



فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری
سال نهم / شماره سی‌وسوم / بهار ۱۳۹۹

قیمت‌گذاری اختیار معاملات توانی بر مبنای مدل هستون (شواهدی از بورس اوراق بهادار تهران)

حسین صاحبی فرد

دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی مالی، سمنان، شاهرود، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی
gmail.com\hsf.13722@

الهام دسترنج

استادیار، سمنان، شاهرود، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی (نویسنده مسئول)
dastranj.e@gmail.com

عبدالمجید عبدالباقی عطاآبادی

استادیار، سمنان، شاهرود، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مهندسی صنایع و مدیریت
abdolbaghi@shahroodut.ac.ir

سید رضا حجازی

استادیار، سمنان، شاهرود، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی
r_hejazi@shahroodut.ac.ir

احمد معتمدنژاد

دانشیار، سمنان، شاهرود، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی
a.motamedne@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۷/۰۵ تاریخ پذیرش: ۹۷/۱۰/۰۳

چکیده

هدف از این پژوهش قیمت‌گذاری اختیار معاملات توانی تحت مدل هستون بر مبنای اطلاعات روزانه شاخص بورس اوراق بهادار تهران است. بر این اساس با بررسی دوره‌های زمانی مختلف بازار اوراق بهادار تهران، دوره‌ای در بازه زمانی آذرماه سال ۱۳۸۷ تا تیرماه ۱۳۹۷ که شاخص بورس از تبعیت بیشتری نسبت به مدل هستون برخوردار است انتخاب گردید. در این مقاله، قیمت‌گذاری در دو بخش با بازه‌های زمانی متفاوت انجام و برای حل مدل اصلی از روش تبدیل فوریه سریع استفاده شده است. نتایج قیمت‌گذاری فرضی نشان می‌دهد که قیمت‌گذاری اختیار معاملات مدل توانی نمی‌تواند از مدل هستون تبعیت داشته باشد و باعث ایجاد شرایط آربیتراژ در بازار بورس خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: مدل هستون، روش تبدیل فوریه سریع، اختیار معاملات مدل توانی.

۱- مقدمه

روند حرکتی بازارهای مالی در سال‌های اخیر نشان‌دهنده پویایی‌های غیرخطی است که سبب شکل‌گیری مطالعات متعددی در حوزه سری‌های زمانی بازارهای مالی، حرکت‌های براونی و روابط بلندمدت مالی شده است. وجود روابط بلندمدت بین عناصر بازار و خودهمبستگی‌هایی با فواصل زمانی بلندمدت در بین متغیرهای مالی سبب استفاده از اطلاعات گذشته در پیش‌بینی روند آتی قیمت‌ها شده است (رحمانی و جعفریان، ۱۳۹۶). وجود چنین رفتارهای پویا در زمینه سری‌های زمانی مالی، سبب اهمیت پیش‌بینی روندهای آتی و توسعه ابزارهای مالی جدیدی در راستای مدیریت ریسک شده که توسعه مشتقات مالی از جمله قراردادهای آتی و اختیار معاملات از آن جمله است.

اختیار معاملات در دو دسته اختیار خرید و فروش طبقه بندی می‌شوند. اختیار خرید این حق را به دارنده می‌دهد که یک دارایی را با قیمت مشخص در زمان مشخص خریداری کند (نبوی‌چاشمی، عبدالمی، ۱۳۹۷). در این میان نحوه قیمت‌گذاری اختیار معاملات، یکی از چالشی‌ترین مباحث حوزه مهندسی مالی و مدیریت ریسک به حساب می‌آید. یکی از مشهورترین مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله، مدل درخت دوجمله‌ای است، که در هر گام، نوسانات مربوط به قیمت سهم را در یک فرایند دوتایی رسم می‌نماید و قیمت سهم را در پایان هر گام محاسبه می‌کند. این محاسبات بر اساس احتمال حرکت سهم به سمت بالا و یا به سمت پایین و با توجه به ضریب افزایش و کاهش قیمت سهم توسط روابط خاصی، انجام می‌پذیرند (کیمیگری و آفریده‌ثانی، ۱۳۸۷).

در سال ۱۹۷۳ فیشر بلک^۱ و مایرون شولز^۲ برای حل مسأله‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی، راهبرد نوینی را پیشنهاد کردند که مبتنی بر تشکیل سبدی خودتامین^۳ در یک فضای بدون آربیتراژ^۴ بود. آنها نشان دادند که اگر فردی در یک بازار کامل به جای خرید یک اختیار، با پولی یکسان، سهام و ورقه قرضه بخرد می‌تواند در سررسید، سودی مشابه با اعمال این اختیار را کسب کند. برای انجام این کار آنها قیمت سهام را با کمک یک فرایند وینر هندسی^۵ مدل‌سازی کردند و با پوشش کامل سبد و حذف عوامل نوسان‌پذیر توانستند که رابطه معروف به فرمول بلک - شولز^۶ را استخراج کنند. این مدل توانست بازار قیمت‌گذاری مشتقات را با استفاده از دارایی پایه رونق ببخشد، اما با سقوط بازارهای سهام در اکتبر ۱۹۷۸، مدل بلک - شولز کارایی خود را از دست داد و تنها به عنوان پایه‌ای برای سایر مدل‌ها مورد استفاده قرار گرفت، چراکه در این مدل نوسان با استفاده از سوابق تاریخی تغییرات قیمت دارایی پایه برآورد می‌گردد در حالی که هدف ما اندازه‌گیری نوسانات آینده است یکی از راهکارهای از بین بردن این نقص آن است که نوسان، یک فرآیند تصادفی در نظر گرفته شود. در واقع مدل‌های نوسان تصادفی یکی از رویکردهای انجام شده جهت اصلاح قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ها هستند که تا حد قابل قبولی توانسته اند چولگی^۷ و کشیدگی را در رویه‌های نوسان ضمنی به نمایش بگذارند (نیسی، ۱۳۹۵).

در کنار اختیارمعاملات مرسوم، اختیار معاملات جدیدی ارائه شده است، که بعنوان اختیار معاملات غیر استاندارد شناخته می‌شوند. اختیار معاملات غیراستاندارد، مانند اختیارمعاملات توام با مانع و اختیار معاملات توانی، در واقع تغییر شکل یافته اختیار خرید و فروش استاندارد است. به‌عنوان مثال اختیارمعاملات مانع قراردادی است که بازده آن بستگی به رسیدن قیمت دارایی پایه به سطح معینی دارد. اختیار معاملات

غیراستاندارد، قراردادهای جدید مالی به شمار نمی‌روند، بلکه همان اختیار معاملات اروپایی و امریکایی هستند که در قیمت‌گذاری آنها شروط جدیدی اعمال می‌شود. (نوبی چاشمی و قاسمی چالی، ۱۳۹۵).

