فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گـذاری
سال دهم/ شماره سی‌وهفتم/ بهار ۱۴۰۰

# بررسی سود آوری استراتژی معامله زوجی بر پایه سیستم حالت– فضای خطی و فیلتر کالمن در بورس اوراق بهادار

**محمد مهدی براهیمی پور**
کارشناس ارشد مهندسی مالی، واحد دهاقان ،دانشگاه آزاد اسلامی ، دهاقان، ایران
mmbarahimipour@gmail.com

**سید محمد رضا داودی**
استادیار، گروه مدیریت، واحد دهاقان ،دانشگاه آزاد اسلامی ، دهاقان، ایران. (نویسنده مسئول)
smrdavoodi@ut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۷/۲۳ تاریخ پذیرش: ۹۷/۱۲/۱۲

## چکیده

آربیتراژ آماری که از زیر مجموعه‌های معاملات الگوریتمی می‌باشد، به استراتژی‌هایی اشاره دارد که از برخی روش‌ها و مدل‌های آماری، به منظور کسب سود، از دارایی‌هایی که به صورت نسبی قیمت گذاری اشتباه شده اند، استفاده می کند. یکی از این استراتژی‌ها معامله زوجی می‌باشد. هدف از این تحقیق بررسی سود آوری استراتژی معامله زوجی بر پایه سیستم حالت-فضای خطی و فیلتر کالمن در بورس اوراق بهادار می‌باشد. استراتژی معامله زوجی پژوهش بر پایه توصیف فرآیند قابل مشاهده یعنی باقی‌مانده های مدل همجمعی بر حسب یک فرآیند غیر قابل مشاهده با خاصیت بازگشت به میانگین و در ضمن یک مدل حالت-فضا قرار دارد. سود آوری استراتژی معامله زوجی پژوهش بر روی ۲۱ سهم از زیر مجموعه سهام صنایع فرآورده های نفتی و فلزات اساسی از بورس اوراق بهادار تهران در فاصله سال های ۱۳۹۵-۱۳۹۰و با توجه به معیار بازده و نسبت شارپ مورد بررسی قرارگرفت. نتیجه تحقیق نشان می‌دهد که مدل زوجی پژوهش دارای معادل بازده روزانه‌ای برابر۰/۰۰۴۸ و نسبت شارپ ۱/۲۳ می باشد که در معیار نسبت شارپ در مقایسه با معامله زوجی بر حسب همجمعی و عملکرد بازار سودآورتر می باشد.

**واژه‌های کلیدی:** آربیتراژ آماری، معامله زوجی، هم جمعی، فیلتر کالمن.

## ۱- مقدمه

به طور کلی سهام و اوراق بهادار همواره با عدم قطعیت و ریسک همراه هستند. با این حال، بسیاری از سرمایه گذاران پتانسیل ایجاد سود در بازار سهام را با استفاده از اطلاعات و به کارگیری استراتژی‌ها و سیستم‌های معاملاتی مختلف دنبال می‌کنند. در حالی که برخی از سرمایه گذاران اقدام به خرید سهام بر اساس اطلاعات شرکتهای خاص می‌کنند، برخی دیگر بر اساس درک درستی که از بازار سهام دارند با به کارگیری استراتژیها و سیستم های معاملاتی مختلف سعی در ایجاد سود دارند. یکی از این استراتژی‌ها در معاملات سهام، استراتژی معاملات زوجی[۱] است. سیستم معاملات زوجی یکی از شناخته‌شده‌ترین سیستم های معاملات الگوریتمی می باشد. از آنجا که سیستم های معاملاتی باید از لحاظ سود آوری و اثربخشی مورد بررسی قرار گیرند، در این پژوهش سود آوری یک سیستم معامله زوجی با رویکرد مدل حالت-فضا [۲]مورد بررسی و مقایسه قرار می گیرد.

## ۲-مبانی نظری و پیشینه پژوهش

آربیتراژ در علم اقتصاد و مالی به معنای بهره گرفتن از تفاوت قیمت بین دو یا چند بازار برای کسب سود است. به عبارتی سود آربیتراژ زمانی ایجاد می‌شود که یک کالای مشابه در دو بازار مختلف یا در مواردی خاص در دو قالب متفاوت عرضه می‌شود اما قیمت های یکسانی ندارد. وجود آربیتراژ نتیجه ناکارآمد بودن بازار است و ابزار های نوین مالی مکانیزمی ایجاد می‌کند که موجب می‌شود قیمت ها به طرز قابل‌توجهی از ارزش منصفانه و واقعی‌شان در درازمدت منحرف نشوند. در پاسخ به این سوال که آربیتراژ را چگونه می توان کشف و مورد استفاده قرار داد، الگوریتم های معاملاتی زیادی بوجود آمده اند.

معاملات الگوریتمی[۳] در بازارهای مالی به معنای استفاده از برنامه‌های کامپیوتری برای ورود سفارش‌های معاملاتی است. یک یا چند الگوریتم در انتخاب و اعمال این سفارش‌ها از جنبه‌های مختلف مانند زمان‌بندی، قیمت یا حجم بدون دخالت انسان تصمیم‌گیری و اجرا می‌شود. معاملات الگوریتمی حجم عظیمی از داده‌ها را پردازش و از تکنیک‌های پیشرفته ریاضی جهت یافتن بهترین الگو استفاده می‌کند. پیش‌بینی‌ها و تصمیمات بر پایه مدل و تئوری احتمالات ایجاد می‌شود. این نوع معاملات یک حوزه میان رشته‌ای است که بر بینش محاسباتی، ریاضیات مالی، روش‌های عددی و شبیه‌سازی کامپیوتری تکیه و تصمیماتی به منظور مدیریت ریسک اخذ می‌کند. معاملات الگوریتمی کاربرد گسترده‌ای در شرکت‌های تامین سرمایه، صندوق‌های بازنشستگی و صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک دارد(بوگوملف[۴]، ۲۰۱۱).

آربیتراژ آماری[۵] یک رویکرد معامله الگوریتمی در بازارهای سرمایه مانند بازار سهام یا بورس کالا می باشد. آربیتراژ آماری شامل استفاده از فرصت های آربیتراژی می باشد که بر اساس مدل های آماری محاسبه و بدست آمده اند. یکی از متداول ترین رویکردها در آربیتراژ آماری معامله زوجی می باشد. همانطور که از نام معامله زوجی مشخص است این استراتژی معاملاتی بر روی یک زوج سهم اعمال می شود.اعمال این استراتژی شامل خرید همزمان یک دارایی از زوج مورد نظر و فروش (استقراضی) همزمان دارایی دیگر است.کدام دارایی خریده و

کدام فروخته می شود؟برای پاسخ به این سوال روش های مختلفی که در معامله زوجی استفاده می شوند هر کدام از مفهوم قیمت گذاری نسبی اشتباه به شیوه خود استفاده می کنند(مورا[۶] و همکاران،۲۰۱۶).

