فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال نهم/ شماره سی‌وچهارم/ تابستان ۱۳۹۹

بهینه‌یابی تکاملی فازی سه هدفه و چهارهدفه سبد سرمایه‌گذاری در بورس اوراق بهادار تهران

محمدجواد سلیمی
استادیار دانشکده مدیریت و حسابداری دانشگاه علامه طباطبائی(نویسنده عهده‌دار مکاتبات)
J_salimi@yahoo.com

میر فیض فلاح شمس
دانشیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرکزی تهران
Fallahshams@gmail.com

هادی خواجه زاده دزفولی
دانشجوی دکترای مدیریت مالی دانشگاه علامه طباطبائی
Dezfinance@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۴/۰۷ تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۵/۱۶

چکیده

انتخاب و تشکیل سبد سهام بهینه، یکی از مهمترین مسائل در حوزه تحقیقات مالی است که تلاش می‌کند ترکیب بهینه‌ای از دارایی‌ها را انتخاب نماید تا با توجه به محدودیت‌ها، بیشینه مطلوبیت برای سرمایه‌گذار ایجاد شود. با توجه به آنکه بازده اوراق بهادار در دنیای واقعی معمولاً مبهم و نادقیق است، یکی از مهمترین چالش‌های سرمایه‌گذاری، عدم‌اطمینان نسبت به آینده و پیامدهای آن‌ها می‌باشد. بر این اساس، در این مقاله، با استفاده از گشتاورهای مراتب بالا و تئوری فرامدرن پرتفوی، و با استفاده از منطق فازی و بهینه‌یابی تکاملی چندهدفه، مسأله انتخاب و بهینه‌یابی پرتفوهای اوراق بهادار مدلسازی و حل گردیده است. مدل‌های طراحی شده، هم طبیعت چندهدفه مسأله انتخاب پرتفو را در نظر گرفته و هم ملاحظات مدنظر سهامدار را در انتخاب پرتفو دخیل نموده است. کیفیت عدم اطمینان بازده آتی پرتفوی داده شده با استفاده از اعداد LR فازی تخمین زده شده در حالیکه گشتاورهای بازدهی آن با استفاده از تئوری امکانی[1] سنجیده شده است. مهمترین هدف این مقاله حل مسأله و مقایسه مدل‌های انتخاب پرتفوی به صورت بهینه‌سازی همزمان چهار هدفه و سه هدفه است. برای این هدف، از الگوریتم ژنتیک با مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II)استفاده شده و عملگرهای جهش و تقاطع به طور اختصاصی برای تولید راه‌حل‌های ممکن محدودیت کاردینالیتی مسأله طراحی شده است. در نهایت کارایی و عملکرد مدل‌ها در صورت استفاده از منطق فازی و عدم استفاده از آن مقایسه شده و مشخص

گردیده است که استفاده از منطق فازی و تئوری امکانی، باعث تشکیل پرتفوهای با عملکرد بالاتر و مطلوبیت بیشتر می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: مدلسازی، انتخاب سبد سهام، تئوری‌های مدرن و فرامدرن پرتفوی، منطق فازی، الگوریتم بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه، الگوریتم ژنتیک با مرتب‌سازی نامغلوب(NSGA-II)

۱- مقدمه

مسأله انتخاب پرتفولیو، به چگونگی توزیع ثروت میان سهام مختلف می‌پردازد. حل این مسأله نیازمند دو مؤلفه کلیدی است: الف) روشی مناسب برای اندازه‌گیری کمی عدم اطمینان بازدهی‌های آتی پرتفوی مورد نظر و ب) رویه و روشی جهت بهینه‌سازی، که بتواند پرتفوهایی بهینه و منطبق با ملاحظات سرمایه‌گذار را تأمین نماید. مارکویتز با معرفی تئوری مدرن پرتفوی (مدل میانگین-واریانس) گام بزرگی برای حل مسائل بهینه‌سازی پرتفوی برداشت؛ اما این مدل بر اساس فرضیاتی بنا نهاده شده است که در عمل، به ندرت برقرار است؛ به عنوان مثال، به دلیل برقرار نبودن فرضیات زیربنایی و ناکارآمدی در اندازه‌گیری ریسک، در نظر نگرفتن محدودیت‌های سرمایه‌گذار در دنیای واقعی و مشکلات محاسباتی در اجرای مدل، اجرا و پیاده‌سازی مدل، با مشکلات و ناکارآمدی‌های متعددی مواجه است و از این رو، تلاش‌های زیادی به صورت تئوری و عملی در زمینه بهبود مدل استاندارد میانگین-واریانس مارکویتز انجام شده است.

در انتخاب سنتی پرتفوی، بازدهی مورد انتظار دارایی‌ها را بعنوان پارامترهای مسأله در نظر می‌گیرند. آنها از مجموعه داده‌های تاریخی تخمین زده می‌شود و معمولاً فرض می‌شود که بردار بازدهی دارایی‌ها چند متغیره و دارای توزیع نرمال است. از آنجایی که اطلاعات موجود در بازارهای مالی اغلب ناکامل است و تصمیم‌گیری در شرایط اطمینان کامل صورت نمی‌پذیرد، لذا برخی از محققین بیان نموده‌اند که عدم اطمینان بازده آتی دارایی‌ها، می‌تواند با استفاده از منطق فازی اندازه‌گیری شود. با این مفروضات، مسأله انتخاب پرتفوی چندهدفه می‌تواند با استفاده از روش‌های محاسبات نرم و تکنیک‌های تصمیم‌گیری بهینه‌سازی فازی حل شود(باتاتاکاریا، ماجومدر[۲]، ۲۰۱۱ و ورچر و برمودز[۳]، ۲۰۱۵).

در این مقاله، برای واقعی‌تر نمودن مسأله انتخاب پرتفوی، برخی محدودیت‌های عملی مانند حد بالا و پایین سرمایه‌گذاری در هر صنعت و هر سهم و انتخاب دارایی بنا به نظر و یا علاقه سهامداران، به مسأله انتخاب پرتفوی افزوده شده است. با در نظر گرفتن این محدودیت‌ها، مسأله بهینه‌سازی پرتفوی به یک مسأله چند جمله‌ای پیچیده NP-Hard تبدیل می‌شود و روش بهینه‌سازی سنتی نمی‌تواند برای یافتن پرتفوی‌های کارا با لحاظ نمودن همه این اهداف مورد استفاده قرار گیرد که برای فائق آمدن بر این مانع، الگوریتم‌های بهینه یابی تکاملی چند هدفه (EMO) برای تولید راه‌حل‌های بسیاری از مدل‌های انتخاب پرتفوی با موفقیت بکار گرفته شده‌اند.(رودریگز، لوک و گنزالس[۴]، ۲۰۱۱). این الگوریتم‌ها به طور کلی، با هدف تخمین مجموعه بهینه پارتو یا راه‌حل‌های بهینه (که مرز کارای بهینه پارتو نامیده می‌شود) با استفاده از عملگرهای مبتنی بر تکامل برای جمعیتی از راه‌حل‌ها اقدام به فعالیت می‌کنند(کوئلو، لامونت و ولدویزن[۵]، ۲۰۰۷).