اختیار معامله‌ی مدل توانی، یکی از انواع غیراستاندارد اختیار است که بازدهی آن وابسته به قیمت دارایی پایه با توانی از $m > 0$ است. در این نوع اختیار معامله، سقف سود از پیش تعیین می‌لما می‌کند. به عبارتی دیگر، سقف سود به طور خودکار زمانی که قیمت دارایی پایه به حد مشخصی برسد، اعمال می‌شود. اختیار معاملات مدل توانی به دلیل قدرت نفوذ قابل توجهی که نسبت به اختیار معامله‌ی معمولی دارند، توجه خریداران اختیار معامله و سرمایه‌گذاران را جلب نموده‌اند.

این نوع اختیار، در بازار، به دلیل داشتن بازدهی بهتر مخصوصاً در بازار تبادلات ارز خارجی و ...، توانمندتر از اختیار معامله‌های معمولی عمل می‌کند (کیم و همکاران، ۲۰۱۲). به عنوان مثال، بانکداران در آلمان اختیار معامله‌ی مدل توانی سقف FX روی دلار آمریکا، بین ژاپن و فرانک فرانسه با توانی از مرتبه‌ی ۲ منتشر می‌کنند. همچنین در توکیو اختیار معاملات چند جمله‌ای روی شاخص نیکی مبادله می‌شود. علاوه بر این، اختیار معامله‌ی مدل توانی از جمله ابزارهایی است که به منظور مدیریت ریسک در بانک‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد (لطیفی، ۱۳۹۵).

قیمت اختیار معامله‌ی توانی با افزایش قیمت دارایی به صورت توانی افزایش می‌یابد و تغییر کوچکی در قیمت دارایی پایه می‌تواند قیمت اختیار را به شکل قابل توجهی تغییر دهد. خریدار این اختیار نیز قیمت بیشتری نسبت به اختیار معامله‌های استاندارد باید پرداخت کند (ابراهیم و همکاران، ۲۰۱۶).

هدف این مقاله، قیمت‌گذاری اختیار معاملات توانی تحت مدل با روش تبدیل فوریه‌ی سریع^۱ و با استفاده از اطلاعات روزانه بازار بورس اوراق بهادار ایران است. ضمناً این مقاله صرفاً جهت معرفی مدل و اختیار نگارش شده و به سبب وجود نداشتن این نوع اختیار در بازار واقعی، معیاری برای مقایسه دقیق با شرایط واقعی وجود نداشته و نتایج، حاصل از شرایط فرضی هستند.

در بخش اول، پس از بررسی پیشینه‌ی پژوهش، مبانی نظری مدل هستون معرفی می‌شود. در بخش بعد، با معرفی اختیار معامله توانی، روش قیمت‌گذاری این نوع اختیار مشخص شده است. سپس به بررسی تبدیل فوریه سریع برای این نوع اختیار و پیدا کردن تابع مشخصه پرداخته شده است. در نهایت با استفاده از اطلاعات روزانه شاخص بورس تهران، قیمت‌گذاری این نوع اختیار روی شاخص کل بازار بورس انجام گرفته است.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

یکی از مهم‌ترین مدل‌های قیمت‌گذاری مشتقات مالی، مدل بلک-شولز است که بی‌تردید پایه و اساس شکل‌گیری بسیاری از مدل‌های مالی در حال حاضر است. فرض اساسی در مدل بلک-شولز این است که توزیع احتمال قیمت آتی دارایی‌های پایه (سهام)، لگ‌نرمال است. اما در بازارهای مالی واقعی فرایند قیمت‌گذاری در مقایسه با توزیع لگ‌نرمال، دارای دم سنگین‌تری^۱ است. بدین ترتیب، با توزیع‌های مختلفی از قیمت‌های اختیار خرید یا فروش مواجه خواهیم شد که تفاوت آنها در دم توزیع است. از طرف دیگر، در مدل بلک - شولز نوسان

قیمت سهام، ثابت در نظر گرفته شده است، در صورتی که نتایج تجربی غیر مسطح بودن نوسان قیمت دارایی‌های پایه را نشان می‌دهد. ایده‌ی نوسان تصادفی، به خصوص پس از رکود اقتصادی سال 1978 مورد توجه قرار گرفت و تا قبل از آن زمان مدل بلک - شولز، بهترین و کارآمدترین مدل برای قیمت‌گذاری حرکت سهام به شمار می‌آمد. هال و وایت^{۱۱}، اسکات^{۱۲}، استین^{۱۳} و هستون^{۱۴}، مدل‌هایی از نوسان تصادفی را برای قیمت‌گذاری دارایی‌های پایه ارائه کردند (مهردوست و صابر، ۱۳۹۳).

مدل هستون یک نوع مدل نوسان تصادفی است که هستون در سال ۱۹۹۳ به منظور تجزیه‌تحلیل قراردادهای اختیار ارزی بدان پرداخت. هدف اصلی هستون غلبه بر برخی کاستی‌های موجود در مدل مشهور قیمت‌گذاری اختیار بلک-شولز بود. به طور مثال مدل بلک-شولز دارای این پیش فرض قوی است که بازگشت‌های سهام به صورت یک توزیع نرمال با میانگین و واریانس مشخص، توزیع شده‌اند. به عبارت دیگر این مدل تمایل حرکت قیمت سهام به یک مقدار خاص را مورد توجه قرار نمی‌دهد. علاوه بر این، در مدل بلک-شولز نوسانات ثابت فرض شده‌اند. در مقابل مدل بلک-شولز، مدل هستون این اجازه را می‌دهد تا نوسانات بطور تصادفی تغییر کنند که این موضوع باعث می‌شود تا مدل هستون بطور بالقوه برای شرایط گسترده‌تری قابل استفاده باشد (رن، ۲۰۱۴). از جمله دلایل محبوبیت این مدل می‌توان به امکان بدست آوردن فرمول‌های قیمت قرارداد اختیار برای قراردادهای اختیار اروپایی با استفاده از تبدیل فوریه در سال ۱۹۹۹ اشاره کرد. همچنین در سال ۲۰۰۴ و ۲۰۰۷ از روش‌های تقسیم عملگر برای قیمت‌گذاری قراردادهای آمریکایی در مدل هستون استفاده شد. از سوی دیگر به منظور قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار از روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو^{۱۴} در مدل هستون استفاده شده است. کایا و برادی یک طرح شبیه‌سازی بدون پیش فرض را طراحی کردند که نشانگر این واقعیت است که توزیع (شرطی) فرایند نوسانات تصادفی، شناخته شده است. اگرچه لرد و همکارانش در سال ۲۰۰۹ طی مقاله‌ای زمانبر بودن روش آنها را نشان دادند و به ارائه روشی ساده‌تر پرداختند (ولکوپ و نیوونپویس، ۲۰۰۹). از سوی دیگر شایان ذکر است که این مدل توانایی این که با یک مدل با نرخ بهره تصادفی ترکیب شود را دارد. لذا یک مدل هستون با نرخ بهره تصادفی نیز در سال ۲۰۱۱ مورد بررسی واقع شده است (گرزلک، ۲۰۱۱). همچنین یک روش کاهش واریانس نیز برای قراردادهای آسیایی در سال ۲۰۱۴ ارائه شده است (دینگک و اوسترلی، ۲۰۱۴).

