فصلنامه علمی پژوهشی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
سال یازدهم، شماره چهل‌ام
زمستان ۱۳۹۷

# مطلوبیت سرمایه‌گذار در استراتژی‌های متوازن‌سازی مجدد پرتفوی

**علیرضا ولیدی**[۱]
**محمد ابراهیم آقابابایی**[۲]

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۱/۲۶        تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۴/۰۱



## چکیده

در محیط کسب‌وکار امروزی که معاملات آن به‌صورت الگوریتمی و با تناوب بالا انجام می‌شود، تصمیمات متوازن‌سازیِ مجدد پرتفوی از اهمیت بسزایی برخوردار بوده و باید به‌سرعت اتخاذ شوند. در روش بهینه لگاریتمی که از آن با عنوان استراتژی فعالانه نیز یاد می‌شود، متوازن‌سازی به‌صورت پیوسته زمان انجام شده و این استراتژی زمانی بهینه خواهد بود که افق سرمایه‌گذاری پرتفوی نامحدود باشد. اما این موضوع عملاً غیرممکن بوده و پرتفوهای سرمایه‌گذاری معمولاً دارای افق سرمایه‌گذاری محدود می‌باشند. از طرفی به دلیل پرهزینه و توجیه‌ناپذیر بودن انجام متوازن‌سازی‌های پی‌درپی برای سرمایه‌گذار، در این مقاله سعی بر معرفی روش دیگری از متوازن‌سازی با تناوب کمتر به‌گونه‌ایست که بتوان به همان مطلوبیت به دست آمده در روش بهینه لگاریتمی و یا مقداری بیش از آن رسید. در این مقاله، پس از معرفی استراتژی‌های مختلف متوازن‌سازی آن‌ها را بر روی یک پرتفوی دلخواه پیاده‌سازی و نتایج را تحلیل خواهیم کرد. این نتایج نشان می‌دهند که به کارگیری استراتژی ترکیبی برای متوازن‌سازی، مطلوبیت بیشتری را در مقایسه با سایر استراتژی‌ها برای سرمایه‌گذار به همراه دارد.



**واژه‌های کلیدی:** متوازن‌سازی مجدد پرتفوی، تناوب متوازن‌سازی، روش بهینه لگاریتمی، استراتژی متوازن‌سازی ترکیبی.

۱- کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشگاه خوارزمی(نویسنده مسئول) Alireza.validi1991@gmail.com
۲- استادیار گروه مدیریت مالی و مهندسی مالی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. m.aghababaei@khu.ac.ir

## ۱- مقدمه

امروزه سیستم‌های معـاملاتی الگـوریتمی[۱]، پایـه و اساس نرم‌افزارهـای متعـدد مـالی بـه شـمار مـی‌رونـد (جانسون[۲]، ۲۰۱۰). نوع پیشـرفته ایـن سیسـتم‌هـا، بـا افزایش قدرت محاسبات درصدد گسترش الگوریتم‌های پیچیـــده در جهـــت هوشمندســـازی تصـــمیمات خریدوفروش می‌باشند. به دلیل کوتاه بودن فرصت‌های سودآور معاملاتی، تمامی این تصمیمات باید در کسری از ثانیـه اتخـاذ شـوند. یکـی از تصـمیماتی کـه اکثـر سیستم‌های معاملاتی باید اتخاذ کننـد تصـمیماتی در خصوص نحوه متوازن‌سازی مجدد پرتفوی[۳] است. انجام متوازن‌سازی‌های متعدد بـه دلیـل وجـود هزینـه‌هـای معاملاتی[۴] معقول نمی‌باشـد. از طرفـی عـدم تصـمیم-گیری سریع در متوازن‌سازی نیز گاهی اوقات منجر بـه از دست رفتن فرصت‌های سودآور سرمایه‌گذاری مـی-شـــود (داس و گویـــال[۵]، ۲۰۱۴). بنـــابراین اگـــر سرمایه‌گذاران بدانند در چه زمان‌هایی متوازن‌سـازی را متوقف کنند، بازدهی بالاتری نصیبشان خواهـد شـد و اگـر ایـن زمـان‌هـا بـه درسـتی تعیـین شـده باشـد سرمایه‌گذاران را از پرداخت هزینه‌های اضافی بازخواهد داشت.