مهمترین هدف این مقاله طراحی و حل مدل‌های بهینه‌یابی همزمان سه و چهار هدفه است. لذا مجموعاً چهار مدل مختلف شامل یک مدل بهینه‌یابی چهار هدفه و یک مدل بهینه‌یابی سه هدفه و هر کدام در دو وضعیت فازی و غیرفازی به صورت ۱) میانگین، نیم‌واریانس، چولگی،کشیدگی ۲)میانگین فازی، نیم‌واریانس فازی، چولگی فازی، کشیدگی فازی ۳)میانگین، نیم‌واریانس، چولگی ۴) میانگین فازی، نیم‌واریانس فازی، چولگی فازی ، طراحی گردیده است. از این رو با توجه به ماهیت NP-HARD مدل‌های مذکور، جهت حل مسأله، از الگوریتم ژنتیک با مرتب‌سازی نامغلوب(NSGA-II) استفاده شده و عملگرهای جهش و تقاطع اختصاصی، متناسب با ساختار مدل طراحی گردیده است.

۲- پیشینه پژوهش

آناگنوستوپولوس[۶] و همکاران (۲۰۱۰) یک الگوریتم تکاملی سه هدفه به منظور یافتن جبههٔ پارتو بهینه، در حالتی که کمینه‌سازی کاردینالیتی به عنوان تابع هدف به مدل میانگین-واریانس افزوده شده است، ارائه دادند. لئونگ و همکاران (۲۰۱۲)، در پژوهشی تحت عنوان «بهبود برآورد بهینه‌سازی تئوری پرتفوی مارکویتز و برآورد دقیق با بکارگیری سرمایه‌گذاری در بازار سهام ایالات متحده» به این نتیجه رسیدند که برآوردهای سنتی درآمدها، به طور چشمگیری درآمدها را غیرواقعی (بیشتر از واقعیت) نشان می‌دهند. هیولینگ، یانگ زنگ و هیژینگ یائو [۷] (۲۰۱۳)، در پژوهشی تحت عنوان «پرتفوی چند دوره‌ای مارکویتز بر مبنای میانگین-واریانس با احتمال خروج از وابستگی ایالتی» به بررسی مسائل افق زمانی محتمل جهت محاسبه پرتفوی بر مبنای میانگین-واریانس دوره‌های چندگانه پرداخته‌اند. در این تحقیق فرض می‌شود افق زمانی به طور تصادفی و بر مبنای ریسک دارایی‌های عاید شده‌ای که بازار تعیین می‌کند، انتخاب می‌شود. آنگنوس و مامانیز[۸] (۲۰۱۲) سه نمونه جبهه پارتو جدید را برای بدست آوردن جبهه پارتو بهینه در صورتی که اهداف جدیدی به مدل میانگین-واریانس اضافه شود، را بدست آورده‌اند. سبوریدو و همکاران[۹] (۲۰۱۶)، با تغییر الگوریتم ژنتیک با مرتب‌سازی نامغلوب، توانستند الگوریتم جدیدی بدست آورند که کارایی بالاتری از مدل عمومی این الگوریتم دارد و بر اساس آن توانستند، الگوریتمی برای بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه بر پایه اطلاعات فازی در بورس اسپانیا پیاده کنند.

مطالعه رستمی، کلانتری وبهزادی (۱۳۹۴) مدلی برای انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از منطق فازی ارائه کردند که در آن نقش گشتاورهای درجه بالاتر را نیز در انتخاب پرتفو در نظر می‌گرفت. آنها سه مدل مختلف را ارائه و نتایج آنها را پس از پیاده‌سازی در بازار بورس اوراق بهادار تهران با هم مقایسه کرده‌اند. یافته‌های پژوهش آنان نشان داد که به کارگیری گشتاورهای مرتبه بالاتر (چولگی و کشیدگی) موجب بهبود کارایی پرتفوی بدست آمده خواهد شد. پوراحمدی و نجفی(۱۳۹۴) بهینه‌سازی تک‌دوره‌ای را به بهینه‌سازی پویا و چند دوره‌ای ارتقا داده و ضمن در نظر گرفتن هزینه معاملات کارایی به این نتیجه رسیدند مدل چند دوره‌ای در بلندمدت عملکرد بهتری نسبت به مدل تک دوره‌ای دارد. همایی‌فر و روغنیان(۱۳۹۵) مدل میانگین-ارزش در معرض خطر شرطی را با برنامه‌ریزی آرمانی مدل‌سازی نمودند و در نهایت مدل پویای ارائه شده را با مدل قطعی مقایسه نمودند و به این نتیجه رسیدند با مدل ارائه شده به پاسخ‌های کاراتر و کاربردی‌تری دست پیدا می‌کنند. کاظمی میان

گسگری، پاکیده و قلی‌زاده (۱۳۹۶) با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها، مسأله بهینه‌سازی سبد سهام را با در نظر گرفتن ارزش در معرض خطر برروی کارایی متقاطع به کار گرفته‌اند. نتایج نشان داد معیار شارپ عملکرد بهتری برای روش پیشنهادی نسبت به دیگر روش‌ها نشان داد.

۳- روش‌شناسی تحقیق

در این پژوهش تلاش می‌شود که ابتدا بر اساس محدودیت‌های موجود در بازار سرمایه کشور و خواست سرمایه‌گذار، مدل‌های چهارهدفه و سه هدفه‌ای طراحی شود که هدف آنها بیشینه‌سازی بازدهی، چولگی مثبت و کشیدگی و کمینه‌نمودن ریسک نامطلوب، در دو حالت‌های مختلف فازی و غیرفازی است و پس از آن، با استفاده از داده‌های واقعی بورس اوراق بهادار تهران، مدل‌های طراحی شده، حل می‌شود. از آنجا که حل مدل‌های بهینه‌سازی همزمان از نظر پیچیدگی محاسباتی NP-Hard می‌باشند، لذا لازم است که الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری برای حل مدل‌ها استفاده نمود. از این رو از الگوریتم تکاملی NSGAII با توجه به شرایط و ملاحظات مدنظر سرمایه‌گذار طراحی گردیده است که در ادامه به بیان و تشریح مدل‌سازی‌های انجام شده و روش‌های حل آنها می‌پردازیم:

۴- مدل‌سازی

۴-۱- مدل برنامه‌ریزی میانگین، نیم واریانس، چولگی

تصور کنید که $X = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه اوراق بهادار مورد نظر برای سرمایه‌گذاری باشد به طوری که میانگین مربوط به هر کدام از این اوراق بهادار $x \in X$ برابر با متغیر تصادفی P_x و با میانگین داده شده $\mu_x = E\{P_x\}$ بوده، $W(P_x)$ نیم‌واریانس نامطلوب داده‌ها و $S(P_x)$ نیز چولگی داده‌ها باشد؛ همچنین $X =$ $j = 1, 2, \dots, n$ و (x_j) مبلغ سرمایه‌گذاری شده در پرتفوی (متغیرهای تصمیم) باشد. در این صورت:

$$\max E(P_X) \qquad (۱)$$

$$\min W(P_X) \qquad (۲)$$

$$\max S(P_X) \qquad (۳)$$

St

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad (۴)$$

$$k_l \le c(x) \le k_u \qquad (۵)$$

$$0 \le l_i \le x_i \le u_i \qquad (۶)$$

$for\ i = 1, 2, \dots, n$

که هدف (۱) بازدهی پرتفو را بیشینه و هدف (۲) نیم‌واریانس نامطلوب پرتفوی را کمینه و هدف (۳) چولگی داده‌ها را بیشینه می‌کند. عبارت (۴) محدودیت بودجه را در نظر می‌گیرد و عبارت (۵) حداقل و حداکثر تعداد سهام موجود در پرتفوی را تعیین می‌کند و نهایتاً عبارت (۶) کف و سقف میزان سرمایه‌گذاری در پرتفوی را تعیین می‌کند.

۴-۲- مدل برنامه‌ریزی میانگین فازی، نیم واریانس فازی، چولگی فازی

تصور کنید که $X = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه اوراق بهادار مورد نظر برای سرمایه‌گذاری باشد به طوری که میانگین فازی مربوط به هر کدام از این اوراق بهادار $x \in X$ برابر با متغیر تصادفی $\tilde{P}_x$ و میانگین فازی داده شده $\mu_x = E\{\tilde{P}_x\}$، نیم‌واریانس فازی داده‌ها $W(\tilde{P}_X)$، و چولگی فازی داده‌ها $S(\tilde{P}_X)$ باشد همچنین $j =$ ، $X = (x_j)$ $1, 2, \dots, n$ مبلغ سرمایه‌گذاری شده در پرتفوی (متغیرهای تصمیم) باشد. در این صورت:

$$\max E(\tilde{P}_X) \quad (۷)$$

$$\min W(\tilde{P}_X) \quad (۸)$$

$$\max S(\tilde{P}_X) \quad (۹)$$

St

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad (۱۰)$$

$$k_l \le c(x) \le k_u \quad (۱۱)$$

$$0 \le l_i \le x_i \le u_i \quad (۱۲)$$

$$for\ i = 1, 2, \dots, n$$

که هدف (۷) به دنبال بیشینه‌سازی بازدهی فازی پرتفو، هدف (۸) کمینه‌سازی نیم‌واریانس نامطلوب فازی پرتفوی و هدف (۹) بیشینه‌سازی چولگی فازی داده‌ها می‌باشد. عبارت (۱۰) محدودیت بودجه را در نظر می‌گیرد و عبارت (۱۱) حداقل و حداکثر تعداد سهام موجود در پرتفوی را تعیین می‌کند و نهایتاً عبارت (۱۲) کف و سقف میزان سرمایه‌گذاری در پرتفوی را تعیین می‌کند.

۴-۳- مدل برنامه‌ریزی میانگین، نیم واریانس، چولگی، کشیدگی

تصور کنید که $X = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه اوراق بهادار موردنظر برای سرمایه‌گذاری باشد بطوری که میانگین مربوط به هر کدام از این اوراق بهادار $x \in X$ برابر با متغیر تصادفی P_x و با میانگین داده شده $\mu_x = E\{P_x\}$ باشد و $W(P_X)$ نیز نیم‌واریانس داده‌ها و $S(P_X)$ چولگی و $K(P_X)$ کشیدگی باشد $j = 1, 2, \dots, n$ و $X = (x_j)$ مبلغ سرمایه‌گذاری شده در پرتفوی (متغیرهای تصمیم) می‌باشد. در این صورت مدل غیرفازی به صورت زیر است:

$$\max E(P_x) \quad (۱۳)$$

$$\min W(P_x) \quad (۱۴)$$

$$\max S(P_x) \quad (۱۵)$$

$$\max K(P_x) \quad (۱۶)$$

St

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad (۱۷)$$

$$k_l \le c(x) \le k_u \quad (۱۸)$$

$$0 \le l_i \le x_i \le u_i \quad (۱۹)$$

$$for\ i = 1, 2, \dots, n$$

که هدف (۱۳) خواهان بیشینه‌سازی بازدهی پرتفو، هدف (۱۴) کمینه نمودن نیم‌واریانس نامطلوب هر سهم، هدف (۱۵) بیشینه نمودن چولگی داده‌ها و هدف (۱۶) نیز بیشینه نمودن کشیدگی می‌باشد. عبارت (۱۷) محدودیت بودجه را در نظر گرفته، عبارت (۱۸) حداقل و حداکثر تعداد سهام موجود در پرتفوی را تعیین و در آخر عبارت (۱۹) کف و سقف میزان سرمایه‌گذاری در هر سهم را تعیین می‌کند.

۴-۴- مدل برنامه‌ریزی میانگین فازی، نیم واریانس فازی، چولگی فازی، کشیدگی فازی

تصور کنید که $X = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه اوراق بهادار مورد نظر برای سرمایه‌گذاری باشد به طوری که میانگین فازی مربوط به هر کدام از این اوراق بهادار $x \in X$ برابر با متغیر تصادفی $\tilde{P}_X$ و با میانگین فازی داده شده $\mu_x = E\{\tilde{P}_x\}$ باشد و $W(\tilde{P}_x)$ نیز نیم‌واریانس فازی داده‌ها و $S(\tilde{P}_x)$ چولگی فازی و $K(\tilde{P}_x)$ کشیدگی فازی باشد

$$\max E(\tilde{P}_x) \quad (۲۰)$$

$$\min W(\tilde{P}_x) \quad (۲۱)$$

$$\max S(\tilde{P}_x) \quad (۲۲)$$

$$\max K(\tilde{P}_x) \quad (۲۳)$$

St

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad (۲۴)$$

$$k_l \le c(x) \le k_u \quad (۲۵)$$

$$0 \le l_i \le x_i \le u_i \quad (۲۶)$$

$$for\ i = 1, 2, \dots, n$$

که هدف (۲۰) بیشینه‌سازی بازدهی فازی پرتفو، هدف (۲۱) کمینه‌سازی نیم‌واریانس نامطلوب فازی، هدف (۲۲) بیشینه نمودن چولگی فازی و هدف (۲۳) بیشینه نمودن کشیدگی فازی را دنبال می‌کند. عبارت (۲۴) محدودیت بودجه، عبارت (۲۵) حداقل و حداکثر تعداد سهام موجود در پرتفوی و در نهایت عبارت (۲۶) کف و سقف میزان سرمایه‌گذاری در پرتفوی را تعیین می‌کند.