بنابراین در معامله زوجی مفهومی به نام قیمت گذاری نسبی وجود دارد. در صورتی که مدل آماری مورد نظر در هر کدام از روش های معامله زوجی حاکی از قیمت گذاری نسبی اشتباه دو دارایی باشد، دارایی که به صورت نسبی زیر قیمت ارزش گذاری شده است خریداری (چون انتظار می رود افزایش قیمت یابد) و دارایی که به صورت نسبی بالای قیمت ارزش گذاری شده است فروخته می شود(چون انتظار می رود قیمت آن کاهش یابد).

معاملات زوجی یک استراتژی سرمایه گذاری خنثی نسبت به تغییرات و روندهای بازار است که معامله گر را به کسب سود در هر شرایط از بازار مانند نزولی، صعودی و یا حرکتهای مجانبی و یا حتی در دوره هایی با نوسانات بالا یا پایین، قادر می‌سازد . این استراتژی از آنجایی که به طور همزمان خرید و فروش را روی دو دارایی مرتبط لحاظ می‌کند و از مزایای تفاوت قیمتی بین آنها بهره گرفته و سود کسب می‌کند، در گروه استراتژی‌های آربیتراژ آماری قرار می‌گیرد(کلج و کراوس[۷] ۲۰۱۸).

روش های معاملاتی مبتنی بر آربیتراژ در مجلات علمی کمتر افشا شده و به صورت یک راز برای شرکت ها و سرمایه گذاران حرفه ای باقی می مانند زیرا این دسته سیستم های معاملاتی فرصت های کم ریسکی برای معامله بوجود می آورند. بعلاوه روش های آربیتراژ آماری بر خلاف مفهوم آربیتراژ معمولی به دو یا چند بازار در چند کشور یا چند شهر و یا تحلیل همزمان یک دارایی در بازار نقد و آتی محدود نمی شود و می تواند در مورد دو دارایی در یک بازار به کار رود. اهمیت دیگر معاملات زوجی خنثی آنها نسبت به جهت بازار می باشد و بنابراین در بازارهای صعودی و نزولی قابل انجام هستند.تحقیق حاضر اولین تحقیق در مورد بررسی سودآوری روش های مختلف در معامله زوجی در بورس اوراق بهادار تهران می باشد و از این رو از دید نگارنده انجام آن ضرورت دارد.

طادی و همکاران(۱۳۹۷) در پژوهشی با عنوان" ارزیابی استراتژی معاملات زوجی با رویکرد فاصله‌ای در بورس اوراق بهادار تهران" به منظور به کارگیری استراژی زوجی، زوج سهم‌ها از صنعت استخراج کانه های فلزی و داده‌های قیمت در بازه‌ی زمانی مربوط به سال ۱۳۹۵ انتخاب کردند. سپس با اعمال استراتژی زوجی و پس‌آزمایی آن، عملکرد استراتژی معاملات زوجی با استراتژی خرید و نگهداری مقایسه شده است. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که با فرض وجود سیستم فروش استقراضی و در محدوده آستانه مطلوب، بازدهی معاملات زوجی از استراتژی خرید و نگهداری بیشتر خواهد بود

فلاح پور و حکیمیان(۱۳۹۶) در پژوهشی با عنوان" بررسی عملکرد سیستم معاملات زوجی در بورس اوراق بهادار تهران: رویکرد هم انباشتگی و بررسی نسبت سورتینو " با محاسبه و بررسی بازده و نسبت سورتینو، عملکرد سیستم معاملات زوجی با استفاده از رویکرد هم انباشتگی در بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج آزمایشی بر روی زوج سهام های منتخب در بورس اوراق بهادار تهران نشان می‌دهد که

استفاده از سیستم معاملات زوجی به عنوان یک سیستم معاملاتی خنثی نسبت به تغییرات و روندهای بازار، بازدهی چشمگیری نسبت به بازدهی معمولی سهام در مدت مشابه دارد.

کلج و کراوس[8] (۲۰۱۸) برای محاسبه پارامترهای مربوط به همجمعی جزیی از نمایش حالت فضای خطی و تقریب ضرایب بوسیله ماکسیمم درستنمایی استفاده کرده و سیستم معاملاتی را بر روی ۷ زوج سهام پرکاربرد در زمینه معامله زوجی از زیر مجموعه شاخص S&P در بازه ۱۹۹۰ تا ۲۰۱۵ به کار بردند. نتیجه تحقیق نشان می دهد که سود اوری استراتژی مذکور در حدود ۱۲ درصد در سال، با در نظر گرفتن هزینه های معاملاتی می باشد که این مقدار بالاتر از روش فاصله و روش همجمعی معمولی می‌باشد.

استوبینگر و بریتار[9](۲۰۱۷) به بررسی سود آوری انواع استراتژی‌های معامله زوجی در بورس نیویورک در خلال سال های ۱۹۹۸ تا ۲۰۱۵ پرداختند. داده های مورد استفاده دارای فرکانس بالا و به صورت دقیقه به دقیقه مورد بررسی قرار گرفتند. نتیجه پژوهش نشان داد که بهترین استراتژِی زوجی دارای بازده سالیانه ای برابر ۰/۵۰۵۰ با نسبت شارپ ۸/۱۴ بعد از احتساب هزینه های معاملاتی می‌باشد. تحقیق خاطر نشان می‌کند که هر چند سود آوری استراتژی‌های زوجی در گذر زمان کمتر شده است اما همچنان می‌تواند گزینه مناسبی برای ورود به موقعیت های معاملاتی باشد.

مورا[10] و همکاران (۲۰۱۶) در پژوهشی با عنوان "معامله زوجی بر اساس مدل حالت-فضای خطی و فیلتر کالمن" به تبیین یک استراتژی معامله زوجی بر اساس نمایش فاصله همجمعی در یک سیستم حالت فضای خطی پرداختند. در این مدل فرآیند تصادفی فاصله همجمعی، بر اساس یک فرآیند بازگشت به میانگین که نقش فرآیند غیر قابل مشاهده در سیستم حالت-فضا را دارد، مدل می شود. استراژی خرید و فروش در این سیستم بر اساس دو مقدار احتمال صورت می‌گیرد که شامل احتمال بیشتر بودن فرایند فاصله از یک مقدار مشخص و برای یک فاصله زمانی مشخص و احتمال کمتر بودن فرایند فاصله از یک مقدار مشخص و برای یک فاصله زمانی مشخص می باشد. آنها برای حل سیستم خطی از فیلتر کالمن استفاده کردند و در پایان با به کارگیری آن در بورس آمریکا و برزیل نتایج حاصل از بازده سیستم معاملاتی را بالاتر از بازار گزارش دادند.

ژاکوب و وبر[11] (۲۰۱۵) سود آوری استراتژی معامله زوجی ساده را در ۳۴ کشور بررسی کردند.تحقیق آنها نشان داد هر چند این استراتژی دارای سود آوری مثبتی بوده است، اما مقدار آن کاملا به زمان وابسته است. آنها ریشه چنین رفتاری را به واکنش بیش یا کمتر از اندازه سرمایه گذاران به خبرهای بازار نسبت دادند.