در ایــن مقالــه، بــرای ســرمایه‌گــذار نــوعی، تــابع مطلوبیت لگاریتمی در نظر گرفته شده و از روش بهینه لگـاریتمی[۶] بـرای بیشـینه‌سـازی لگـاریتمِ ارزشِ مـورد انتظار پرتفـوی[۷] اسـتفاده مـی‌شـود. در چنـین حـالتی سرمایه‌گذار باید در جهت رسـیدن بـه بیشـینه مقـدار لگـاریتمِ ارزشِ پرتفـوی[۸]، بـه‌طـور مرتـب بـه اجـرای متوازن‌سازی در بلندمدت بپـردازد. هـدف ایـن مقالـه، ابتدا معرفی روشـی بـه‌منظـور پیـاده‌سـازی اسـتراتژی منفعلانه[۹] و سپس ارائه روشی بـا متـوازن‌سـازی کمتـر نسبت به استراتژی فعالانه است بـه‌گونـه‌ای کـه بتـوان مطلوبیتی برابر یا بیش‌تـر از روش بهینـه لگـاریتمی در انتهای افق سرمایه‌گذاری به دست آورد. در ایـن مقالـه به دنبال پاسخ به این سوال هستیم که با پیـاده‌سـازی این استراتژی‌ها بر روی پرتفوی واقعی از سـهام بـورس اوراق بهادار، آیا استراتژی ترکیبی، مطلوبیـت بیشـتری برای سرمایه‌گذار نوعی به همراه دارد یا خیر؟

## ۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

تحولات اقتصادی، سیاسی و اجتماعی، تأثیر بسزایی بر بازار سرمایه ایران داشته و نوسانات متنوعی را ایجاد کرده است. این نوسانات بر روی میزان ریسک و بازده سرمایه‌گذاری‌ها تأثیرگذار بوده و در نتیجه بر اهمیت برقراری متوازن‌سازی سبدی از دارایی‌ها می‌افزاید (امیرحسینی و شعبانی، ۱۳۹۲). پس از تشکیل یک پرتفوی، ارزش طبقات مختلف دارایی‌ها در آن با گذشت زمان دچار تغییر شده و از اوزان اولیه تعیین شده برای آن فاصله می‌گیرد. بنابراین باید مجدداً ترکیب پرتفوی را به حالت اولیه برگرداند که به آن متوازن‌سازی مجدد پرتفوی می‌گویند. اگرچه فرآیند متوازن‌سازی پرتفوی با هزینه معاملات همراه است اما نگه‌داشتن سطح ریسک پرتفوی در مقداری معین و از پیش تعیین‌شده نیز اهمیت زیادی خواهد داشت. استراتژی‌های متفاوتی برای متوازن‌سازی پرتفوی وجود دارد که تمامی سرمایه‌گذاران اعم از افراد حقیقی و حقوقی می‌توانند آن‌ها را در مدیریت پرتفوی خود به کار گیرند. در این مقاله، با کمک نتایج به دست آمده در مدل اولیه، اثر هرکدام از استراتژی‌ها را در مطلوبیت نهایی یک سرمایه‌گذار نوعی بررسی خواهیم کرد.

یکی از موضوعاتی که یک سرمایه‌گذار مـی‌بایسـت پس از تشکیل پرتفوی و تعیـین اوزان دارایـی‌هـای آن مدنظر داشته باشد، متـوازن‌سـازی آن در طـول زمـان است. کالینز[۱۰] و همکاران (۲۰۰۵) در مطالعات خود به بررســی جــامع اصــول و تکنیــک‌هــای متــوازن‌ســازی پرداخته و آن‌ها را به سه دسته متوازن‌سـازی تقـویمی، متوازن‌سازی حد مجاز[۱۱] و متـوازن‌سـازی آسـتانه‌ای[۱۲] تقسـیم کردنـد. کـالوت[۱۳] و همکـاران (۲۰۰۹) نیـز در مطالعه‌ای به بررسی جنبه رفتاری متوازن‌سازی سرمایه گذاران در بازار سـهام کشـور سـوئد پرداختنـد. آن‌هـا تغییر در سودآوری سهام یک پرتفوی در این کشـور را

