1029.
* Mansini, R., Gryczak, W., Speranza, M.G. (2003) LP solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison, IMA Journal of Management Mathematics, 14, 187-220.
* Sharp, A. (1993) Fundamental of Investments, Third Edition, Fabozzi, Investment Management, 36, 5, 139-151,835-848
* Speranza, M. Grazia. (1995) A Heuristics Algorithm for A portfolio Optimization", Model Applied to the Milan Stock Market, Computer & Ops Res, 5, 1, 433-441.
* Young, M.R. (1998) A Minimum- Portfolio Selection Rule with Linear Programming Soulotion", Management Science, Vol. 4, No. 07, PP. 673-683.

یادداشت‌ها

[1] Zhai and Bai
[2] Linear Programming (LP)
[3] Sefair et al.
[4] Alexander et al.
[5] Markowitz and Sharp
[6] Markowitz
[7] Sharp
[8] Speranza and Grazia
[9] Young
[10] Mansini et al.
[11] Gondzio and Grothey
[12] Primal-dual interior point
[13] Masri
[14] Chatsanga
[15] Pieter