۵- عدد LR فازی

عدد فازی Q یک عدد فازی از نوع LR است اگر تابع عضویتش به شکل زیر باشد:

$$\mu_Q(y)=\begin{cases} L\left(\frac{A-y}{s_A}\right) & \text{if } -\infty < y \le A, \\ 1 & \text{if } A \le y \le B, \\ R\left(\frac{y-B}{s_B}\right) & \text{if } B \le y < +\infty, \end{cases} \qquad (۲۷)$$

که A و B به شکل A≤B است که به ترتیب نشان‌دهنده حد پایین و بالای Q می‌باشند. یعنی اینکه $[A, B] = \{y|\mu_Q(y) = 1\}$ که SA و SB به ترتیب مرز چپ و راست Q می‌باشند؛ که $L, R : [0, +\infty) \to [0, 1]$ توابع مرجع(رفرنس) هستند که صعودی نمی‌باشند و $\lim_{t\to+\infty} L(t) = \lim_{t\to+\infty} R(t) = 0.$

از این رو برای پرتفوی **x** ، توابع $L_\pi(t) = 1 - t^\pi$ و $R_\rho(t) = 1 - t^\rho$ را حدود چپ و راست عدد فازی Q در نظر گرفته می‌شود که در آن π و ρ شکل[۱۰] مثبت پارامترها به ترتیب برای هر t = 1, … , T هستند. بنابراین عدد فازی LR به صورت: $Q=\{(p_l,p_u,c,d)_{L_\pi R_\rho}\}$ است که [pu , pl] هسته عدد محسوب شده و c و d حد چپ و راست عدد می‌باشند. لذا در این مقاله اعداد LR فازی برای تخمین بازده غیرقطعی پرتفوی x در نظر گرفته می‌شوند و به صورت مستقیم توزیع احتمال بازده، بجای توزیع احتمال تجمعی تک‌تک دارایی‌هایی که x را می‌سازند، تخمین زده می‌شود.

برای دفازی کردن بازده(میانگین)، ریسک نامطلوب(نیم واریانس)، چولگی و کشیدگی، از فرمول‌هایی که در ادامه می‌آید، استفاده می‌شود:

$$\overline{E}(Q)=\frac{P_u+P_l}{2}+\frac{d}{2}\frac{\rho}{\rho+1}-\frac{c}{2}\frac{\pi}{\pi+1} \qquad \text{میانگین فازی} \qquad (۲۸)$$

$$w(Q) = p_u + p_l + d\frac{\rho}{\rho+1} + c\frac{\pi}{\pi+1} \qquad \text{ریسک نامطلوب فازی} \qquad (۲۹)$$

$$\mu_3(Q) = \frac{1}{4}(d\frac{\rho}{\rho+1} - c\frac{\pi}{\pi+1})^3 + \frac{1}{2}\left(d^3\frac{\rho}{\rho+3} - c^3\frac{\pi}{\pi+3}\right) + \frac{3(p_u - p_l)}{4} \times \left[d^2\left(\frac{\rho}{\rho+2} - \frac{\rho^2}{(\rho+1)^2}\right) - c^2(\frac{\pi}{\pi+2} - \frac{\pi^2}{\pi+1^2})\right] - \frac{3}{4}\left(d^2\frac{\rho}{\rho+2} + c^2\frac{\pi}{\pi+2}\right)(d\frac{\rho}{\rho+1} - c\frac{\pi}{\pi+1})$$

چولگی فازی (۳۰)

$$K(\tilde{x}) = -\left[\frac{1}{4}(l_s(\tilde{x}) + l_c(\tilde{x})\right]^5\left(\frac{|\propto -\beta|}{5 \propto \beta}\right) + \max(\frac{(\frac{|\propto -\beta|}{4} - \frac{1}{2}l_c(\tilde{x}))^5}{10 \propto \cup \beta}, 0) + \frac{(\frac{|\propto -\beta|}{4} + \frac{1}{2}l_c(\tilde{x}))^5}{10 \propto \cup \beta}\frac{|\propto -\beta|}{2 \propto \beta}\left[\frac{1}{2}(l_s(\tilde{x}) - \frac{(\propto +\beta)}{4}\right]\left[\frac{1}{4}(l_s(\tilde{x}) + l_c(\tilde{x}))\right]^4 - \frac{(\frac{|\propto -\beta|}{4} + \frac{1}{2}l_c(\tilde{x}))^5}{10 \propto \cap \beta}$$

کشیدگی فازی (۳۱)

۶- بهینه‌سازی تکاملی چند هدفه

در عمل، بسیاری از مسائل بهینه‌سازی شامل بهینه‌کردن همزمان چند هـدف در حـال رقابـت و لحاظ کردن قیدهایی است که باید برآورده شوند. برای حل مسائل بهینه‌یابی چندهدفه، الگوریتم‌های متعددی توسعه یافته‌اند که اغلب آنها مبتنی بر مفهوم جبهه پارتو هستند. بر خلاف بهینه‌سازی تک‌هدفه که در آن جواب بهینه واحد جستجو می‌شود، در مسائل چندهدفه، به دلیل توازن بین اهداف متضاد، جواب بهینه واحدی وجود ندارد و باید چندین جواب بهینه که مجموعه نامغلوب نامیده می‌شوند را جستجو کرد. این موضوع بدان معناست که اگرچه نمی‌توان یک نقطه بهینه را همزمان برای تمامی توابع هدف بدست آورد که بتواند تمام توابع هدف را بهینه نماید، اما می‌توان مجموعه‌ای از پاسخ‌ها را به گونه‌ای پیدا نمود که در فضای جستجو از پاسخ‌های دیگر بهتر باشند و این مجموعه پاسخ‌های بهینه پارتو و نقاط دیگر فضای جستجو را مجموعه پاسخ‌های مغلوب می‌نامند(خواجه‌زاده دزفولی، مهدی، ۱۳۹۵). به زبان ریاضی، مسائل بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه، نوعی مسأله برنامه‌ریزی ریاضیاتی با برداری به ارزش توابع هدف است که با $\mathbf{f(x)} = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))^T$ برای هر بردار تصمیم $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)^T$ تعریف می‌شود که $fj(x)$ تابعی با ارزش واقعی برای مجموعه ممکن $S \subseteq R^N$ برای هر $j = 1, \ldots, n$ است. در نتیجه، فضای تصمیم از R^N به R^n است و مسأله بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه می‌تواند به شرح زیر شروع شود:

Optimize: $\{f_1(x), \ldots, f_n(\mathbf{x})\}$ (۳۲)
s.t. $x \in S$.