به دو مؤلفه تجزیه کردند؛ یکی تغییر در بازدهی ناشی از عدم انجام معاملات و دیگری تغییر در بازدهی به دلیل انجام متوازن‌سازی. آن‌ها با تحلیل این عوامل به این نتیجه رسیدند که سهامداران و به‌خصوص ثروتمندان که پرتفوهای متنوع‌تری را نگهداری می‌کنند بیشتر تمایل به متوازن‌سازی و خرید و فروش سهام خواهند داشت. همچنین نتایج آن‌ها نشان داد که متوازن‌سازی با رویکرد نگهداری سهام بازنده[۱۴] و فروش سهام برنده[۱۵] در حال گسترش است. آرنوت[۱۶] و لاول[۱۷] (۱۹۹۳) به مطالعه ریسک و بازده سهام و اوراق قرضه برای سال‌های ۱۹۶۸ تا ۱۹۹۱ پرداخته و به این نتیجه رسیدند که متوازن‌سازی‌های منظم منجر به افزایش بازدهی خواهد شد. آن‌ها معتقد بودند که متوازن‌سازی‌های متناوب در جهت جلوگیری از انحراف زیاد از ترکیب اولیه پرتفوی مفید خواهد بود. مطالعات آن‌ها نشان داد که دوره‌های متوازن‌سازی ماهانه در مقایسه با سایر دوره‌ها، بازدهی بالاتری را در یک سطح ریسک معین نصیب سرمایه‌گذار می‌کند.

تامسون[۱۸] (۲۰۰۲) با استفاده از داده‌های سال‌های ۱۹۹۷ تا ۲۰۰۲ نشان داد که دوره‌های متوازن‌سازی سالانه در مقایسه با سایر دوره‌های متوازن‌سازی مانند فصلی و ماهانه و نیز در مقایسه با حالت «عدم متوازن-سازی» بازدهی بیشتری را نصیب سرمایه‌گذار خواهد کرد. اما این نتایج متناقض که بر اساس داده‌های تاریخی استخراج شده‌اند، باعث ایجاد سردرگمی در اتخاذ تصمیمات متوازن‌سازی شدند. برنشتاین[۱۹] (۱۹۹۶) و ماسترز[۲۰] (۲۰۰۳) در مطالعات خود قوانینی جامع برای متوازن‌سازی ارائه کردند. با این‌که این قوانین راهنمای مفیدی برای مدیران پرتفوی به‌حساب می‌آیند اما بر پایه علم ریاضیات و محاسبات تحلیلی نمی‌باشند. بیش از پنجاه سال پیش، مرتون[۲۱] (۱۹۷۱) اولین فردی بود که استراتژی تشکیل پرتفوی بهینه و پویا را با فرض پیوسته بودن زمان ارائه کرد. پس از او نیز سایر محققان با افزودن شرایطی به بهبود این استراتژی پرداختند. آلگوت[۲۲] و کاور[۲۳] (۱۹۸۸) به بهینه‌سازی این استراتژی برای توابع مطلوبیت مختلف پرداختند. لیو[۲۴] و همکاران (۲۰۰۳) نیز با مدنظر قرار دادن شرایطی برای دارایی‌های پایه موجود در این استراتژی، به بهینه‌سازی آن پرداختند. موضوعی که در این استراتژی اهمیت زیادی دارد، نیاز به متوازن‌سازی‌های پی‌درپی برای پرتفوهای بهینه است. سان[۲۵] (۲۰۰۶)، کریژمان[۲۶] (۲۰۰۹) و برانگر[۲۷] (۲۰۱۰)، در مطالعات خود به بررسی اثر گسسته‌زمان بودن متوازن‌سازی پرداختند. یکی از موضوعاتی که در مطالعات این حوزه به آن اشاره شده این است که زیانی که سرمایه‌گذاران در صورت عدم اجرای متوازن‌سازی‌های پی‌درپی به آن دچار می‌شوند قابل چشم‌پوشی و ناچیز است. سان و همکاران (۲۰۰۶)، به توسعه یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای محاسبه زمان‌های متوازن‌سازی بهینه پرداختند. آن‌ها نشان دادند که هزینه استفاده از این برنامه پویا، در مقایسه با استفاده از یک برنامه متوازن‌سازی پیوسته-زمان و بهینه، بسیار ناچیز است؛ اما محاسبات در این روش، زمانی که تعداد دارایی‌های درون پرتفوی افزایش پیدا کند زمان‌بر خواهد بود. برای مثال، زمان اجرای این برنامه برای پرتفویی متشکل از پنج دارایی ریسکی تا حدود ۷۵ دقیقه به طول خواهد انجامید. پس از آن‌ها، کریژمان و همکاران (۲۰۰۹) برای حل مشکل مقیاس‌پذیری این برنامه از یک برنامه ابتکاری درجه دو استفاده کردند.