در سال ۲۰۰۹ کریسترفسن^{۱۵} با اضافه کردن یک فرایند تصادفی دیگر به مدل هستون، این مدل را بهبود داد. مدل هستون با دو فرایند نوسان تصادفی تحت عنوان مدل هستون مضاعف، در مقایسه با مدل هستون استاندارد انعطاف بیشتری نسبت به قیمت‌های پرت دارد و در حدود ۲۴٪ بیشتر از هستون استاندارد آنها را پوشش داده و نیز نسبت به نوسان جزئی قیمت‌ها حساسیت بیشتری از خود نشان می‌دهد. با این وجود، قیمت دارایی‌های پایه در بازارهای مالی اغلب دستخوش تغییرات ناگهانی ناشی از عوامل گوناگون محیطی، اجتماعی، سیاسی و اقتصادی روز دنیا است که روند استاندارد قیمت‌گذاری‌ها، هرچند انعطاف پذیر، این تغییرات و نوسانات ناگهانی را پوشش نمی‌دهد. برای رفع این مشکل مدل‌های نوسان تصادفی پرشی، توسط محققان عرصه مالی پیشنهاد شده است. مدل‌سازی بازارهای مالی، تنها چالش پیش روی محققان و مهندسان مالی نیست و قدم

بعدی یافتن روشی کارا و مناسب برای حل مدل‌های پیشنهادی و پیش بینی قیمت دارایی‌ها در زمان آتی است (مهردوست و صابر، ۱۳۹۳). برای حل مدل‌های مالی دارایی‌های پایه روش‌های گوناگونی وجود دارد. یکی از روش‌های مشهور در این زمینه، استفاده از تبدیل فوریه سریع است که در سال ۱۹۹۹ توسط کار و مادان معرفی شد. در این روش از تابع مشخصه فرایند دارایی پایه استفاده می‌شود. آن‌ها روش تبدیل فوریه سریع را برای قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون به کار بردند. این روش به دلیل سرعت بالا و استفاده از تابع مشخصه فرایند قیمت دارایی پایه، که همواره موجود هستند، روشی مناسب برای قیمت‌گذاری اختیار معامله است (کار و مادان، ۱۹۹۹).

۲-۱- مبانی نظری مدل

فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمال، $\{F_t\}_t$ فیلتر تولید شده توسط فرآیندهای براونی^{۱۶} و فرآیند پرش در زمان $0 \leq t \leq T$ و Q اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی باشد. همچنین فرض کنید فرآیند قیمت دارایی پایه S_t در لحظه‌ی t از مدل زیر تبعیت کند

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sqrt{V_t}(S_t)dZ_{t_1}, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

که در آن Z_{t_1} فرآیند وینر است.

در مدل هستون می‌توان یک فرآیند وینر دیگر برای نوسان نیز اضافه کرد. معادله‌ی دوم به شکل زیر است

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dZ_{t_2}, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

با این فرض که :

$$Z_{t_1}Z_{t_2} = \rho dt,$$

که در آن S_t فرایند قیمت گذاری و V_t نوسان^{۱۷} و Z_{t_1} و Z_{t_2} فرایند براونی با ضریب همبستگی ρ هستند. میانگین بلند مدت^{۱۸} و k سرعت بازگشت به میانگین^{۱۹} و σ واریانس فرایند نوسان^{۲۰} است (هستون، ۱۹۹۳).

۲-۲- قیمت گذاری اختیار خرید مدل توانی

برای $m > 0$ به صورت زیر است [۹]:

$$c = S^m e^{[(m-1)(r+m\frac{\sigma^2}{2})-m(r-b)]T} \cdot N(d_1) - Ke^{-rT} \cdot N(d_2), \quad (3)$$

که K قیمت توافقی^{۲۱} اختیار است

به همین ترتیب برای اختیار فروش توانی رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$p = Ke^{-rT} \cdot N(-d_2) - S^m e^{[(m-1)(r+m\frac{\sigma^2}{2})-m(r-b)]T} \cdot N(-d_1), \quad (4)$$

که N تابع توزیع تجمعی متقارن نرمال استاندارد است و

$$d_1 = \frac{\ln(S/Km) + (r-b) + (m - \frac{1}{2})\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - m\sigma\sqrt{T},$$

که در آن b سود تقسیمی پیوسته^{۲۲} است

به عنوان مثال، فرض کنید می‌خواهیم اختیار مدل توانی با سررسید یکساله را قیمت گذاری کنیم که قیمت دارایی پایه 2، قیمت توافقی 4، نرخ بهره ی بدون ریسک 8٪، سود تقسیمی برابر صفر و نوسان قیمت دارایی پایه 10٪ باشد (ابراهیم و همکاران، ۲۰۱۳).