بوگوملف [12](۲۰۱۱) کارایی دو روش معامله زوجی ساده و هم‌جمعی را در بورس استرالیا در فاصله سال های ۱۹۹۶ تا ۲۰۱۰ بررسی نمود . نتیجه تحقیق وی حکایت از آن دارد که قبل از در نظر گرفتن هزینه های معاملاتی هر دو روش سود آور می باشند اما با در نظر گرفتن هزینه های معاملاتی و مبحث نقد شوندگی این سود ارز بین می‌رود.

زنگ[13] و لی (۲۰۱۴) با استفاده از فرآیند ارنستین-هلنبرک سعی در بهینه سازی تصادفی آستانه خرید و فروش روش فاصله و هم جمعی را داشتند.آنها تابع هدف را برابر بیشنه سازی نرخ بازده در دفعات معامله قرار

دادند.نتیجه تحقیق آنها بر روی دو سهام پپسی و کوکاکولا نشان می دهد سیستم بهینه شده دارای سود آوری بالاتری می باشد بخصوص در موقعی که هزینه‌های معاملاتی بالا باشد.

ژی و همکاران (۲۰۱۴) با استفاده از ۸۹ سهام در بازه سال های ۲۰۰۳ تا ۲۰۱۲ به بررسی کارایی روش کاپولا در معامله زوجی پرداختند و نشان دادند که کارایی روش کاپولا بیشتر از دو روش فاصله و همجمعی بوده و تعداد موقعیت های معاملاتی که به ضرر می انجامد در روش کاپولا کمتر است.

کالدریا و مورا[۱۴] (۲۰۱۳) کارایی روش هم جمعی را در بورس سایوپاولو در بازه ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۲ بررسی نمودند. نتیجه تحقیق انها سود آوری معادل ۱۶/۳۸٪ با نسبت شارپ۱/۳۴ در سال را نشان می دهد. همچنین نتیجه تحقیق نشان می دهد که روش مورد استفاده نسبت به بازار و جهت آن خنثی می باشد و با روند بازار دارای همبستگی پایینی می‌باشد.

وو (۲۰۱۳) خاطر نشان کرد که روش های فاصله و هم جمعی بر اساس خاصیت خطی و تقارن هم بستگی بنا نهاده شدند و از این رو استفاده از کاپولا می تواند بر این دو محدودیت فارغ آید.آنها با استفاده از سه جفت سهام از یک صنعت و در یک دوره ۳۶ ماهه به این نتیجه رسیدند که سود آوری روش کاپولا از روش معامله زوجی بر اساس فاصله و بر اساس هم جمعی بیشتر است. نتیجه تحقیق انها نشان داد که روش کاپولا فرصت های معاملاتی بیشتری نسبت به دو روش دیگر ارایه می دهد.

دو وفاف[۱۵] (۲۰۱۰) و (۲۰۱۲) با در نظر گرفتن هزینه های معاملاتی، سود آوری استراتژی معامله زوجی ساده را در بازه زمانی ۱۹۶۲ تا ۲۰۰۹بررسی کردند.تحقیق انها نشان داد این سود آوری در سال ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ بالاترین مقدار را داشته و در سال ۱۹۹۰ شروع به کاهش کرده است.تحقیق آنها در سال (۲۰۱۲) با در نظر گرفتن هزینه های معاملاتی در مجموع نشان می دهد که استراتژی معامله زوجی ساده سود آور نبوده است، هر چند پورتفوی های مورد بررسی در بازار نزولی با ضرر چندانی مواجه نبوده اند.البته چهار پورتفوی از بیست و نه پورتفووی با بیشترین میزان همبستگی کواریانس دارای سود آوری معقولی در حد,د ۳/۳۷٪ در سال بوده‌اند.

گاتیف[۱۶] و همکاران (۲۰۰۶) اولین تحقیق جامع را در زمینه معامله زوجی انجام دادند.آنها ابتدایی ترین روش یعنی روش فاصله را بر روی داده های قیمت سهام در فاصله ۱۹۶۲ تا ۲۰۰۲ انجام دادند. نتیجه تحقیق آنها حاکی از کسب بازده اضافی ۱,۳٪ برای پنج سهم زوج شده بدون در نظر گرفتن هزینه های معاملاتی می باشد.آنها سپس بعد از گذشت چهار سال بار دیگر تحقیق را انجام دادند و نشان دادند که استراتژی معامله زوجی همچنان سود آور می‌باشد.

با توجه به پیشینه تحقیقات، نوآوری پژوهش حاضر، پیاده سازی روش معامله زوجی ارایه شده توسط مورا[۱۷] و همکاران(۲۰۱۶) در مورد مطالعاتی بازار سهام تهران و با در نظر گرفتن عدم امکان استفاده از فروش استقراضی می باشد. پیشینه تحقیقات فارسی نشان می دهد که تحقیقات حوزه آربیتراژ آماری انگشت شمار هستند و پژوهش حاضر برای اولین بار رویکرد معادلات حالت فضا را در زمینه معامله زوجی بررسی می‌کند.

## ۳- مدل پژوهش

### ۳-۱- معامله زوجی با رویکرد همجمعی

مفهوم اقتصادی هم جمعی برای دو یا چند سری زمانی که بر اساس مبانی نظری با یکدیگر ارتباط داده می‌شوند تا یک رابطه تعادلی بلند مدت را شکل دهند، تعریف می شود. هرچند ممکن است سری‌های زمانی دارای خاصیت همجمعی خود دارای روند تصادفی بوده باشند (ناپایا باشند) امّا در طول زمان یکدیگر را به خوبی دنبال می‌کنند به گونه‌ای که تفاضل بین آنها با ثبات (پایا) است. بنابراین مفهوم هم جمعی تداعی کننده وجود یک رابطه تعادلی بلند مدت است. بنابراین میزان انحراف دو سری همجمع از تعادل می تواند معیاری برای پیش بینی جهت آتی حرکت سری های زمانی باشد. زیرا در صورتی که به اندازه کافی از هم فاصله بگیرند انتظار می رود که دوباره به سمت نقطه تعادل حرکت کنند.

در روش معامله زوجی با رویکرد همجمعی، تمام زوج های ممکن در نمونه آماری در نظر گرفته می شوند. سپس برای هر زوج به کمک آزمون انگل و گرانچر خاصیت هم جمعی در داده های درون نمونه ای بررسی می شود. خروجی این آزمون شامل مقدار احتمال آزمون و ضریب هم جمعی می باشد. در صورتی که مقدار احتمال آزمون کمتر از ۰،۰۵ باشد، دو سری دارای خاصیت هم جمعی می باشند و لذا در دراز مدت تشکیل تعادل می دهند و یکدیگر را دنبال می کنند. بر این اساس در صورتی که خاصیت همجمعی برای دو سری $p_t^X$ و $p_t^Y$ تایید شود، میزان انحراف دو سری از حالت تعادلی خود یعنی $s_t^{'} = p_t^X - \beta p_t^Y$ محاسبه می شود که $\beta$ ضریب همجمعی می باشد . سپس میانگین و انحراف معیار سری $s_t^{'}$ در داده های درون نمونه ای که به ترتیب با $\mu$ و $\sigma$ نمایش داده می شود محاسبه و سری $s_t^{'}$ توسط رابطه $S_t = \frac{S_t^{'} - \mu}{\sigma}$ نرمال می شود و بعنوان معیاری برای قیمت گذاری نسبی مورد استفاده قرار می گیرد.