فدایی نژاد و بنائیان (۱۳۸۹) با مدنظر قرار دادن متغیرهایی چون بازده، ریسک، نقد شوندگی و درجه ریسک‌پذیری و نیز لحاظ کردن هزینه‌های معاملاتی به طراحی مدلی برای متوازن‌سازی پرتفوی با کمک تصمیم‌گیری فازی پرداختند. زندیه و امیری (۱۳۹۲) به بررسی تأثیر متوازن‌سازی پرتفوی بر بازدهی و ریسک آن و نیز اثرگذاری عامل افق سرمایه‌گذاری بر متوازن‌سازی پرتفوی پرداخته و الگوریتم‌هایی فرا ابتکاری برای حل مسأله متوازن‌سازی در ابعاد بزرگ، پیشنهاد کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که متوازن‌سازی بر بازدهی و ریسک پرتفوی اثرگذار است و ریسک پرتفوی را کنترل می‌کند. همچنین به این نتیجه

رسیدند که افـق سـرمایه‌گـذاری بـرای متـوازن‌سـازی پرتفـوی یـک عامـل تأثیرگـذار بـوده و تعیـین افـق سرمایه‌گذاری و هدف سرمایه‌گذار برای متوازن‌سـازی، موضوعی مهم به شمار می‌آید.

## ۳- روش شناسی و مدل پژوهش

### ۳-۱- روش پژوهش

این پژوهش با توجه به هدف آن مبنی بر ارائه الگوریتمی جهت متوازن‌سازی گسسته‌زمان پرتفوی، جزء پژوهش‌های کاربردی به‌حساب می‌آید. به‌علاوه، از نظر نوع روش، توصیفی پیمایشی بوده و در آن از مدل‌سازی و ابزارهای ریاضی استفاده شده است. همچنین جامعه آماری پژوهش حاضر مجموعه ای از پرتفوهای متشکل از سهام عرضه شده در بورس اوراق بهادار تهران بوده و به منظور پیاده سازی و بررسی نتایج استراتژی ها، پرتفویی واقعی شامل ۱۰ سهم از صنایع مختلف کشور انتخاب و برای افق سرمایه‌گذاری ۳۰ ساله محاسبات آن انجام شده است. مدل ارائه شده در این پژوهش مدلی غیرخطی است و هدف آن بیشینه‌سازی لگاریتم ارزش پرتفوی در انتهای افق سرمایه‌گذاری است.

### ۳-۲- مدل پژوهش و استراتژی‌های متـوازن‌سـازی پرتفوی

به فرض، پرتفویی متشکل از $N$ دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک وجود داشته باشد. دارایی‌های ریسکی را سهام بورس اوراق بهادار در نظر گرفته و محاسبات خود را با فرض معلوم بودن میانگین و انحراف معیار بازده دارایی‌ها و نیز مانا[۲۸] بودن میانگین بازده‌ها انجام می‌دهیم. از طرفی، $N+1$ امین دارایی را به عنوان یک دارایی بدون ریسک که نرخ بازده ثابتی دارد در نظر گرفته و سایر متغیرها را نیز به صورت جدول ۱ تعریف می‌کنیم. همچنین فرض می‌کنیم ارزش اولیه پرتفوی برابر با یک ریال باشد. بازدهی دارایی $N+1$ ام را نیز که یک دارایی بدون ریسک است با نماد $r_f$ نمایش داده و داریم:

(رابطه ۱)

$$\sigma_{N+1} = 0$$

(رابطه ۲)

$$\rho_{(N+1)j} = \rho_{j(N+1)} = 0 \quad \forall j = 1 \text{ to } N$$

در این مقاله قیمت دارایی‌ها در طول زمان از حرکت براونی هندسی[۲۹] پیروی می‌کند و این موضوع در بسیاری از مطالعات صورت گرفته در حوزه ارزش‌گذاری دارایی‌های مالی و ابزارهای مشتقه[۳۰] کاربرد دارد. در حرکت براونی، قیمت دارایی در زمان $t$ را با $S(t)$ نمایش داده و دارای توزیع لگاریتم نرمال[۳۱] می‌باشد. بر این اساس روابط زیر در مورد $S(t)$ برقرار می‌باشد:

(رابطه ۳)

$$E[\ln\left\{\frac{S(t)}{S(0)}\right\}] = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$$

(رابطه ۴)

$$Var[\ln\left\{\frac{S(t)}{S(0)}\right\}] = \sigma^2 t$$

در رابطه (۳)، $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})$ را نرخ رشد ارزش دارایی[۳۲] معرفی کرده و با نماد $\nu$ نمایش می‌دهیم.