در فضای معیار، برخی از توابع هدف می‌بایست بیشینه شوند ($j \in J_1$) در حالی‌که دیگر اهداف می‌بایست کمینه شوند ($j \in J_2$) در حالیکه J_1 و J_2 بدین صورت شناخته می‌شوند: $J1 \cup J2 = \{1 \text{و} \ldots \text{و} n\}$ و $J1 \cap J2 = \emptyset$. گفته می‌شود $x \in S$ بهینه پارتو یا حل کاراست اگر هیچ $x' \in S$ وجود نداشته باشد که $f_j(x') \geq f_j(x)$ لذا برای هر $j \in J1$ و $f_j(x') \leq f_j(x)$ برای هر $j \in J2$. مجموعه تمامی حل‌های بهینه پارتو $x \in S$ (در فضای تصمیم) مجموعه بهینه پارتو نامیده می‌شود که با E نشان داده می‌شود و مجموعه بردارهای هدف مرتبط آنها $f(x)$ (در فضای معیار) جبهه پارتو نامیده می‌شود، با $f(E)$ نشان داده می‌شود. علاوه بر این، در خصوص دو بردار هدف $z, z' \in Rn$ گفته می‌شود که z' بر z غلبه کرده است اگر و فقط اگر $z'_j \leq z_j$ به ازای هر $j \in J1$ و $z'_j < z_j$ به ازای هر $j \in J2$. اگر z' و z هیچکدام بر دیگری غلبه نکنند، گفته می‌شود که z' و z نامغلوب هستند(سبوریدو و همکاران، ۲۰۱۶).

الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب یکی از الگوهای شاخص و پرکاربرد در زمینه بهینه‌سازی چندهدفه است. در این الگوریتم برای ارزیابی برازندگی جواب‌ها از رویکرد سریع مرتب‌سازی نامغلوب[11] استفاده می‌کند. روال این کار به این صورت است که در ابتدا جمعیت حاضر مجموعه جواب‌هایی که تمام جواب‌های حاصل را مغلوب می‌کنند، مشخص می‌کند و آنها را جبهه ۱ می‌نامد. مجدداً همین عمل را برای مجموعه جواب‌های باقی‌مانده انجام می‌دهد و مجموعه جواب‌های غالب را جبهه ۲ می‌نامند و همین رویه تا جبهه‌بندی کل جمعیت، ادامه می‌یابد. پس از آن، برای عملگر تقاطع از مفهوم انتخاب مسابقه‌ای ازدحام استفاده می‌شود. در واقع دو جواب به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و بین آن دو مسابقه برقرار می‌گردد. هر کدام که شماره جبهه کوچکتری داشت، جواب بهتر است.در موارد که دو جواب انتخابی در یک جبهه هستند، از مفهوم تخصیص فاصله ازدحام استفاده می‌شود (خواجه‌زاده دزفولی مهدی، ۱۳۹۵).

۷- الگوریتم اختصاصی طراحی شده

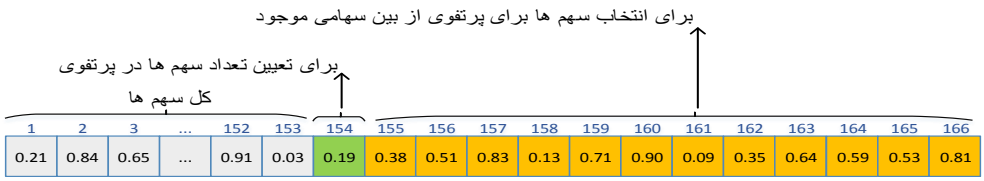
شبه‌کد الگوریتم در شکل زیر نشان داده شده است.

Begin
Create initial population as *pop* randomly
Create crossover population and mutation population (pop_c , pop_m)
Do crossover and mutation
Merge pop_c , pop_m and make a new population
Make fronts of non-dominated solutions and calculate crowding distance
Update *pop* by replacing population with *pop_size* selected solutions according to fronts and crowding distance
If terminate criteria met stop running.
End

شکل ۱) شبه کد الگوریتم NSGA-II

- **ساختار کروموزوم طراحی شده**

بطور واضح ایجاد ساختاری مناسب برای کروموزوم در الگوریتم ژنتیک چندهدفه می‌تواند تاثیر بسزایی در کیفیت و کارایی این الگوریتم داشته باشد. در واقع یک ساختار مناسب برای کروموزوم می‌تواند منجر به جستجو در فضای کامل جواب شود و بدین ترتیب جواب حاصل از الگوریتم پاسخ بهتری خواهد بود. آنچه که این استفاده از الگوریتم فراابتکاری را در این مساله دشوار می‌کند دو مرحله‌ای بودن حل مدل مسأله می‌باشد، بدین معنی که در ابتدا باید تعداد سهم‌های موجود در هر پورتفوی تعیین شود و سپس میزان سرمایه‌گذاری در سهم‌های موجود در آن پورتفوی تعیین گردد. کروموزوم طراحی شده در این مقاله مشکل مذکور را حل کرده و با ایجاد ساختاری یکسان برای تمام کروموزوم‌ها مسأله را حل می‌کند(خواجه‌زاده دزفولی مهدی، ۱۳۹۵). شکل زیر مثالی از کروموزوم طراحی شده را نشان می‌دهد.



شکل ۲) ساختار کروموزوم طراحی شده

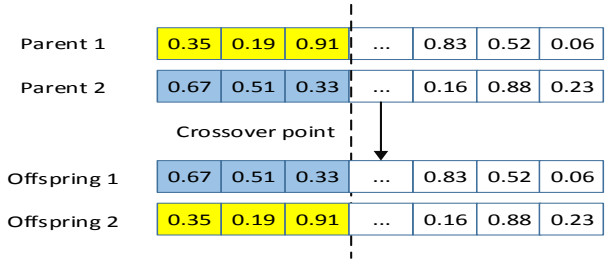
ساختار طراحی شده از سه بخش اصلی تشکیل شده است. در قسمت اول کروموزوم، کل شرکت‌های موجود در مسأله که به تعداد ۱۵۳ عدد می‌باشد، در نظر گرفته شده است و قسمت دوم از یک سلول تشکیل شده است و برای تعیین تعداد سهم‌های موجود در هر پرتفوی می‌باشد و قسمت سوم شامل سلول‌های نارنجی رنگ می‌باشد که برای انتخاب سهم‌ها برای پرتفوی مورد نظر می‌باشد. به تمامی این سلول‌ها عددتصادفی بین ۰ و ۱ تخصیص داده می‌شود و سپس با تابعی که تعریف شده است این مقادیر به مقادیر اصلی متغیرهای مسأله تبدیل می‌شوند. در ابتدا با استفاده از عدد موجود در سلول ۱۵۴ با استفاده از بازه‌بندی‌های صورت گرفته بین ۰ و ۱ و اینکه در کدام بازه قرار دارد تعداد سهم‌های موجود در پرتفوی تعیین می‌شود و سپس به همین روش و با تابعی که تعریف شده است، اعداد موجود در سلول‌های نارنجی رنگ سهم‌هایی را که باید از بین ۱۵۳ سهم موجود انتخاب شوند را تعیین می‌کنند و در این مرحله پرتفوی مشخصی ایجاد شده است که اعداد موجود در آن بین ۰ و ۱ می‌باشند. حال برای تعیین میزان سرمایه‌گذاری در هر سهم هرکدام از این اعداد تقسیم بر مجموع کل اعداد موجود در پرتفوی می‌شوند تا بدین ترتیب درصد سرمایه‌گذاری در هر سهم تعیین شود و طبیعتاً مجموع این درصدها برابر یک خواهد بود. در انتها با استفاده از مقادیر متغیرها و داده‌های مسأله توابع هدف مدل محاسبه می‌شوند. از ویژگی‌های بارز کروموزوم تعریف شده می‌توان بدین مسأله اشاره کرد که تمام محدودیت‌های مسأله در ساختار ایجاد شده رعایت می‌شوند و هیچ جواب نشدنی تولید نخواهد شد. بنابراین می‌توان اطمینان حاصل کرد که جواب نهایی مسأله شدنی خواهد بود.