با فرض اینکه توان برابر ۲ باشد قیمت اختیار خرید برابر است با:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{2}{4 \cdot 2}\right) + (0.08 + (2 - \frac{1}{2}) \cdot 0.1^2) \cdot 1}{0.1 \sqrt{1}} = 0.9500,$$

$$d_2 = 0.9500 - 2 \times 0.1 \sqrt{1} = 0.7500,$$

$$N(d_1) = N(0.95) = 0.8289, \quad N(d_2) = N(0.75) = 0.7734$$

پس قیمت خرید این اختیار برابر است با:

$$c = 2^2 e^{[(2-1)(0.08 + 2 \times \frac{0.1^2}{2}) - 2 \times (0.08)] \cdot 1} \cdot (0.8289) - 4e^{-0.08 \times 1} \cdot (0.7734).$$

$$c = 0.2360$$

و برای اختیار فروش مدل توانی برابر است با:

$$N(-d_1) = N(-0.95) = 0.1711, \quad N(-d_2) = N(-0.75) = 0.2266$$

و در نتیجه:

$$p = 4e^{-0.08 \times 1} \cdot (0.2266) - 2^2 e^{[(2-1)(0.08 + 2 \times \frac{0.1^2}{2}) - 2 \times (0.08)] \cdot 1} \cdot (0.1711).$$

$$p = 0.1988$$

۲-۳- به دست آوردن تابع مشخصه

برای استفاده از تبدیل فوریه سریع نیازمند استفاده از تابع مشخص هستیم. هانگ (۲۰۰۴) معادلات زیر را برای محاسبه ی تابع مشخصه ی $F_{c_t}(\phi)$ بدست آورده است.

$$H_{S_t}(\phi) = e^{A(\phi)+B(\phi)+C(\phi)}, \quad (5)$$

$$A(\phi) = i\phi + (x_0 + rT),$$

$$B(\phi) = \frac{2\zeta(\phi)(1 - e^{-\psi(\phi)T})V_0}{2\psi(\phi) - (\psi(\phi) - \gamma(\phi))(1 - e^{-\psi(\phi)T})},$$

$$C(\phi) = \frac{\theta k}{\sigma^2} [2\log(\frac{2\psi(\phi) - (\psi(\phi) - \gamma(\phi))(1 - e^{-\psi(\phi)T})}{2\psi(\phi)}) + (\psi(\phi) - \gamma(\phi))T],$$

که در آن :

$$\zeta(\phi) = -\frac{1}{2}(\phi^2 + i\phi),$$

$$\psi(\phi) = \sqrt{\gamma^2(\phi) - 2\sigma^2\zeta(\phi)},$$

$$\gamma(\phi) = k - \rho\sigma\phi i,$$

۲-۴- قیمت گذاری اختیار معاملات مدل توانی با روش تبدیل فوریه سریع

اختیار معامله مدل توانی، اختیاری است که بازدهی آن وابسته به قیمت دارایی پایه با توانی از $m > 0$ است که دو نوع فرم بازدهی برای اختیار معامله توان با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T وجود دارد. ارزش گذاری اختیار معامله های توان تحت اندازه ریسک خنثی به صورت زیر است

$$c(t, S_T) = e^{-r(T-t)} E^Q [(S_T^m - K^m)^+ | F_t], \quad (6)$$

$$c(t, S_T) = e^{-r(T-t)} E^Q [(S_T^m - K)^+ | F_t], \quad (7)$$

که r نرخ بهره (ثابت) و $(S_T^m - K^m)^+ = \max(S_T^m - K^m, 0)$ است. فرمول (4) را ارزش نوع اول اختیار خرید معامله توانی و فرمول (5) را ارزش نوع دوم اختیار خرید معامله توانی می نامیم.

حال قرار می دهیم $t = 0$ و $k = \ln K$ ، $X_t = \ln S_t$ ، در این صورت خواهیم داشت

$$c(T, k) = e^{-rt} \int_k^\infty (e^{mX_T} - e^{mk}) q_T(X_T) dX_T, \quad (8)$$

$$c(T, k) = e^{-rt} \int_k^\infty (e^{mX_T} - e^k) q_T(X_T) dX_T, \quad (9)$$

که در آنها $q_T(X_T)$ تابع چگالی فرآیند تصادفی X_T است. همچنین کار و مادان (۱۹۹۹) تابع قیمت اختیار خرید را به صورت زیر اصلاح کردند:

$$C(T, k) = e^{\alpha k} c(T, k), \quad \alpha > 0 \quad (10)$$

تبدیل فوریه روی $C(T, k)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\psi_T(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} C(T, k) dk, \quad (11)$$

با جای‌گذاری فرمول رابطه‌ی (۸) در (۱۰) و همچنین رابطه‌ی (۱۰) در (۱۱) برای نوع اول اختیار معامله توانی داریم

$$\begin{aligned}\psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} e^{\alpha k} e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{mX_T} - e^{mk}) q_T(X_T) dX_T dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} q_T(X_T) \int_{-\infty}^{X_T} (e^{mX_T + \alpha k} - e^{(\alpha+m)k}) e^{iuk} dk dX_T \\ &= \frac{me^{-rT} H_{S_T}(u - (\alpha+m)i)}{(\alpha+iu)(m+\alpha+iu)},\end{aligned}$$

و به این ترتیب برای نوع دوم اختیار معامله توانی با جای‌گذاری فرمول رابطه‌ی (۹) در (۱۰) و همچنین رابطه‌ی (۱۰) در (۱۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} e^{\alpha k} e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{mX_T} - e^k) q_T(X_T) dX_T dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} q_T(X_T) \int_{-\infty}^{X_T} (e^{mX_T + \alpha k} - e^{(\alpha+1)k}) e^{iuk} dk dX_T \\ &= e^{-rT} \left[\frac{H_{S_T}(u - (\alpha+m)i)}{\alpha+iu} - \frac{H_{S_T}(u - (\alpha+1)i)}{1+\alpha+iu} \right],\end{aligned}$$

که در روابط فوق $H_{S_T}(u)$ تابع مشخصه X_T تحت اندازه ریسک خنثی است. طبق تعریف معکوس تبدیل فوریه تابع $C(T, K)$ به صورت بیان می‌شود:

$$C(T, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du, \quad (12)$$

از طرفی دیگر با توجه به رابطه‌ی (۸) داریم:

$$c(T, k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du, \quad (13)$$

بنابراین قیمت اصلاح شده اختیار خرید توان با استفاده از تبدیل فوریه سریع به صورت زیر به دست می‌آید

$$c(T, k) = \frac{e^{-\alpha kv}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(v-1)} e^{ibu_j} \psi_T(u_j) \frac{\Delta}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1}) \quad (14)$$

که در آن پارامتر Δ وابسته به N و مقدار N توانی از دو است. همچنین داریم

$$u_j = \Delta(j-1), \quad b = \frac{N\Delta}{2}, \quad v = 1, 2, \dots, N, \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

(مهردوست و صابر، ۱۳۹۲)

۳- تبیین عددی مدل

در این بخش مثالی عددی برای نوع اول اختیار معامله توان با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع ذکر شده است. پارامترهای استفاده شده به شرح زیر هستند (دینگک و اوسترلی، ۲۰۱۴).