ساز و کار معامله (باز و بستن کردن موقعیت معاملاتی)در داده های برون نمونه ای به صورت متداول، زمانی که فاصله نرمال شده بیشتر از دو باشد ، سهم x فروخته(فروش استقراضی) و سهم y به تعداد $\beta$ سهم خریداری می شود. در صورتی که فاصله کمتر از منفی دو باشد سهم Y به تعداد $\beta$ سهم فروخته(فروش استقراضی) و سهم X خریداری می شود موقعیت معاملاتی زمانی بسته می شود که این فاصله به صفر یا مقدار مشخص از پیش تعیین شده ای برسد.

### ۳-۲- معامله زوجی با رویکرد مدل حالت فضا

برای توصیف همزمان چند فرآیند تصادفی می توان تمام آنها را در یک بردار تصادفی قرار داد و مجموعه مقادیر ممکن برای آن بردار را در طول زمان دنبال کرد. مقداری که یک بردار تصادفی مورد مطالعه، اخذ می کند را حالت سیستم می نامند و یک سیستم پویا همواره در حال تغییر از یک حالت به حالت دیگر می باشد. بعنوان مثال در صورتی که هدف بررسی مکان و سرعت یک ذره در طول زمان باشد با دو متغیر مکان و سرعت

مواجه هستیم و علم فیزیک کمک می کند تا بتوانیم این دو متغیر را بهم پیوند داده و به یک سیستم توصیف کننده از آنها دست یابیم. واقعیت این است که در بسیاری از موارد در علوم فیزیک و مهندسی متغیر حالت غیر قابل مشاهده می باشد و یک فرآیند اندازه گیری تابعی از مقدار آن را در طول زمان استخراج می کند که به آن خروجی سیستم یا فرآیند قابل مشاهده گفته می شود.

در پژوهش حاضر، فرآیند تصادفی قابل مشاهده همان $S_t$ است که به صورت باقی مانده مدل همجمعی یا به اصطلاح فرآیند فاصله تعریف می شود. بعباراتی $S_t = p_t^X - \beta p_t^Y$ که در آن $p_t^x, p_t^y$ قیمت دارایی های مشارکت کننده در معامله زوجی و $\alpha$ و $\beta$ ضرایب همجمعی نامیده می شوند. در ادامه فرآیند قابل مشاهده بر اساس یک فرآیند بازگشت به میانگین[۲۰] توصیف می شود و سیستم خطی نشان دهنده حالت سیستم عبارت است از:

$$S_t = x_t + D\xi_t, x_t - x_{t-1} = a - bx_{t-1} + C\eta_{t+1} \quad (1)$$
$$a \in R.0 < b < 2, D > 0, C > 0, (\xi_t, \eta_t) = NID(0, I_2)$$

که در آن $x_t$ :فرآیند تصادفی بازگشت به میانگین می باشد. معادله نشان دهنده تغییرات زمانی فرآیند بازگشت به میانگین که در معادله دوم رابطه (۱) بیان شده است را می توان به صورت رابطه (۲) بیان کرد:

$$x_{t+1} = a + (1-b)x_t + \eta_t^*, \eta_t^* = C\eta_{t+1} \quad (2)$$

که در این صورت با مقایسه با سیستم استاندارد بیان شده در پیوست داریم:

$$\upsilon_t = S_t - a_{t|t-1}, F_t = P_{t|t-1} + D^2, K_t = BP_{t|t-1}F_t^{-1}, L_t = B - K_t \quad (3)$$

و لذا جواب سیستم مطابق رویکرد فیلتر کالمن برابر رابطه (۴) است.

$$a_{t+1|t} = a + Ba_{t|t-1} + K_t\upsilon_t, P_{t+1|t} = BP_{t|t-1}L_t^{'} + C^2 \quad (4)$$

که در آن

$$a_{t|j} = E(x_t \left| F_j \right.), P_{t|j} = Var(x_t \left| F_j \right.) \quad (5)$$

و همچنین شرایط ابتدایی سیستم عبارت است از:

$$a_{1|0} = a/(1-B), P_{1|0} = C^2/(1-B^2) \quad (6)$$

مورا و همکاران(۲۰۱۶) نشان دادند که فرآیند قابل مشاهده یک فرآیند آرما [۲۱] می باشد که در ادامه این فرآیند به صورت ARMA(2,2) در نظر گرفته می شود. یعنی

$$S_t = \phi_0 + \phi_1 S_{t-1} + \phi_2 S_{t-2} + \xi_t + \theta_1 \xi_{t-1} + \theta_1 \xi_{t-2} \quad , \xi_t \approx N(0, \sigma^2) \quad (7)$$

با توجه به نتیجه اخیر، با در نظر گرفتن فرآیند غیر قابل مشاهده به صورت $\alpha_t = [\alpha_{1t}, \alpha_{2t}, \alpha_{3t}, \alpha_{4t}, \alpha_{5t}]'$ معادلات سیستم را می توان به صورت زیر معادلات رابطه (۸) بازنویسی کرد:

$$Z_t = [1\ 0\ 0\ 0\ 0] \qquad d_t = 0 \qquad H_t = 0$$

$$T_t = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 1 & \theta_1 & \theta_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad c_t = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Q_t = \sigma^2 \quad (8)$$

که شرایط اولیه زیر برای آن در نظر گرفته می شود:

$$a_1 = \left(\frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2}, \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2}, 0, 0, 0\right)', vec(P_1) = (I - T \otimes T)^{-1} vec(RQR') \quad (9)$$

که در آن $T \otimes T$ حاصلضرب تانسوری [۲۲] دو ماتریس می باشد. بعنوان نمونه

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{vec}(A) = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix} \qquad (10)$$

حال نوبت به بیان ساز و کار استراتژی معامله زوجی پژوهش رسیده است.برای بیان استراتژی معامله زوجی، دو مقدار احتمال بالا و احتمال پایین به صورت

$$p_{up}(t,k,c) = P[(S_{t+1} > c) \cup (S_{t+2} > c) \cup \ldots \cup (S_{t+k} > c) \,|F_t] = 1 - F_{S_{t+1}, S_{t+2}, \ldots, S_{t+k}|F_t}(c, c, \ldots, c)$$

$$p_{down}(t,k,c) = P[(S_{t+1} < c) \cup (S_{t+2} < c) \cup \ldots \cup (S_{t+k} < c) \,|F_t] = 1 - F_{-S_{t+1}, -S_{t+2}, \ldots, -S_{t+k}|F_t}(-c, -c, \ldots, -c) \qquad (11)$$

تعریف می شود که در آن

$p_{up}(t,k,c)$ : احتمال این که با شروع از لحظه t تا k دوره زمانی بعد، فرآیند مقداری بالاتر از آستانه c را کسب کند.