- **عملگرهای الگوریتم ژنتیک چندهدفه**

فرایند جستجو در الگوریتم ژنتیک چندهدفه به وسیله دو عملگر جهش[۱۲] و تولید مثل (تقاطع)[۱۳] انجام می‌شود. عملگر تولید مثل به منظور استخراج جواب‌های بهتر استفاده می‌شود در حالی که عملگر جهش به منظور کاوش در فضای جواب وسیع‌تر استفاده می‌شود. در این رساله از این دو عملگر برای حفاظت از شدنی بودن جواب و یافتن جواب‌های بهتر استفاده شده است(خواجه‌زاده دزفولی مهدی، ۱۳۹۵).

- **عملگر تولید مثل**

به طور معمول این عملگر از دو کروموزوم برای ایجاد ایجاد یک کروموزوم با مشخصه‌های جدید استفاده می‌کند که کروموزوم‌های انتخاب شده را والدین و کروموزوم جدید ایجاد شده را فرزند می‌نامند. چندین نوع از این عملگر در الگوریتم ژنتیک چندهدفه استفاده می‌شود که شامل تولید مثل تک برش[۱۴]، تولید مثل دو برش[۱۵] و تولید مثل یونیفرم[۱۶] می‌باشد. در این رساله از عملگر تولید مثل تک‌برش برای یافتن جواب‌های بهتر استفاده می‌شود. برای انتخاب والدین از روش چرخ رولت[۱۷] استفاده می‌شود. شکل زیر نمونه‌ای از تولیدمثل تک برش را نشان می‌دهد.



شکل ۳) نمونه‌ای از تولید مثل تک برش

- **عملگر جهش**

انواع مختلفی از عملگر جهش وجود دارد که در الگوریتم ژنتیک چندهدفه استفاده می‌شود. مواردی مانند جانشینی[۱۸]، الحاق[۱۹]، معکوس‌سازی[۲۰] استفاده می‌شوند. در این مقاله تمامی این متدها مورد استفاده قرار گرفته است. در ابتدا یک کروموزوم با استفاده از روش چرخ رولت انتخاب می‌شود. اعداد ۱ تا ۳ به ترتیب به عملگرهای جهش تخصیص داده می‌شود سپس عددی تصادفی صحیح بین بازه [1,3] تولید می‌شود که این عدد تعیین می‌کند از کدام عملگر استفاده شود. نمونه‌ای از عملگر جانشینی در شکل زیر نشان داده شده است:

شکل ۴) نمونه‌ای از عملگر جانشینی جهت جهش

- **فاصله ازدحامی**

برای بدست آوردن تخمینی از چگالی جواب‌های موجود در کنار یک جواب خاص، میانگین فاصله‌ای از دو جواب واقع در طرفین آن جواب برای هر تابع هدف جداگانه محاسبه می‌شود. مقدار عددی که از محاسبه فضای مربعی (در مسائل دوهدفه) اطراف جوابj با بکار بردن نزدیکترین همسایه‌های آن بدست می‌آید، فاصله ازدحامی نامیده می‌شود که از رابطه زیر حساب می‌شود.

$$d_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(j-1) - f_i(j+1)}{f_i^{max} - f_i^{min}} \qquad (۳۳)$$

به طور کلی فاصله ازدحامی جواب‌ها در فضای جواب مسائل چند هدفه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

گام اول: در هر جبهه، جواب‌ها بر اساس یکی از توابع هدف دلخواه به صورت نزولی مرتب می‌شوند، فرض می شود که تعداد توابع هدف مسأله و تعداد جواب‌ها در هر جبهه برابر باشد.

گام دوم: فاصله ازدحامی نقاط اول و آخر لیست برابر بی‌نهایت می‌شود (دلیل این امر آن است که در کنار این نقاط، نقاط دیگری وجود ندارد که آن را پوشش دهد).

۸- فرضیات تحقیق

بین عملکرد مدل‌های بهینه‌سازی تکاملی چهارهدفه و سه هدفه در دو وضعیت مختلف فازی و غیرفازی تفاوت معنی‌داری وجود ندارد.

۹- جامعه و روش نمونه‌گیری

جامعه آماری تحقیق، صنایع فهرست شده در بورس اوراق بهادار تهران با دو معیار الف) تمرکز بازار و گردش معاملات و ب) تعداد شرکت‌های پذیرفته شده در صنعت بوده است. به این ترتیب از بین ۳۵ صنعت فهرست شده در بورس اوراق بهادار تهران، بدون در نظر گرفتن صنایعی مانند بانک‌ها و مؤسسات اعتباری، بیمه و صندوق بازنشستگی، سرمایه‌گذاری‌ها، چندرشته‌ای صنعتی و سایر واسطه‌گری‌های مالی (که خصوصیات نامتعارف ساختار سرمایه و شیوه متفاوت گزارشگری آنها می‌تواند باعث انحراف داده‌ها شود)، صنایعی که بیشتر در معرض توجه بازیگران بازار قرار داشته و شامل حداقل ۱۰ شرکت فعال و حائز شرایط لازم به شرح زیر هستند، به عنوان نمونه آماری تحقیق انتخاب شد:

۱) قبل از سال ۱۳۸۴ در بورس اوراق بهادار تهران پذیرفته شده باشند

۲) سهام آنها در بازه ۱۳۸۴-۱۳۹۴ و در هر فصل حداقل به مدت یک هفته کاری معامله شده باشد.

۳) در بازه زمانی فوق، صورت‌های مالی آنها در سامانه کدال منتشر شده باشد.