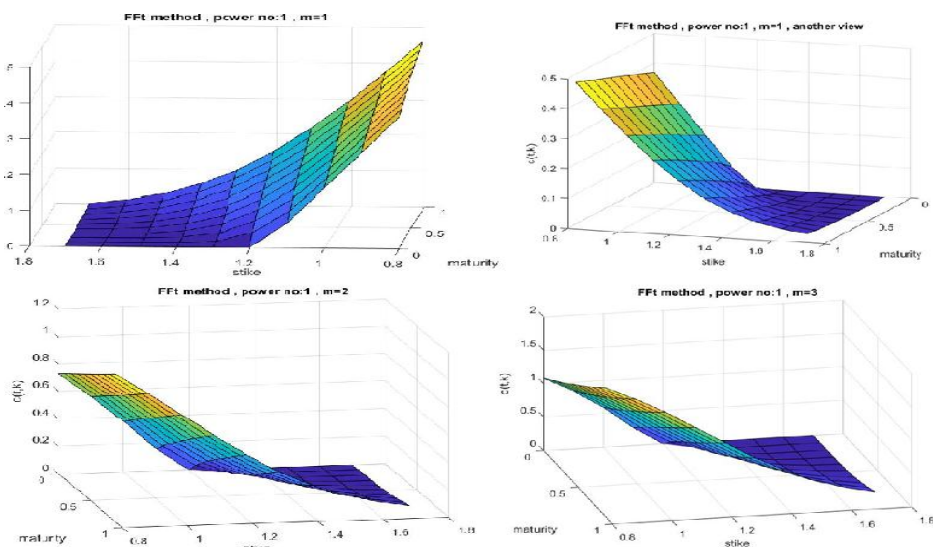
$$\alpha = 1.25, N = 2^{12}, k = 3, \theta = 0.035627, \sigma = 0.0003453$$

$$V_0 = 0.0546287, \rho = 0.0224825, S_0 = 1.1686, r = \%15.5 \quad (15)$$

که α و N پارامترهای لازم برای تبدیل فوریه، k نرخ بازگشت به میانگین، θ میانگین بلندمدت، σ نوسانات واریانس، V_0 واریانس در زمان t_0 ، ρ ضریب همبستگی، S_0 قیمت اولیه دارایی پایه و r نرخ بهره بدون ریسک است.

با استفاده از کدنویسی تبدیل فوریه سریع در نرم افزار MATLAB و قرار دادن مقادیر فوق، نمودارهای شکل 1 حاصل شدند.

در شکل 1، دو شکل ردیف اول دو نمایش از قیمت گذاری اختیار معامله توانی نوع اول با تغییر قیمت توافقی (strike در محور طول) و مدت سررسید (maturity در محور عرض) اختیار انجام شده است. قیمت اختیار در محور ارتفاع مشخص شده است. همچنین در شکل های ردیف دوم، قیمت گذاری اختیار با توان ۲ و توان ۳ مشاهده می شود.



شکل ۱- تغییرات قیمت اختیار معامله ی توانی با تغییر قیمت توافقی، دوره زمانی و توان

۴- روش شناسی پژوهش

به منظور قیمت‌گذاری اختیار معاملات توانی از اطلاعات روزانه شاخص بورس اوراق بهادار تهران به عنوان نماینده ای از یک دارایی قابل معامله در دوره زمانی آذر ۱۳۸۷ تا تیرماه ۱۳۹۷ استفاده شده است. جهت کاهش خطای برنامه نویسی مقیاس مقادیر شاخص با تقسیم اعداد بر ۱۰۰۰ کوچک شده است. همچنین سود تقسیمی صفر فرض شده است ($b=0$).

چون اختیار معامله مدل توانی در شرایطی که نوسان زیاد باشد (رشد و زوال شدید) مورد استفاده قرار می‌گیرد، ابتدای دی ماه سال ۹۱ (شروع رشد شدید شاخص بورس) به عنوان زمان حال انتخاب شده است.



نمودار ۱- فرآیند محاسبه ی پارامتر های مورد نیاز بر مبنای پیش فرض های بخش اول طرح



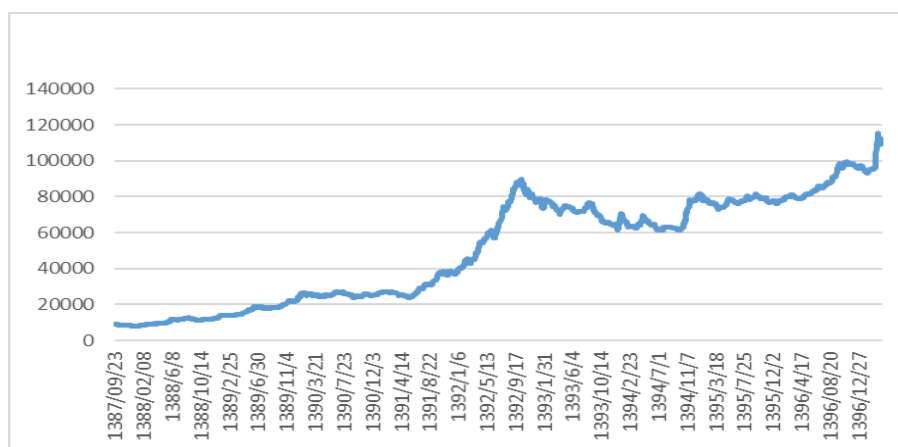
نمودار ۲. فرآیند محاسبه ی پارامتر های مورد نیاز بر مبنای پیش فرض های بخش دوم طرح

در نمودار ۱ و نمودار ۲، پارامترهای σ ، S و r در بخش تبیین عددی مدل معرفی شدند. K قیمت توافقی و T سررسید اختیار است.

حال فرض کنید هدف قیمت گذاری اختیار خرید مدل توانی با سررسید یکساله ($T=1$) باشد. در دو بخش این قیمت گذاری انجام شده است.