$p_{down}(t,k,c)$ : احتمال این که با شروع از لحظه t تا k دوره زمانی بعد، فرآیند مقداری پایین تر از آستانه c- را کسب کند.

برای محاسبه احتمالات بیان شده نیاز به تابع توزیع توام چند متغیره نرمال به طول k، $S_{t,k}$ می باشد که در آن

$$S_{t,k} = \begin{bmatrix} S_{t+1} \\ S_{t+2} \\ \vdots \\ S_{t+k} \end{bmatrix} \Big| F_t = N(\mu_{t,k}, \Sigma_{t,k}) \quad (12)$$

و

$$\mu_{t,k} = E(S_{t,k} \Big| F_t), \Sigma_{t,k} = Var(S_{t,k} \Big| F_t) \quad (13)$$

که $F_t = \sigma(S_1,...,S_t)$ نشان دهنده مجموعه اطلاعات قابل مشاهده تا لحظه t می باشد. با تعریف صورت گرفته فرآیند فاصله $S_{t,k}$ دارای میانگین و ماتریس کواریانس پویا می باشد که با گذشت زمان و تغییر افق K متفاوت می باشد. برای محاسبه احتمالات رشد و ریزش نیاز است تا توزیع آتی قیمت در k روز بعد که نرمال چند متغیره می باشد مشخص شود و برای این منظور دانستن امید و واریانس کافی است. برای این منظور

$$E(S_{t+i} \Big| F_t) = E(Z_{t+i}\alpha_{t+i} + d_{t+i} + \zeta_{t+i} \Big| F_t) \quad (14)$$
$$= Z_{t+i}E(\alpha_{t+i} \Big| F_t) + d_{t+i} + E(\zeta_{t+i} \Big| F_t) = Z_{t+i}a_{t+i|t} + d_{t+i}$$

و با در نظر گرفتن $P_{t+i,t+j|t} = \text{cov}(\alpha_{t+i}, \alpha_{t+j} \Big| F_t)$ داریم

$$Var(S_{t+i} \Big| F_t) == Z_{t+i}p_{t+i,t+j|t}Z'_{t+j} \quad (15)$$

با توجه به روابط بیان شده، برای محاسبه $a_{t+i|t}$ و $P_{t+i,t+j|t} = \text{cov}(\alpha_{t+i}\ \alpha_{t+j} \Big| F_t$ به مجموعه اطلاعات $\{S_1, S_2, .., S_t, S_{t+1}, ..., S_{t+k}\}$ نیاز می باشد و این در حالی است که مجموعه اطلاعات در دسترس برابر $\{S_1, S_2, .., S_t\}$ می باشد. برای رفع این مشکل ابتدا سیستم حالت-فضا را به صورت زیر گسترش می دهیم:

$$Y_t = [Z_t \ 0....0]\begin{bmatrix} \alpha_t \\ \alpha_{t-1} \\ \vdots \\ \alpha_{t-k} \end{bmatrix} + d_t + \varepsilon_t \qquad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{t+1} \\ \alpha_t \\ \vdots \\ \alpha_{t-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_k & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_t \\ \alpha_{t-1} \\ \vdots \\ \alpha_{t-k} \end{bmatrix} + d_t + \varepsilon_t$$

و در رابطه با این سیستم از الگوریتم پیش بینی k-قدمی کالمن استفاده می شود. بدین صورت مقادیر $a_{t+i|t}$ و $P_{t+i,t+j|t} = \mathrm{cov}(\alpha_{t+i}, \alpha_{t+j} \,|F_t)$ محاسبه می شوند.

محاسبه توزیع آتی فرآیند فاصله، امکان ساخت یک استراتژی معامله زوجی را فراهم می کند. برای این کار می توان دو احتمال به نام احتمال بالا و پایین را تعریف کرد. احتمال بالا احتمال قرار گرفتن فاصله در بالاتر از یک حد آستانه در گام های آتی را محاسبه می کند و احتمال پایین، احتمال قرار گرفتن فاصله در پایین تر از یک حد آستانه در گام های آتی را محاسبه می کند. در صورتی که مقدار فاصله فعلی برابر صفر یا کمتر از آن و احتمال بالا به اندازه کافی بزرگ باشد(مثلا بالای ۰,۹۰) می توان معامله زوجی را آغاز کرد. این بدان مفهوم است که فاصله در آینده بزرگ خواهد شد. بنابراین سهام با قیمت کمتر خریداری و سهام با قیمت بالاتر فروش استقراض می شود. در صورتی که بعد از ورود به معامله زوجی، مقدار فاصله در یک زمان به صفر برسد و مقدار احتمال پایین در آن زمان به اندازه کافی بزرگ باشد(مثلا بالای ۰,۹۰) می توان معامله زوجی را بست یعنی سهامی که قبلا خریداری شده بود، فروخته و سهامی که فروخته شده بود، خریداری می شود.

به صورت خلاصه بر اساس فاصله هجمعی در k-قدم آتی، یک استراتژی زوجی بر مبنای احتمال قرار گرفتن k فاصله آتی در بالاتر و پایین تر از دو سطح آستانه تعریف شد. بنابراین نیاز به داشتن تابع توزیع توام فاصله برای k قدم آتی می باشد که با فرض توزیع نرمال چند متغیره، این مساله به محاسبه بردار امید و ماتریس کواریانس توزیع برای k قدم آتی تقلیل می یابد. با فرض پویایی امید و کواریانس توزیع برای هر دوره k قدمی، معادلات حالت فضا و فیلتر کالمن بعنوان ابزاری برای محاسبه این دو پارامتر مورد استفاده قرار گرفتند.

سیستم معامله زوجی پس از برآورد پارامترها بر روی داده های تست مورد ارزیابی سودآوری قرار می گیرد. بازده و مدت زمان موقعیت های معاملاتی که بر اساس این استراتژی باز و بسته می شوند، رکورد می شود و متوسط بازده روزانه، ریسک بازده روزانه و سپس نسبت شارپ آنها محاسبه می شود و با عملکرد مدل همجمعی و بازار مقایسه می شود.

## ۴- تجزیه و تحلیل داده ها

لیست ۲۱ سهم مورد استفاده در پژوهش به همراه شماره آنها (که در ادامه به جای نام شاخص از شماره آن استفاده می شود) در جدول (۱) ارایه شده است. این سهام از صنایع فرآورده های نفتی و صنعت فلزات اساسی(که انتظار می رود با توجه به وابستگی های قیمت نفت و فلزات اساسی هم را دنبال کنند) استخراج شده اند و تمام سهام زیر مجموعه این دو صنعت می باشند که در بازه ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۴ دارای حداقل ۱۰۰۰روز کاری (برای براورد مناسب پارامترها) بوده اند. در ادامه داده های پژوهش به دو دسته داده درون نمونه ای شامل ۵۰۰ داده روزانه اول و داده های تست شامل بقیه داده ها(که تعداد آنها هم حداقل ۵۰۰ داده می باشد) تقسیم شدند.