که در نهایت با در نظر گرفتن ملاحظات بالا صنایع زیر انتخاب شدند:

الف) خودرو و ساخت قطعات، ب) فلزات اساسی، پ) محصولات شیمیایی، ت) مواد و محصولات دارویی، ث) ماشین آلات و تجهیزات، ج) محصولات غذایی و آشامیدنی و چ) سیمان، آهک و گچ

۱۰- روش تحقیق

این تحقیق از نظر هدف کاربردی است. از نظر روش اجرا نیز جزو تحقیقات توصیفی و از نوع تحلیل همبستگی محسوب می‌شود. از آنجایی که این پژوهش بر اساس داده‌های اسنادی انجام می‌شود، این تحقیق را می‌توان جزء تحقیقات پس‌رویدادی به حساب آورد. گام‌های انجام تحقیق به صورت زیر بوده است:

۱) در گام اول داده‌ها با روشی که در قسمت جامعه و روش نمونه‌گیری بیان شد، مشخص شد.
۲) بازده‌های روزانه هر کدام از شرکت‌ها از سایت TSETMC و نرم‌افزار ره‌آورد نوین استخراج و بازده ماهانه، نیم‌واریانس منفی (ریسک نامطلوب) چولگی و کشیدگی هر یک از شرکت‌ها محاسبه شد.
۳) چارک‌های بازدهی‌ها تعیین گردید و بازده فازی، نیم‌واریانس فازی، چولگی فازی و کشیدگی فازی محاسبه گردید و پس از آن طبق فرمول‌ها بالا به اعداد کریسپ تبدیل شد.
۴) ملاحظات مدنظر سرمایه‌گذار در میزان سرمایه‌گذاری در هر شرکت(حداکثر ۶۰ درصد کل آورده اولیه) و تعداد اعضای پرتفوی(بین ۴ تا ۹ سهم) دخیل گردید.
۵) الگوریتم‌های NSGA-II جداگانه برای هر یک از مدل‌ها در محیط نرم‌افزار متلب کدنویسی شد و پس از انجام طراحی آزمایشات به روش تاگوچی اندازه جمعیت برابر ۱۵۰، تکرار برابر ۱۰۰، نرخ تولیدمثل ۸۵ درصد و نرخ جهش ۱۵ درصد تعیین شد. پس از آن هر کدام از دو مدل ده بار اجرا شد و پرتفوهای غیرمغلوب تعیین گردید.
۶) با استفاده از نسبت سورتینو، از میان پرتفوهای غیرمغلوب، بهترین پرتفوی انتخاب گردید.
۷) برای مقایسه بین پرتفوهای استخراج شده، از نسبت ترینر با استفاده از داده‌های واقعی سال ۱۳۹۵ استفاده شد که خلاصه نتایج آن در جدول شماره ۱ آمده است.
۸) سپس برای مقایسه عملکرد مدل‌ها در دو وضعیت فازی و غیرفازی از آزمون فرض t زوجی استفاده شد. هدف از انجام این آزمون، تعیین معنی‌داری یا عدم معنی‌داری اختلاف بین دو معیار بازده و نسبت ترینر در دو وضعیت مختلف فازی و غیرفازی است. رابطه ۳۴ نحوه محاسبه این آماره را نشان می‌دهد(آذر و مؤمنی، ۱۳۸۲):

$$t_{n-1} = \frac{\mu_d}{s_d/\sqrt{n}} \qquad (۳۴)$$

در رابطه (۳۴)، μ_d نشان‌دهنده میانگین اختلاف دو نمونه، s_d نشان دهنده انحراف معیار اختلاف و n حجم نمونه را نشان می‌دهد این آماره دارای توزیع t-student با درجه آزادی $n-1$ است. با استفاده از تابع $ttest$ در

نرم‌افزار متلب این آزمون انجام شد و نتایج این آزمون در جدول شماره (۲) برای سطح اطمینان ۹۵ درصد آورده شده است.

۱۱- نتایج تحقیق

جدول شماره ۱: خلاصه نتایج پاسخ‌های برنامه‌ریزی‌های سه‌هدفه و چهار هدفه و نسبت ترینر پرتفوهای استخراج شده

	اجرای اول	اجرای دوم	اجرای سوم	اجرای چهارم	اجرای پنجم	اجرای ششم	اجرای هفتم	اجرای هشتم	اجرای نهم	اجرای دهم
بازده پرتفوی‌های استخراج شده از مدل میانگین-نیم‌واریانس-چولگی	۳۶,۶۰	۲۳,۵۲	۲۵,۳۶	۱۰,۹۲	۱۳,۵۷	۷,۲۹	۲۴,۱۲	۱۴,۴۴	۲۶,۲۴	۱۵,۱۱
نسبت ترینر مدل میانگین-نیم‌واریانس-چولگی	-۵,۷۸	-۱۴,۳۶	-۱۰,۳۹	-۰,۸۸	-۱۰,۰۵	-۵,۳۲	-۳,۷۹	-۷,۰۳	-۲,۷۱	-۵,۴۲
بازده پرتفوی استخراج شده از مدل میانگین فازی-نیم‌واریانس فازی-چولگی فازی	۷,۴۵	۲۶,۹۲	۵۶,۱۹	۱۴,۸۹	۶۷,۸۴	۳۱,۳۱	۱۳,۹۹	۳۶,۶	۲۳,۵۵	۲۵,۴
نسبت ترینر مدل میانگین فازی-نیم‌واریانس فازی-چولگی فازی	-۰,۰۲۳	-۷,۰۰	۲,۸۹	۲,۰۳	-۲,۶۴	-۲,۲۲	-۱,۳۷	-۱,۱۳	۰,۹۸	۳,۶۲
بازده پرتفوی‌های استخراج شده از مدل میانگین-نیم‌واریانس-چولگی-کشیدگی	۱,۶۷	۲۱,۶۷	۳۰,۲۳	۱۸,۰۱	۳۲,۵۳	۲۰,۰۰	۶,۳۲	۱۱,۲۰	۳,۴۲	۱۲,۵۰
نسبت ترینر مدل مدل میانگین-نیم‌واریانس-چولگی-کشیدگی	-۰,۰۳	-۱۲,۷۲	-۰,۰۵	۱,۹۴	-۳۴۵,۵۷	-۱۰۹,۰۵	۷,۴۳	-۱۷,۴۷	-۷۶,۷۲	-۲۱,۴۳
بازده مدل میانگین فازی-نیم‌واریانس فازی-چولگی فازی-کشیدگی فازی	۱۷,۶۳	۶۱,۶۳	۲۳,۸۶	-۱۴,۴۰	۳۰,۶۴	۱۰۳,۷۵	۱۴,۴۶	۱۵,۳۸	-۲۴,۳۰	۶۸,۹۶
نسبت ترینر مدل میانگین فازی-نیم‌واریانس فازی-چولگی فازی-کشیدگی فازی	۴۴,۲۹	۱۸,۷۶	۴۱,۰۳	۸۵,۳۹	۳۹,۳۳	۲۹,۷۰	۴۵,۱۲	۲۹,۶۳	۳۵,۱۰	۵۹,۹۰

جدول (۲) آزمون t زوجی برای مقایسه مدل‌های سه هدفه و چهارهدفه

ردیف	مورد مقایسه	مقدار آماره	مقدار بحرانی	Pvalue	فرض مورد قبول
۱	بازده مدل‌های فازی و غیرفازی چهار هدفه	-۴,۴۵	۲,۲۶۲	۰,۰۰۱۵۹	H۱
۲	نسبت ترینر مدل‌های فازی و غیر فازی چهار هدفه	-۲,۲۹۷	۲,۲۶۲	۰,۰۴۷۲	H۱
۳	بازده مدل‌های فازی و غیرفازی سه هدفه	-۲,۲۶۵	۲,۲۶۲	۰,۰۴۹۷	H۱
۴	نسبت ترینر مدل‌های فازی و غیر فازی سه هدفه	۶,۳۷۱	۲,۲۶۲	۰,۰۰۰۱۳	H۱

هنگامی‌که فرض H ۱ موردقبول است، بدین معناست که فرضیه رد شده و بین دو مدل اختلاف معنی‌داری وجود دارد. لذا با توجه به آماره آزمون t می‌توان نتیجه گرفت که مدل چهار هدفه فازی عملکرد بهتری نسبت به مدل چهار هدفه غیرفازی دارد.