الف) قیمت گذاری اختیار معامله ی مدل توانی با استفاده از اطلاعات زمان حال: مقدار شاخص بورس در ابتدای دی ماه ۹۱، برابر قیمت زمان حال دارایی پایه، مقدار شاخص در ابتدای دی ۹۲، برابر قیمت توافقی و انحراف معیار دوره ی یکساله، برابر نوسان قرار داده شده است (نمودار ۱).

ب) قیمت گذاری اختیار معامله ی مدل توانی با استفاده از اطلاعات گذشته: در این بخش قیمت توافقی، برابر میانگین مقدار شاخص (رحمانی و جعفریان، ۱۳۹۶) در دوره ماقبل، یعنی ابتدای دی ۹۰ تا ابتدای دی ۹۱ و نوسان، برابر انحراف معیار دوره ماقبل قرار داده شده است (نمودار ۲).



شکل ۲- مقدار شاخص کل بازار بورس ایران

۵- یافته ها و نتایج پژوهش

در این بخش نتایج حاصل از محاسبه ی قیمت اختیار معامله ی مدل توانی در دو بازه ی زمانی آمده است.

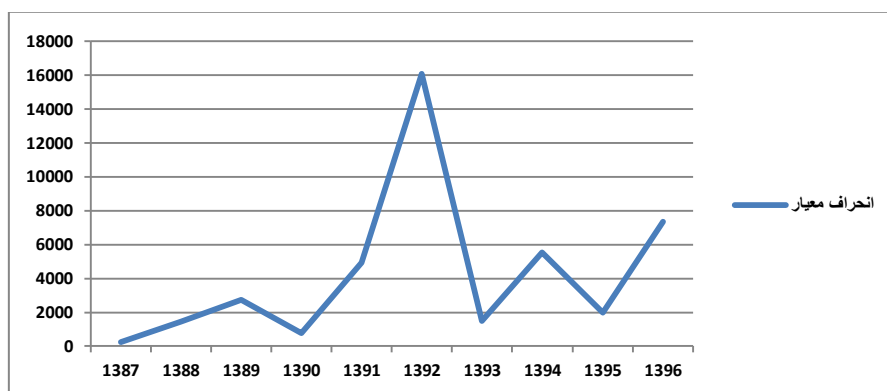
۵-۱- آمار توصیفی

در جدول شماره ۱ آمار توصیفی مربوط به شاخص بورس اوراق بهادار تهران به عنوان متغیر اصلی قیمت گذاری شده مبتنی بر اختیار معامله توانی در دوره مورد بررسی ارائه شده است. همانگونه که مشاهده می شود، میانگین شاخص در طی دوره تحقیق یک روند صعودی را، دنبال می کند. اما نکته حائز اهمیت برای پیشنهاد اختیار معامله توانی بر روی شاخص، نوسانات نسبتاً زیاد شاخص به عنوان یک دارایی پایه بر مبنای انحراف معیار است. بالا بودن نوسانات شاخص می تواند توجیه کننده استفاده از اختیار معاملات توانی باشد. چرا که چنین اختیار معاملاتی در شرایط نوسان بالا مورد استفاده قرار می گیرد. مقادیر انحراف معیار شاخص در شکل شماره ۴ ارائه شده که گویای انحراف معیار بالای شاخص در دوره زمانی ۱۳۹۱ تا ۱۳۹۲ است. میانه متغیر شاخص

تفاوت چندانی با میانگین را نشان نمی‌دهد و چولگی زیادی در مقدار متغیرها مشاهده نمی‌شود از طرفی کشیدگی شاخص کمتر از کشیدگی توزیع نرمال است.

جدول ۱- آمار توصیفی شاخص بورس اوراق بهادار تهران در دوره‌های مختلف

سال	میانگین	میانه	انحراف معیار	چولگی	کشیدگی
۱۳۸۷	۸۴۵۹	۸۴۶۶	۲۴۲	-۰.۰۸۸	-۰.۵۰۷
۱۳۸۸	۱۰۶۷۹	۱۱۴۳۷	۱۴۴۲	-۰.۴۲۹	۱.۳۴۵
۱۳۸۹	۱۷۳۶۴	۱۸۰۳۵	۲۷۲۲	۰.۱۴۳	۰.۹۸۵
۱۳۹۰	۲۵۴۳۴	۲۵۳۲۳	۷۷۶	۰.۳۰۱	۰.۶۸۹
۱۳۹۱	۳۰۰۷۲	۲۷۲۵۹	۴۹۳۳	۰.۵۵۲	۱.۲۶۲
۱۳۹۲	۶۴۸۱۲	۶۲۹۰۴	۱۶۱۰۳	-۰.۰۷۷	۱.۴۳۱
۱۳۹۳	۷۱۹۵۷	۷۰۳۴۸	۱۴۸۶	-۰.۰۵۴	۱.۵۲۳
۱۳۹۴	۶۸۹۸۷	۶۸۰۷۸	۵۵۲۷	۰.۲۴۱	۱.۳۶۳
۱۳۹۵	۷۷۶۵۳	۷۷۷۰۷	۱۹۶۸	-۰.۳۰۵	۰.۲۷۷
۱۳۹۶	۸۶۷۵۳	۸۴۷۳۴	۷۳۶۹	۰.۴۷۹	۱.۳۲۳



شکل ۳- انحراف معیار شاخص در دوره تحقیق

در جدول شماره ۲ به آرایه آمار توصیفی مربوط به بازده شاخص بورس اوراق بهادار تهران پرداخته شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، میانگین بازده روزانه شاخص تفاوت آنچنانی را در طی سال‌های مختلف نشان نمی‌دهد. هر چند به دلیل تنوع بالای سهام موجود در شاخص و استفاده از آمار روزانه تفاوت ناچیز هم

دارای اهمیت است. همچنین همانند رفتار اکثر متغیرهای مالی، در اکثر دوره‌های تحقیق، داده‌های بازده روزانه از کشیدگی بالایی برخوردار است.