**جدول(۱):سهام مورد پژوهش تحقیق**

| شماره سهم | نام سهم |
|---|---|
| 1 | پالایش نفت تبریز |
| 2 | ذوب آهن اصفهان |
| 3 | سر. توسعه معادن و صنایع معدنی خاورمیانه |
| 4 | سر. توکا فولاد |
| 5 | سر. نفت |
| 6 | صنعت روی زنگان |
| 7 | فرآوری مواد معدنی |
| 8 | فروسیلیس ایران |
| 9 | فولاد آلیاژی ایران |
| 10 | فولاد آلیاژی یزد |
| 11 | فولاد خوزستان |
| 12 | فولاد مبارکه اصفهان |
| 13 | فولادخراسان |
| 14 | کالسیمین |
| 15 | لوله و ماشین سازی |
| 16 | مس باهنر |
| 17 | ملی سرب و روی |
| 18 | ملی صنایع مس ایران |
| 19 | نفت بهران |
| 20 | نفت پارس |
| 21 | نورد آلومینیوم |

منبع:یافته های تحقیق

آزمون مورد استفاده در جهت تعیین خاصیت همجمعی زوج های سهام، آزمون انگل-گرانچر می باشد که یک آزمون دو مرحله ای می باشد و در فرایند اجرا از آزمون ریشه واحد برای بررسی مانایی باقی مانده های رگرسیونی استفاده می کند.۱۲۰ زوج ممکن (بر اساس ۲۱ سهم)، بوسیله آزمون انگل و گرانچر بر روی داده های درون نمونه ای شامل ۵۰۰داده اول ، مورد آزمون هم جمعی قرار گرفتند که ده زوج موجود در جدول(۲) ، وجود خاصیت هم جمعی را در سطح اطمینان ۰,۹۵ تایید کردند. بعنوان نمونه زوج اول یعنی سهم شماره ۲ و ۱۳ یعنی ذوب آهن اصفهان و فولاد خراسان در سطح اطمینان ۰/۹۵ دارای خاصیت همجمعی هستند.

**جدول (۲):زوج های با خاصیت هم جمعی**

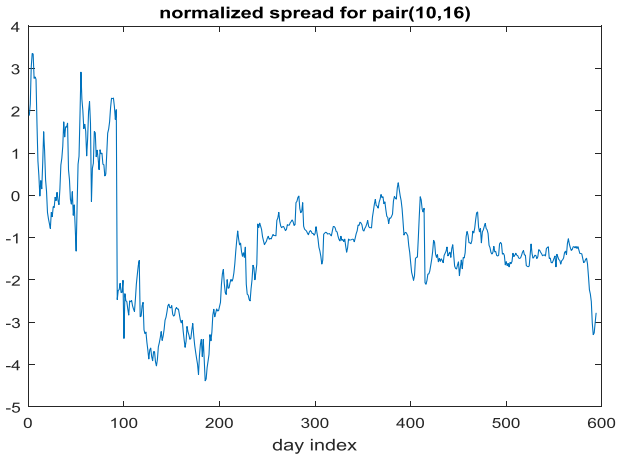
| شماره زوج | شاخص اول زوج | شاخص دوم زوج | مقدار احتمال آزمون انگل گرانچر |
|---|---|---|---|
| ۱ | 2 | 13 | 0.00230042 |
| ۲ | 6 | 8 | 0.042695 |
| ۳ | 6 | 15 | 0.02791256 |
| ۴ | 6 | 17 | 0.04623235 |
| ۵ | 8 | 9 | 0.02149316 |
| ۶ | 8 | 10 | 0.02335114 |
| ۷ | 8 | 11 | 0.001 |
| ۸ | 8 | 12 | 0.04481581 |
| ۹ | 10 | 16 | 0.0334277 |
| ۱۰ | 14 | 17 | 0.04581952 |

منبع:یافته های تحقیق

در ادامه سیستم معامله زوجی بر روی زوج سهام یافت شده در جدول (۲) اعمال خواهد شد.

### ۴-۱- نتایج روش هم جمعی

بر اساس روش همجمعی که در بخش سوم مورد بررسی قرار گرفت، به محاسبه تابع فاصله نرمال شده که در واقع میزان انحراف از تعادل دو سری می باشد ، پرداخته شد که بعنوان نمونه برای زوج ۱۰و ۱۶ این سری به صورت نمودار(۳) می باشد که در آن وجود تعادل مشهود می باشد:




**نمودار(۳):سری فاصله نرمال شده برای زوج ۱۰و ۱۶**

منبع:یافته های تحقیق

در ادامه به کمک دو حد آستانه ۲و ۲- موقعیت های معاملاتی بر روی حداقل ۵۰۰ داده تست باقی مانده (بغیر از داده های آموزشی) بررسی شدند که حاصل آن ۳۰ موقعیت معاملاتی می باشد که بازده ، مدت زمان و معادل بازده روزانه این خرید و فروش ها در جدول (۴) ارایه شده است. در واقع برای هر زوج موقعیت های معاملاتی به صورت جداگانه محاسبه گردید و ردیف اول جدول(۴)، شماره زوج مورد معامله می باشد.

**جدول (۴): نتایج روش هم جمعی**

| زوج مورد معامله | بازده | مدت | معادل بازده روزانه |
|---|---|---|---|
| (6,15) | 0.09269937 | 24 | 0.00370063 |
| (6,17) | 0.25404299 | 53 | 0.00428032 |
| (8,12) | 0.34936774 | 29 | 0.01038584 |
| (14,17) | -0.0278006 | 51 | -0.0005527 |
| (14,17) | 0.40482245 | 21 | 0.01631794 |
| (14,17) | 0.42952014 | 228 | 0.0015685 |
| (6,15) | 0.88717949 | 209 | 0.0030433 |
| (8,12) | 0.12446102 | 95 | 0.00123554 |
| (10,16) | 1.18431074 | 69 | 0.01138754 |
| (10,16) | 0.06237948 | 3 | 0.02037519 |
| (10,16) | -0.3635775 | 373 | -0.0012108 |

منبع:یافته های تحقیق

نکته قابل توجه در جدول فوق این است که جز دو موقعیت، تمام موقعیت ها با بازده مثبت مواجه هستند. بر اساس نتایج حاصل شده متوسط ، بازده روزانه و انحراف معیار بازده روزانه (بعنوان شاخص ریسک) محاسبه گردید. نسبت شارپ نیز از طریق تقسیم متوسط بازده روزانه بر نیم انحراف معیار بازده روزانه محاسبه گردید که نتایج در جدول (۵) ارایه شده است.

**جدول(۵):عملکرد مدل همجمعی**

| شاخص عملکرد | مقدار |
|---|---|
| متوسط بازده برای هر معامله | 0.30885502 |
| متوسط مدت زمان معامله | 105 |
| متوسط بازده روزانه | 0.00641194 |
| ریسک=انحراف معیار استاندارد | 0.00683413 |
| نسبت شارپ | 0.93822383 |

منبع:یافته های تحقیق

همانطور که مشاهده می شود در این روش متوسط بازده روزانه ای که می توان کسب کرد برابر ۰,۰۰۶۴ می باشد که برای کسب آن باید متحمل ریسکی برابر ۰/۰۰۶۸ شد. نسبت شارپ روزانه این سیستم معامله نیز برابر ۰/۹۴می باشد.