۱۲- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله با بهره‌گیری همزمان از چندین گشتاور با مراتب بالاتر، و بهره‌گیری از تئوری فرامدرن پرتفوی، در دو حالت فازی و غیرفازی، و با لحاظ نمودن خواسته‌ها و ملاحظات سرمایه‌گذاران، به مدلسازی و حل مسأله انتخاب پرتفوی بهینه پرداخته شد. در این خصوص، مدل‌های مختلفی به صورت سه هدفه و چهارهدفه طراحی گردید. از آنجایی که حل و دستیابی به پاسخ‌های که به طور همزمان، تمامی اهداف را در هر بار اجرا بهینه نماید، با روش‌های معمول امکان پذیر نمی‌باشد، و بر اساس تئوری پیچیدگی، این مسائل پیچیده چندجمله‌ای از نوع NP_Hard محسوب می‌شوند، از الگوریتم تکاملی NSGAII استفاده شد و این الگوریتم به صورت اختصاصی و با توجه به شرایط و ملاحظات مدنظر سرمایه‌گذار طراحی گردید. با توجه به آنکه، حل این دسته از مسائل جواب واحدی ندارد و پاسخ‌ها در قالب مرز پارتو ارائه می‌شود، به گونه‌ای عمل شد که بهترین پرتفوی، با بالاترین نسبت سورتینو از مرز پارتو استخراج گردد و این روند برای هر یک از مدل‌ها تا ۱۰ بار تکرار گردید. پس از اینکار، بهترین پرتفو از جبهه پارتو بر اساس بیشترین نسبت سورتینو استخراج شد. سپس، برای مقایسه بین پاسخ‌های استخراج شده، اطلاعات پرتفوی‌های استخراج شده با اطلاعات واقعی بازار در سال ۹۵ تطبیق داده شد و نتایج پرتفوی‌ها با استفاده از نسبت ترینر با یکدیگر مقایسه شد. برای اطمینان از قابل تعمیم بودن پاسخ‌های استخراج شده، نتایج با استفاده از آماره t مورد مقایسه قرار گرفت. در نهایت و پس از طی تمامی مراحل ذکر شده، مشخص گردید که ۱) طراحی و حل مدل‌هایی که بتوانند هم طبیعت چندهدفه مسأله انتخاب پرتفو را در نظر گرفته و هم ملاحظات مدنظر سهامدار را در انتخاب پرتفو دخیل نماید امکان‌پذیر است ۲) بین عملکرد مدل‌های بهینه‌سازی تکاملی چهارهدفه و سه هدفه در دو وضعیت مختلف فازی و غیرفازی تفاوت معنی‌داری وجود دارد و ۳) فازی در نظر گرفتن گشتاورها باعث تشکیل پرتفوهای کاراتر و مطلوب‌تری می‌گردد.

فهرست منابع

* آمار و کاربردهای آن در مدیریت، دکتر عادل آذر، دکتر منصور مؤمنی، انتشارات سمت، ۱۳۸۲
* تحقیق در عملیات پیشرفته «ویژه رشته مدیریت صنعتی کد رشته ۲۱۶۴» دکتری، مهدی خواجه‌زاده دزفولی، مدرسان شریف، ۱۳۹۵
* رستمی محمدرضا، کلانتری محمود، بهزادی عادل؛ گشتاورهای مراتب بالاتر در بهینه‌سازی سبد سهام در محیط فازی؛ فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، دوره ۶، شماره ۲۴، پاییز ۱۳۹۴، صفحه ۶۲-۴۱
* کاظمی میان گسکری، مینا؛ پاکیده کیخسرو و قلی‌زاده محمدحسن؛ بهینه‌یابی سبد سهام (کاربرد مدل ارزش در معرض ریسک برروی کارایی متقاطع)؛ فصلنامه علمی پژوهشی راهبرد مدیریت مالی، مقاله ۷، دوره ۵، شماره ۲، شماره پیاپی ۱۷، تابستان ۱۳۹۶، صفحه ۱۸۳-۱۵۹
* نجفی، امیرعباس و پوراحمدی، زهرا، بهینه‌سازی پویای سبد سرمایه‌گذاری با توجه به هزینه معاملات، فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، دوره ۶، شماره ۲۴، پاییز ۱۳۹۴، صفحه ۱۷۲-۱۳۵
* همائی فر ساغر، روغنیان عماد؛ به کارگیری الگوهای بهینه‌سازی پایدار و برنامه‌ریزی آرمانی در مسأله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای؛ فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، دوره ۷، شماره ۲۸، پاییز ۱۳۹۵، صفحه ۱۶۷-۱۵۳
* Anagnostopoulos, K.P., & Mamanis, G. (2010). A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. Computers & Operations Research, 37, 1285-1297
* C.A.C. Coello, G.B.Lamont, D.A.V. Veldhuizen, Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems, 2nd ed., Springer, New York, US, 2007.
* E. Vercher, J. D. Bermudez, Portfolio absolute optimization using acredibility mean-semi-deviation model, Expert Syst. Appl. 42(2015)7121–7131.
* Rubén a Saborido, Ana B.Ruiz, José D.Bermúdez, Enriqueta Vercher, Mariano Luque, Evolutionary Muli-Objective Optimization Algorithm for fuzzy portfolio selection, Applied Soft Computing (39), 2012
* R.Bhattacharyya, S.Kar, D.D.Majumder, Fuzzy mean-variance-skewnessport-models by interval analysis, Comput.Math. Appl.61(1)(2011), 126–137
* R.Rodriguez, M.Luque, M.Gonzalez, market Portfolio selection in the Spanish stock by interactive multi objective programming, TOP 19(1) (2011)213–231.

یادداشت‌ها

[1] Possibility Theory
[2] Bhattacharyya, Majumder
[3] E. Vercher, J.D.Bermudez
[4] R. Rodriguez, M.Luque, M.Gonzalez
[5] C.A.C. Coello, G.B. Lamont, D.A.V. Veldhuizen
[6] K.P. Anagnostopoulos
[7] Huiling, W., Yang, Zeng., Haixiang Yao
[8] Anagnos- and Mamanis

[9] Rubén Saborido, Ana B.Ruiz, José D.Bermúdez, Enriqueta Vercher, Mariano Luque
[10] Shape
[11] Non-dominated sorting
[12] Mutation
[13] Crossover
[14] Single point crossover
[15] Double point crossover
[16] Uniform crossover
[17] Roulette wheel selection
[18] Swap
[19] Insertion
[20] inversion