جدول ۲- آمار توصیفی بازده شاخص بورس اوراق بهادار تهران در دوره‌های مختلف

سال	میانگین	میانه	انحراف معیار	چولگی	کشیدگی
۱۳۸۷	-0.0019	-0.0017	0.0003	-2.26	11.83
۱۳۸۸	0.0018	0.0017	0.0059	2.51	22.40
۱۳۸۹	0.0025	0.0025	0.0065	-0.01	1.07
۱۳۹۰	0.0004	0.0003	0.0073	-0.28	1.15
۱۳۹۱	0.0016	0.0008	0.0080	0.51	1.12
۱۳۹۲	0.0030	0.0036	0.0096	-0.06	0.12
۱۳۹۳	0.0023	0.0041	0.0054	0.054	1.22
۱۳۹۴	0.0000	0.0001	0.0070	-0.00	12.28
۱۳۹۵	-0.0001	0.0002	0.0042	-0.63	4.143
۱۳۹۶	0.0004	0.0006	0.0035	0.22	4.116

۵-۲- استفاده از اطلاعات زمان حال

در این بخش، ابتدای دی ماه ۱۳۹۱ به عنوان زمان حال و لحظه ایجاد اختیار ($t=0$) در نظر گرفته شده که مقدار شاخص در این زمان برابر 3/60405 است و این مقدار برابر با S در مدل قیمت‌گذاری می‌باشد. ابتدای دی ماه ۱۳۹۲ به عنوان سررسید اختیار در نظر گرفته شده است. در اینجا فرض بر این است که مقدار شاخص در طی یک سال پیش‌بینی شده باشد و مقادیر واقعی، به عنوان مقادیر پیش‌بینی شده دیده می‌شوند. مقدار شاخص بورس در سررسید 8/70155 است که این مقدار برابر قیمت توافقی (K) قرار داده شده است. همچنین انحراف معیار نیز برای این دوره یک‌ساله محاسبه و برابر σ قرار داده شده است.

$$S = 3.60405, \quad K = 8.70155, \quad T = 1, \quad m = 2$$

$$\sigma = 1.545901, \quad b = 0, \quad r = 5.6355$$

m توان اختیار، b سود تقسیمی و سایر پارامترها نیز در بخش‌های قبل تعریف شده‌اند. با کدنویسی رابطه (۳) در نرم افزار MATLAB قیمت گذاری اختیار خرید (c) مدل توانی انجام شده

$$d_1 = 16.6260, \quad d_2 = 16.5951 \quad c = 4.0556$$

همانطور که مشاهده می‌شود قیمت این نوع اختیار خرید با شرایط ذکر شده برابر ۴,۰۵۵۶ خواهد بود در حالی که مقدار شاخص بورس در سررسید (ابتدای دی ماه ۱۳۹۲) برابر ۸۷۰۱۵/۵ می‌باشد. پس اگر فردی مقدار شاخص در ابتدای دی ماه سال ۹۲ (با فرض اینکه ابتدای دی ماه ۱۳۹۱ زمان حال باشد) را پیش بینی کند، با قرار گرفتن در موقعیت خرید یک اختیار خرید مدل توانی با شرایط ذکر شده و با سررسید یکساله، سود آربیتراژی به دست می‌آورد. می‌توان ناکامل بودن بازار بورس را در این شرایط و تبعیت نکردن از مدل هستون را نتیجه گرفت.

۳-۵- استفاده از اطلاعات گذشته

در این بخش با فرض اینکه در ابتدای دی ۱۳۹۱ قرار داریم و مانند بخش قبل مقدار شاخص یا قیمت اولیه دارایی پایه برابر 3/60405 است. در این بخش نیز سررسید اختیار یکساله و زمان سررسید دی ماه ۱۳۹۲ می‌باشد.

حال چنین فرض می‌شود که امکان پیش‌بینی قیمت وجود ندارد اما اطلاعات گذشته قیمت دارایی پایه که در اینجا مقدار شاخص بورس است، در دسترس است. پس دوره زمانی مورد نیاز برای به دست آوردن قیمت توافقی و انحراف معیار، یک سال گذشته یعنی ابتدای دی ماه ۱۳۹۰ تا دی ماه ۱۳۹۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد. میانگین مقدار شاخص در این دوره برابر 2.704613 بوده که این مقدار برابر قیمت توافقی قرار داده شده است

$$S = 3.60405, K = 2.704613, T = 1, m = 2, \sigma = 0.266694, b = 0, r = 5.6355$$

نتایج زیر با استفاده از نرم افزار MATLAB برای اختیار فروش (p) حاصل می‌شوند.

$$d_1 = 3.5532, d_2 = 3.0198, p = 1.06268$$

با توجه به نتیجه ی بالا، ارزش اختیاری با شرایط ذکر شده برابر ۱۰۶۲۶/۸ و مقدار شاخص در سررسید (ابتدای دی ۱۳۹۲) برابر ۸۷۰۱۵/۵ هستند. در این حالت اگر فردی با استفاده از اطلاعات گذشته چنین اختیاری را قیمت‌گذاری و در موقعیت فروش اختیار با سررسید یکساله قرار بگیرد، از اختلاف قیمت اختیار و مقدار شاخص بازار در سررسید، سود آربیتراژی به دست خواهد آورد. پس در این حالت نیز بازار تابع مدل هستون نیست و فرصت آربیتراژ به وجود آمده است.

۶- بحث و نتیجه گیری

قیمت‌گذاری اختیار معاملات یکی از مباحث چالش برانگیز در حوزه سرمایه‌گذاری و مدیریت ریسک به شمار می‌رود، لذا در شرایط با نوسانات بالای قیمتی، قیمت‌گذاری نادرست اختیار معاملات می‌تواند پیامدهای نامطلوبی را برای خریداران و عرضه‌کنندگان آنها به همراه داشته باشد. بر این اساس در این مقاله با استفاده از مدل قیمت‌گذاری توانی اختیار معاملات هستون برای شرایط نوسانات بالا، به قیمت‌گذاری فرضی شاخص بورس