### ۴-۲- نتایج روش معامله زوجی با رویکرد سیستم حالت فضا و فیلتر کالمن

این روش بر روی تمام زوج های دارای خاصیت همجمعی که در جدول (۴) موجود می باشند، اجرا می شود. جزییات این روش در فصل سوم و در تبیین مدل تشریح گردید. مقدارC که آستانه معامله می باشد برابر صفر در نظر گرفته شده است که مقدار میانگین مورد انتظار سری برگشت به میانگین می باشد. همچنین مقدار حداقل احتمالات بالا و پایین در جهت ایجاد موقعیت معاملاتی برابر ۰,۹۰ در نظر گرفته شد. همچنین افق زمانی محاسبه احتمالات بالا و پایین برابر ۲۵ روز در نظر گرفته شده است. بوسیله الگوریتم بهینه سازی ژنتیک بر روی ۵۰۰داده روزانه اول مورد بیشینه سازی قرار گرفت که لیست پارامترهای مدل برای ۱۰ زوج دارای خاصیت همجمعی به صورت جدول (۶) می باشد.

در این سیستم معاملاتی، در صورتی که مقدار فاصله فعلی منفی اکید و احتمال بالا برابر ۰/۹باشد ، معامله زوجی آغاز می شود. این بدان مفهوم است که فاصله در آینده بزرگ خواهد شد و بنابراین سهم اول زوج خریداری می شود. در صورتی که بعد از ورود به معامله زوجی، مقدار فاصله در یک زمان به صفر برسد و مقدار احتمال پایین در آن زمان به بالای ۰/۹ برسد ، معامله زوجی بسته می شود. یعنی سهامی که قبلا خریداری شده بود، فروخته می شود. بر این اساس۱۲ موقعیت معاملاتی بر روی حداقل ۵۰۰داده تست(بغیر از ۵۰۰داده

اول آموزشی) باز و بسته گردید که بازده ، مدت زمان و معادل بازده روزانه این خرید و فروش ها در جدول (۷) ارایه شده است.

**جدول (۶):براورد پارامترهای سیستم حالت فضا**

| شماره زوج | $\phi_0$ | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | 0.62944737 | -0.6847738 | 0.3114814 | 0.41209218 | -0.1225113 |
| ۲ | 0.81158387 | 0.94118556 | -0.9285766 | -0.9363343 | -0.2368831 |
| ۳ | -0.7460264 | 0.9143339 | 0.69825861 | -0.446154 | 0.53103358 |
| ۴ | 0.82675171 | -0.0292487 | 0.8679865 | -0.9076572 | 0.5903998 |
| ۵ | 0.26471849 | 0.60056094 | 0.35747031 | -0.8057364 | -0.6262548 |
| ۶ | -0.8049192 | -0.7162273 | 0.51548026 | 0.64691566 | -0.0204712 |
| ۷ | -0.4430036 | -0.1564774 | 0.48626494 | 0.38965725 | -0.1088276 |
| ۸ | 0.09376304 | 0.83147105 | -0.215546 | -0.365801 | 0.29262602 |
| ۹ | 0.91501367 | 0.58441466 | 0.31095578 | 0.9004441 | 0.41872966 |
| ۱۰ | 0.92977707 | 0.91898485 | -0.6576266 | -0.9311078 | 0.50937336 |

منبع:یافته های تحقیق

**جدول(۷):عملکرد مدل پژوهش**

| زوج مورد معامله | بازده | مدت | معادل بازده روزانه |
|---|---|---|---|
| (6,15) | 0.08893021 | 49 | 0.0017402 |
| (6,17) | 0.21185131 | 48 | 0.00401113 |
| (10,16) | 0.08692859 | 12 | 0.00697051 |
| (10,16) | 0.07597303 | 5 | 0.01475284 |
| (10,16) | 0.06410155 | 8 | 0.00779659 |
| (10,16) | 0.07879411 | 13 | 0.00585119 |
| (10,16) | 0.18320424 | 25 | 0.00675174 |
| (14,17) | 0.23834282 | 84 | 0.00254817 |
| (2,13) | 0.16049672 | 35 | 0.00426186 |
| (6,15) | 0.28563206 | 219 | 0.00114792 |
| (8,12) | 0.23970232 | 297 | 0.00072373 |
| (10,16) | 0.17224832 | 277 | 0.0005739 |

منبع:یافته های تحقیق

بر اساس نتایج حاصل شده، متوسط بازده روزانه و نیم انحراف معیار بازده روزانه(بعنوان شاخص ریسک) محاسبه گردید. نسبت شارپ نیز از طریق تقسیم متوسط بازده روزانه بر نیم انحراف معیار بازده روزانه محاسبه گردید که نتایج در جدول (۸) ارایه شده است.

**جدول(۸):عملکرد مدل پژوهش**

| شاخص عملکرد | مقدار |
|---|---|
| میانگین بازده یک موقعیت معاملاتی | 0.15718377 |
| میانگین مدت یک معامله | 0.93335214 |
| میانگین بازده روزانه | 0.00476082 |
| انحراف معیار | 0.00388163 |
| نسبت شارپ | 1.22650041 |

منبع:یافته های تحقیق

همانطور که مشاهده می شود در این روش متوسط بازده روزانه ای که می توان کسب کرد برابر ۰/۰۰۴۷ می باشد که برای کسب آن باید متحمل ریسکی برابر ۰/۰۰۳۸ شد. نسبت شارپ این روش نیز برابر ۱/۲۳ می باشد و .نشان می دهد که به ازای یک واحد ریسک بیشتر می توان اضافه بازده ای برابر ۱/۲۳کسب کرد.

## ۴-۳- عملکرد بازار

در پایان عملکرد بازار (که در اینجا منظور عملکرد شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران می باشد) بر روی داده های هم تاریخ با داده های برون نمونه ای محاسبه گردید که نتیجه آن در جدول زیر ارایه شده است.

**جدول (۹):عملکرد بازار**

| | |
|---|---|
| متوسط بازده روزانه | 0.00084 |
| نیم انحراف معیار | 0.00746 |
| نسبت شارپ | 0.11266 |

منبع:یافته های تحقیق

همانطور که مشاهده می شود در این روش متوسط بازده روزانه ای که می توان کسب کرد برابر ۰/۰۰۰۸۴ می باشد که برای کسب آن باید متحمل ریسکی برابر ۰/۰۰۷۴۶ شد. نسبت شارپ این روش نیز برابر ۰/۱۱۲۶۶می‌باشد ونشان می‌دهد که به ازای یک واحد ریسک بیشتر می‌توان اضافه بازده‌ای برابر ۰/۱۱۲۶۶کسب کرد.