**جدول ۱- معرفی متغیرها**

| | |
|---|---|
| $\mu_i$: نرخ بازده مورد انتظار دارایی $i$ ام | $V(t)$: ارزش پرتفوی در زمان $t$ (ریال) |
| $\sigma_i$: انحراف معیار بازدهی دارایی $i$ ام | $\mu_p(t)$: بازدهی مورد انتظار پرتفوی در زمان $t$ |
| $w_i$: وزن سرمایه‌گذاری در دارایی $i$ ام | $\sigma_p(t)$: انحراف معیار بازدهی مورد انتظار پرتفوی در زمان $t$ |
| $T$: افق سرمایه‌گذاری (سال) | $\sigma_{ij}$: کوواریانس میان بازدهی دارایی‌های $i$ و $j$ |
| $\nu_p$: نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی | $\rho_{ij}$: ضریب همبستگی میان بازده دارایی‌های $i$ و $j$ |

**۳-۲-۱- پویایی و رفتار پرتفوی در استراتژی فعالانه**

در این استراتژی که از آن با نام استراتژی بهینه لگاریتمی یاد می‌شود، اوزان دارایی‌های درون پرتفوی به‌طور پیوسته متوازن‌سازی شده تا نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی[۳۳] را در بلندمدت بیشینه کنند. اگر $\tau$ را مدت زمان بین دو متوازن‌سازی متوالی تعریف کنیم، در این استراتژی مقدار $\tau$ عددی بسیار کوچک و نزدیک به صفر خواهد بود. لیون برگر[۳۴] (۱۹۹۸) در مطالعات خود روش انجام این کار را ارائه کرده است. از آنجایی که پرتفوی مدنظر ما از $N+1$ دارایی با اوزان $w_1,...,w_{N+1}$ تشکیل شده است محدودیت زیر را برای وزن دارایی‌ها خواهیم داشت:

(رابطه ۵)

$$\sum_{i=1}^{N+1} w_i = 1$$

حال اگر $V(t)$ را ارزش پرتفوی در زمان $t$ در نظر بگیریم، نرخ بازده آنی پرتفوی[۳۵] برابر است با جمع وزنی نرخ بازده آنی تک‌تک دارایی‌ها:

(رابطه ۶)

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \sum_{i=1}^{N+1} w_i \frac{dS_i(t)}{S_i(t)}$$

و با جایگذاری عبارت معادل با $\frac{dS_i(t)}{S_i(t)}$ درحرکت براونی خواهیم داشت:

(رابطه ۷)

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \sum_{i=1}^{N+1} (w_i\mu_i dt + w_i\sigma_i dz)$$

از طرفی می‌توان رابطه فوق را به شکل حرکت براونی هندسی و به صورت زیر نوشت:

(رابطه ۸)

$$dV(t) = \mu_p V(t)dt + \sigma_p V(t)dz$$

میانگین و واریانس پرتفوی در رابطه بالا نیز، به صورت زیر تعیین می‌شوند:

(رابطه ۹)

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{N+1} w_i\mu_i$$

(رابطه ۱۰)

$$\sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^{N+1} w_i\sigma_{ij}w_j$$

طبق حرکت براونی و با توجه به لم ایتو[۳۶]، ارزش پرتفوی ($V(t)$) و لگاریتم ارزش پرتفوی ($\ln V(t)$) به ترتیب دارای توزیع لگاریتم نرمال و توزیع نرمال بوده (نفتچی[۳۷]، ۲۰۰۰) و روابط زیر برای آن‌ها برقرار خواهد بود:

(رابطه ۱۱)

$$\ln V(t) \sim \phi[\ln V(0) + (\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2})t, \sigma_p^2 t]$$

(رابطه ۱۲)

$$E[V(t)] = e^{\mu_p t}$$

(رابطه ۱۳)

$$Var[V(t)] = e^{2\mu_p t}(e^{\sigma_p^2 t} - 1)$$

(رابطه ۱۴)

$$E[\ln\{V(t)\}] = (\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2})t$$

(رابطه ۱۵)

$$Var[\ln\{V(t)\}] = \sigma_p^2 t$$

در رابطه (۱۴)، $(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2})$ را نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی تعریف کرده و آن را با $\nu_p$ نمایش می‌دهیم. در ادامه این مقاله، لگاریتم ارزش پرتفوی در زمان $t$ را با نماد $\chi(t)$ نمایش داده و داریم:

(رابطه ۱۶)

$$\chi(t) = E[\ln\{V(t)\}] = \nu_p t$$

در استراتژی فعالانه، نرخ رشد ارزش پرتفوی با حل مسأله بهینه‌سازی زیر بیشینه می‌شود (داس[۳۸]، ۲۰۱۴):

(رابطه ۱۷)

$$\underset{w}{\text{maximize}}\ v_p$$
$$\text{subject to } \sum_{i=1}^{N+1} w_i = 1$$

چنانچه مسأله فوق با استفاده از ضرایب لاگرانژ[39] حل شود، بردار $w$ در رابطه زیر صدق خواهد کرد (لیون برگر، ۱۹۹۸):

(رابطه ۱۸)

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_{ij} w_j = \mu_i - r_f \qquad \forall j \in \{1,...,N\}$$

بنابراین به ازای هر دارایی ریسکی یک معادله به صورت بالا وجود داشته و در مجموع دستگاهی با $N$ معادله و $N$ مجهول ($w$) تشکیل خواهد شد. پس از حل این دستگاه، مقادیر $w$ به ازای $i = 1,...,N$ محاسبه شده و وزن دارایی بدون ریسک نیز با کمک رابطه $\sum_{i=1}^{N+1} w_i = 1$ محاسبه می‌شود.

### ۳-۲-۲- پویایی و رفتار پرتفوی در استراتژی منفعلانه

با بررسی دقیق نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی در رابطه (۱۴)، ممکن است شرایطی به وجود آید که عدم متوازن‌سازی همزمان با کاهش میانگین مؤثر ($\mu_p$)، کاهش واریانس ($\sigma_p^2$) را نیز به همراه داشته باشد. حال اگر در یک بازه زمانی، واریانس پرتفوی کاهش بیشتری را نسبت به میانگین آن داشته باشد می‌تواند موجب افزایش نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی شده و در طول این مدت، سرمایه‌گذار می‌تواند با خودداری از اجرای متوازن‌سازی فعالانه بازدهی بالاتری را در مقایسه با پیاده‌سازی آن به دست آورد. در این بخش به دنبال بررسی ماهیت رشد ارزش پرتفوی در شرایطی هستیم که پرتفویی با اوزان بهینه $w$ تشکیل شده و تا پایان افق زمانی سرمایه‌گذار، متوازن‌سازی بر روی آن صورت نمی‌گیرد. در این استراتژی فاصله زمانی بین دو متوازن‌سازی متوالی $\tau = \infty$ خواهد بود. از این پس برای ساده‌سازی فهم روابط، از اندیس $\infty$ برای تمامی روابط مربوط به استراتژی منفعلانه استفاده خواهد شد. طبق روش فنتون-ویلکینسون[40]، جمع تعدادی متغیر با توزیع لگاریتم نرمال، خود متغیری با همین توزیع می‌باشد. بنابراین رابطه واریانس لگاریتم رشد پرتفوی به‌صورت زیر خواهد بود:

(رابطه ۱۹)

$$\Upsilon^{\infty} = Var[\ln(V^{\infty}(t))] = \ln(1 + \frac{Var[V^{\infty}(t)]}{E[V^{\infty}(t)]^2})$$

و در رابطه فوق مقادیر $Var[V^{\infty}(t)]$ و $E[V^{\infty}(t)]$ به صورت زیر محاسبه خواهند شد (داس، ۲۰۱۴):

(رابطه ۲۰)

$$Var[V^{\infty}(t)] = \sum_{i,j=1}^{N+1} w_i w_j e^{(\mu_i+\mu_j)t} (e^{\sigma_{ij}t} - 1)$$

(رابطه ۲۱)

$$E[V^{\infty}(t)] = \sum_{i=1}^{N+1} w_i e^{\mu_i t}$$

از طرفی، می‌توان با استفاده از خواص توزیع لگاریتم نرمال و رابطه (۲۱)، لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی منفعلانه را نیز به صورت زیر محاسبه کرد:

(رابطه ۲۲)

$$\chi^{\infty}(t) = E[\ln(V^{\infty}(t))]$$
$$= \ln(\sum_{i=1}^{N+1} w_i e^{\mu_i t}) - \frac{1}{2}\Upsilon^{\infty}(t)$$