اوراق بهادار تهران و بررسی اثربخشی آن پرداخته شده است. بدین منظور مقدار شاخص کل روزانه ی بازار بورس در بازه زمانی آذر ۱۳۸۷ تا تیر ۱۳۹۷ استخراج و دوره ی زمانی با نوسان زیاد (ابتدای دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۲) انتخاب و پارامترهای لازم برای قیمت گذاری محاسبه گردید. در دو شرایط فرضی (استفاده از اطلاعات زمان حال و استفاده از اطلاعات گذشته) قیمت گذاری صورت گرفت و شرایط آربیتراژ در این دو حالت مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به شکست ساختاری و تغییرات بیش از اندازه دوره زمانی اول دی ماه ۱۳۹۱ تا دیماه ۱۳۹۲ برای برآورد پارامترهای مدل، در مرحله اول از نوسانات همان دوره به منظور قیمت گذاری اختیار معامله فرضی استفاده شد و در مرحله بعد از اطلاعات یکساله قبل از دیماه ۱۳۹۱ به منظور قیمت گذاری اختیار معامله استفاده گردید. مقایسه ارزش واقعی شاخص در پایان دوره و قیمت توافقی برآوردی نشان دهنده وجود فرصت آربیتراژی ناشی از خرید اختیار معامله است در همین حال استفاده از اطلاعات گذشته برای برآورد پارمترها، سبب اختلاف فاحش قیمت گذاری اختیار معامله و قیمت توافقی با ارزش واقعی شاخص می شود. عبارتی اگر چه این قبیل از مدل های قیمت گذاری در شرایط تغییرات شدید بازار از کارایی بیشتری برخوردارند ولیکن تعیین روش پیش بینی نوسانات غیرعادی در استفاده از این مدل ها از اهمیت ویژه ای برخوردار است. چرا که پیش بینی شکست ساختاری سبب افزایش کارایی مدل توانی قیمت گذاری اختیار معامله می گردد. مقایسه تحلیل عددی قیمت گذرای اختیار معامله توانی هستون با داده های عددی فرضی مبین کارایی این مدل در قیمت گذاری است. به طور مشابه مهردوست و صابر (۱۳۹۲) نیز با استفاده از مدل هستون به قیمت گذاری فرضی اختیار معاملات توانی پرداختند که نتایج تحقیق ایشان هم مبین کارایی این مدل در شرایط نوسان شدید قیمتی است. همچنین ابراهیم، آهرا و مهندسزاک (۲۰۱۶) به قیمت گذاری اختیار معامله توانی در مدل مرتون^{۳۳} پرداخته و نشان دادند قیمت اختیار مدل توانی در مدل با پرش از قیمت این اختیار در مدل بلک-شولز بیشتر است.

فهرست منابع

- * رحمانی، مرتضی و جعفریان، ناهید (۱۳۹۶). بررسی مدل بلک-شولز کسری با توان هرست روی اختیار معاملات اروپایی با هزینه معاملات، فصلنامه مهندسی مالی و اوراق بهادار، دوره ۸، شماره ۳۲، صص ۴۳-۶۲.
- * کیماگری، علی محمد و آفریده ثانی، احسان (۱۳۸۷) ارائه یک روش تلفیقی جهت قیمت گذاری اختیار معامله مبتنی بر دو مدل بلک-شولز و درخت دوتایی (مطالعه موردی بازار بورس سهام ایران)، نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید دانشگاه علم و صنعت، جلد ۱۹، شماره ۴، صص ۱۱۹-۱۲۷.
- * لطیفی، رقیه (۱۳۹۵)، ارزش گذاری اختیار معامله ی توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون، پایان نامه ی چاپ نشده کارشناسی ارشد، به راهنمایی الهام دسترنج دانشکده ی علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران.
- * مهردوست فرشید و صابر نغمه (۱۳۹۲)، قیمت گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش، مجله ی مدل سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۲، شماره ۳، پاییز و زمستان ۱۳۹۲.

- * نبوی‌چاشمی، سیدعلی و عبدالهی، فرهاد (۱۳۹۷). بررسی و مقایسه الگوهای سود اختیار معاملات آسیایی، اروپایی و امریکایی سهام در بورس اوراق بهادار، فصلنامه مهندسی مالی و اوراق بهادار، دوره ۹، شماره ۳۴، صص ۳۵۹-۳۸۰.
- * نبوی‌چاشمی، سیدعلی و قاسمی چالی، جابر (۱۳۹۵). تعیین قیمت اختیار معاملات غیراستاندارد توأم با مانع در بورس اوراق بهادار تهران، فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری، دوره ۵، شماره ۲۰، صص ۲۰۵ تا ۲۲۲.
- * نیسی عبدالساده و ملکی بهروز (۱۳۹۵). رضائیان روزبه، تخمین پارامترهای مدل قیمت گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره بیست و هشتم، پاییز ۹۵.
- * Carr, P., Madan, D. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of computational finance*, 2(4), 61-73.
- * ÇELİK Nazlı(2009), An Application Of Fast Fourier Transform Option Pricing Algorithm To The Heston Model, Term Project,
- * Dingec, K.D., H. Sak, and W. Hörmann(2014), Variance reduction for Asian options under a general model framework, *Review of Finance*, 19(2): p. 907-949
- * Grzelak, L.A. and C.W. Oosterlee(2011), On the Heston model with stochastic interest rates., *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2(1): p. 255-286
- * Heston, S.L. (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options, *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- * Heynen, R. C., & Kat, H. M. (1996). Pricing and hedging power options. *Financial Engineering and the Japanese Markets*, 3 (3), 253-261.
- * Hong, G., (2004), Forward Smile and Derivative Pricing, Equity Quantitative Strategists Working Paper, UBS.
- * Iqmal Ibrahim Siti nur, G.O'Hara John, Mohd Zaki Muhammad syazwan(2016), Pricing Formula for Power Options with Jump-Diffusion, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 10, No 4, 1313-1317
- * Iqmal Ibrahim Siti nur, G.O'Hara John, Constantiou Nick(2013), Pricing Power Options under the Heston Dynamics using the FFT, *NEW TRENDS IN MATHEMATICAL SCIENCES*, Vol. 1, No. 1, , p.1-9
- * Kim, J., Kim, B., Moon, K. S., & Wee, I. S. (2012). Valuation of power options under Heston's stochastic volatility model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(11), 1796-1813.
- * Ren, P. , Parametric estimation of the Heston model under the indirect observability framework, (2014)
- * Vellekoop, M. and H. Nieuwenhuis, A tree-based method to price American options in the Heston model., *The Journal of Computational Finance*, 13: p. 1 (2009)

یادداشت‌ها

- ¹ Fischer Black
- ² Myron Scholes
- ³ Self-financing
- ⁴ Arbitrage
- ⁵ Geometric Wiener process
- ⁶ Black - Scholes
- ⁷ Skewness
- ⁸ Fast Fourier transform
- ⁹ Heavy Tail
- ¹⁰ Hull and White
- ¹¹ Scott
- ¹² Stein
- ¹³ Heston
- ¹⁴ Monte Carlo simulation
- ¹⁵ Christoffersen
- ¹⁶ Brownian motion
- ¹⁷ Volatility
- ¹⁸ Long run variance
- ¹⁹ Rate of reversion
- ²⁰ Volatility of volatility
- ²¹ Strike price
- ²² continuous dividend yield
- ²³ Merton jump diffusion