## ۵- نتیجه گیری و بحث در نتایج

با توجه به نتایج حاصل شده از بخش قبل، ترتیب عملکرد روش ها در معیار متوسط بازده روزانه به صورت مدل معامله زوجی با رویکرد همجمعی، معامله زوجی بر اساس سیستم حالت فضا و فیلتر کالمن و بازار می باشد. لذا برای معامله گران ریسک طلب، سیستم معامله زوجی مبتنی بر همجمعی به علت بازده روزانه بالاتر پیشنهاد می شود .ترتیب عملکرد روش ها در معیار نسبت شارپ روزانه به صورت معامله زوجی بر اساس سیستم حالت فضا و فیلتر کالمن، مدل معامله زوجی با رویکرد همجمعی و بازار می باشد و بنابراین برای معامله گران ریسک گریز، سیستم معامله زوجی مبتنی بر حالت فضا به علت نسبت شارپ روزانه بالاتر پیشنهاد می شود. در نهایت یافته های تحقیق حاکی از غلبه رویکرد معامله زوجی بر بازار می باشد و لذا استفاده از این رویکرد اکیدا به سرمایه گذاران توصیه می شود.

طادی و همکاران(۱۳۹۷) ،فلاح پور و حکیمیان(۱۳۹۶) در پژوهشی، بازدهی چشمگیر معامله زوجی به روش همجمعی نسبت به بازدهی معمولی سهام در مدت مشابه را گزارش دادند . پژوهش حاضر نیز نتایج دو پژوهش اخیر صورت گرفته در بورس اوراق بهادار تهران مبنی بر بازده فوق العاده سیستم معامله زوجی را تایید می کند. پژوهش اخیر نتیجه مورا و همکاران مبنی بر عملکرد بهتر سیستم معامله زوجی مبتنی بر مدل حالت فضا را نسبت به عملکرد بازار را تایید می کند.

### پیوست

در این بخش به ارایه جواب یک سیستم حالت فضای خطی بر اساس الگوریتم فیلتر کالمن پرداخته می شود. این سیستم خطی که در متن پژوهش کاربرد دارد، به صورت زیر می باشد:

$$Y_t = Z_t\alpha_t + d_t + \xi_t \qquad \xi_t = NID(0, H_t)$$
$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + c_t + R_t\eta_t \quad \eta_t = NID(0, Q_t)$$
$$\alpha_1 = N(a_1, P_1)$$

که در آن $Y_t$ نشان دهنده متغیر قابل مشاهده و $\alpha_t$ متغیر غیر قابل مشاهده می باشد. در این دستگاه جز خطا در دو معادله از یکدیگر مستقل بوده و هر دو دارای توزیع نرمال می باشند. با معرفی $F_j = \sigma(Y_1, ..., Y_j)$ بعنوان مجموعه اطلاعات در دسترس از متغیر قابل مشاهده در زمان t، رویکرد فیلتر کالمان برای حل دستگاه، جواب زیر را ارایه می کند:

$$a_{t+1|t} = T_t a_{t|t-1} + c_t + K_t\upsilon_t, P_{t+1|t} = T_t P_{t|t-1}L_t^{'} + R_t Q_t R_t^{'}$$

که در آن $a_{t|j} = E(\alpha_t \left| F_j \right.), P_{t|j} = Var(\alpha_t \left| F_j \right.)$ و

$$\upsilon_t = Y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t, F_t = Z_t P_{t|t-1}Z_t^{'} + H_t, K_t = T_t P_{t|t-1}Z_t^{'}F_t^{-1}, L_t = T_t - K_t Z_t$$

و در حالتی که پارامترهایسیستم خطی یعنی بردار $\psi$ ناشناخته باشد از تابع حداکثر درستنمایی[۱۸] زیر برای محاسبه پارامترهای سیستم استفاده می شود:

$$Log\ L(\psi) = -\frac{np}{2}\log - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(\log(|F_t| + \upsilon_t' F_t^{-1}\upsilon_t))$$

$$\bar{\psi} = \arg\max_{\psi\in\Theta} \log L(\psi)$$

که در آن $n$ طول سری می باشد.

## فهرست منابع


* طادی، مسعود؛ آبکار، مجید؛ مطهری نیا، وحید. (۱۳۹۷). ارزیابی استراتژی معاملات زوجی با رویکرد فاصله‌ای در بورس اوراق بهادار تهران .*دانش سرمایه‌گذاری*.112-99 ,(26)7 ,
* فلاح پور، سعید؛ حکیمیان، حسن. (۱۳۹۶). بررسی عملکرد سیستم معاملات زوجی در بورس اوراق بهادار تهران: رویکرد هم انباشتگی و بررسی نسبت سورتینو .*مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*.17-1 ,(30)8 ,
* Bogomolov, T., (2011). Pairs trading in the land down under. In: Finance and Corporate Governance Conference.
* Bogomolov, T., (2013). Pairs trading based on statistical variability of the spread process. Quantita-tive Finance 13 (9), 1411-1430.
* Caldeira, J., Moura, G. V., (2013). Selection of a portfolio of pairs based on cointegration: A statis-tical arbitrage strategy. Available at SSRN 2196391.
* Clegg.M ., Krauss .C(2018) Pairs trading with partial cointegration, Quantitative Finance, 18:1, 121-138, DOI: 10.1080/14697688.2017.1370122
* Do, B., Fa, R., 2010. Does simple pairs trading still work? Financial Analysts Journal 66 (4),83-95.
* Do, B., Fa, R., (2012). Are pairs trading pro_ts robust to trading costs? Journal of FinancialResearch 35 (2), 261-287.
* Gatev, E., Goetzmann, W. N., Rouwenhorst, K. G., (2006). Pairs trading: Performance of a relative-value arbitrage rule. Review of Financial Studies 19 (3), 797-827.
* Jacobs, H., Weber, M., (2015). On the determinants of pairs trading pro_tability. Journal of Financial Markets 23, 75-97.
* Moura. C, Pizzinga .Z & Jorge Zubelli (2016) A pairs trading strategy based on linear state space models and the Kalman filter, Quantitative Finance, 16:10, 1559-1573, DOI: 10.1080/14697688.2016.1164886
* Stübinger.J, Bredthauer.J(2017), Statistical Arbitrage Pairs Trading with High-frequency Data. International Journal of Economics and Financial. 7(4), 650-662.
* Wu, Y., (2013). Pairs trading: A copula approach. Journal of Derivatives & Hedge Funds 19 (1), 12- 30.
* Xie, W., Liew, R. Q., Wu, Y., & Zou, X. (2014). Pairs trading with copulas. Available at SSRN, 2383185.
* Zeng, Z., Lee, C. G., (2014). Pairs trading: optimal thresholds and pro_tability. Quantitative Finance14 (11), 1881-1893.

## یادداشت‌ها

[1] Pair trading
[2] State space model
[3] Algorithmic Trading
[4] Bogomolov
[5] Statistical arbitrage
[6] Moura
[7] Clegg and Krauss
[8] Clegg and Krauss
[9] Stübinger.J, Bredthauer
[10] Moura
[11] Jacobs nad Weber
[12] Bogomolov
[13] Zeng
[14] Xie
[15] Calderia and mura
[16] Wu
[17] Do and Faff
[18] Gatev
[19] Moura
[20] Maximun Likehood