رابطه (۲۲) تابع مطلوبیت مورد انتظار سرمایه‌گذار در استراتژی منفعلانه را نشان می‌دهد. یکی دیگر از نکات فرض لگاریتم نرمال بودن روش فنتون، ماهیت مشابه رشد ارزش پرتفوی در دو استراتژی منفعلانه و فعالانه است. با مقایسه دو رابطه (۲۲) و (۱۶)، نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی در استراتژی منفعلانه ($v_p^{\infty}$) برابر خواهد بود با:

(رابطه ۲۳)

$$v_p^{\infty}(t) = \frac{\chi^{\infty}(t)}{t}$$

$$= \frac{1}{t}\ln(\sum_{i=1}^{N+1} w_i e^{\mu_i t}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{t}Var[\ln(V^{\infty}(t))])$$

$$= \mu_p^{\infty} - \frac{\sigma_p^{\infty 2}}{2}$$

که در آن میانگین و واریانس پرتفویی با استراتژی منفعلانه به ترتیب برابرند با:

(رابطه ۲۴)

$$\mu_p^{\infty}(t) = \frac{1}{t}\ln(\sum_{i=1}^{N+1} w_i e^{\mu_i t})$$

(رابطه ۲۵)

$$\sigma_p^{\infty 2}(t) = \frac{1}{t}Var[\ln(V^{\infty}(t))]$$

با مقایسه این روابط با روابط مشابه آن‌ها در استراتژی فعالانه مشاهده می‌شود که میانگین و انحراف معیار بازدهی پرتفوی در استراتژی منفعلانه در طول زمان متغیر بوده در حالی که این مقادیر در استراتژی فعالانه ثابت می‌باشند. همچنین، مشتق لگاریتم ارزش پرتفوی نسبت به زمان را «نرخ رشد آنی پرتفوی[41]» نامیده و از نماد $\xi$ برای نمایش آن استفاده می‌کنیم. این نرخ رشد برای استراتژی‌های فعالانه و منفعلانه به ترتیب برابرند با:

(رابطه ۲۶)

$$\xi = \frac{d\chi(t)}{dt} = v_p$$

(رابطه ۲۷)

$$\xi^{\infty}(t) = \frac{d\chi^{\infty}(t)}{dt}$$

نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی، میانگین رشد ارزش پرتفوی برای یک دوره زمانی مشخص است اما نرخ رشد آنی پرتفوی در هر مقطعی از زمان برابر با رشد حاصل شده در یک بازه زمانی بسیار کوچک است. با توجه به رابطه (۲۶) می‌توان نتیجه گرفت که این دو مقدار در استراتژی فعالانه مستقل از زمان و برابر با یکدیگر هستند.

### ۳-۲-۳- استراتژی ترکیبی[42]: تلفیقی از دو استراتژی فعالانه و منفعلانه

در این استراتژی، با تلاقی دادن نمودارهای لگاریتم ارزش پرتفوی در دو استراتژی فعالانه و منفعلانه، زمانی را با عنوان زمان متوازن‌سازی ترکیبی محاسبه کرده و در این لحظه می‌بایست تغییر استراتژی از منفعلانه به فعالانه صورت بگیرد. این زمان محاسبه شده، می‌بایست تا انتهای عمر پرتفوی به عنوان فاصله زمانی بین متوازن‌سازی‌ها در نظر گرفته شود. فاصله زمانی سپری‌شده از ابتدای تشکیل پرتفوی تا اولین مرحله از متوازن‌سازی را زمان متوازن‌سازی ترکیبی ($\tau_h$) می‌نامیم. چنانچه شرط زیر در بازه زمانی ($0,\tau_h$) وجود داشته باشد، استراتژی منفعلانه مطلوبیت بالاتری را در این بازه برای سرمایه‌گذار به همراه خواهد داشت:

(رابطه ۲۸)

$$\exists \tau_h \text{ s.t. } \chi^{\infty}(t) > v_p t, \ \forall t \in (0,\tau_h)$$

در این حالت سرمایه‌گذار تا زمانی به اجرای استراتژی منفعلانه خواهد پرداخت که تابع مطلوبیت وی در این استراتژی کوچک‌تر یا مساوی با مطلوبیت وی در استراتژی فعالانه شود. با فرض عدم وجود هزینه معاملات در این مقاله، اولین زمان متوازن‌سازی ($\tau_h$) از طریق تلاقی دو رابطه (۱۶) و (۲۲) به دست می‌آید:

(رابطه ۲۹)

$$\chi^{\infty}(\tau_h) = \chi(\tau_h) = v_p \tau_h, \quad \tau_h > 0$$

چنانچه رابطه فوق جواب داشته باشد، به دلیل ماهیت غیرخطی $\chi^{\infty}(\tau_h)$ حل آن کمی دشوار است. اما می‌توان آن را به شیوه عددگذاری حل کرده و $\tau_h$ را

محاسبه کرد. الگوریتم شماره ۱ که در پیوست مقاله ارائه شده است، مراحل محاسبه $\tau_h$ را برای مجموعه‌ای از پارامترهای معین نشان می‌دهد. شیوه محاسبه در این الگوریتم تعیین مدت زمانی است که در آن لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی منفعلانه همواره بیشتر از فعالانه است.

اکنون به معرفی سایر نقاط متوازن‌سازی تا انتهای عمر پرتفوی خواهیم پرداخت. اگر زمان متوازن‌سازی $\tau_h$ وجود داشته باشد آنگاه $i\,\tau_h$ ($i \in \mathbb{N}$) سایر زمان‌های متوازن‌سازی در استراتژی متوازن‌سازی ترکیبی را نشان خواهد داد. اگر زمان دلخواهی مانند $t$ را به صورت $t = k\,\tau_h + t'$ تعریف کنیم تابع لگاریتم ارزش پرتفوی برای آن به صورت زیر محاسبه خواهد شد (داس و گویال، ۲۰۱۴):

(رابطه ۳۰)

$$\chi^{\tau_h}(t) = \begin{cases} \nu_p t & \text{if } \tau_h = 0 \\ k\chi^{\infty}(\tau_h) + \chi^{\infty}(t') & \text{otherwise} \end{cases}$$

در رابطه فوق چنانچه $\tau_h$ وجود نداشته باشد نوع استراتژی فعالانه بوده و لذا رابطه اول ارائه شده در آن نیز صحیح خواهد بود. در نتیجه طبق این رابطه، در هر استراتژی ترکیبی با تناوب متوازن‌سازی $\tau_h$، لگاریتم ارزش پرتفوی در نقاط متوازن‌سازی بعدی برابر است با حاصل‌ضرب لگاریتم ارزش پرتفوی در اولین نقطه متوازن‌سازی، در تعداد دفعات متوازن‌سازی. علاوه بر این، رشد پرتفوی پس از آخرین نقطه متوازن‌سازی و تا نقطه دیگری مانند $t'$ ($t' < \tau_h$) نیز به‌صورت منفعلانه خواهد بود. در نتیجه اگر در یک استراتژی ترکیبی با تناوب $\tau_h$، مقدار $\chi^{\infty}$ برای هر نقطه‌ای از بازه $\left[0, \tau_h\right]$ محاسبه شود می‌توان $\chi^{\tau_h}$ را با کمک آن و برای هر نقطه دلخواهی تا پایان عمر پرتفوی محاسبه کرد.

### ۳-۲-۴- شرط وجود استراتژی ترکیبی

در این بخش شرط وجود زمان متوازن‌سازی ترکیبی بررسی می‌شود. ممکن است این سؤال در ذهن یک سرمایه‌گذار پیش آید که آیا می‌توان در ابتدای عمر پرتفوی به پیاده‌سازی استراتژی منفعلانه پرداخت یا خیر؟ چنانچه در یک افق زمانی مشخص، $\tau_H$ وجود نداشته باشد اجرای استراتژی ترکیبی امکان‌پذیر نبوده و می‌بایست در کل افق زمانی، از استراتژی فعالانه استفاده شود. در این حالت سرمایه-گذار باید برای بیشینه‌سازی تابع مطلوبیت لگاریتمی خود به اجرای متوازن‌سازی‌های پی‌درپی بپردازد. برقراری دو شرط زیر برای وجود $\tau_H$ الزامی است:

(رابطه ۳۱)

$$\chi^{\infty}(\tau_h - d\tau_h) > \chi(\tau_h - d\tau_h)$$

where:

$$0 < d\tau_h < \tau_h \text{ and } d\tau_h \to 0$$

(رابطه ۳۲)

$$\chi^{\infty}(\tau_h + d\tau_h) < \chi(\tau_h + d\tau_h)$$

where:

$$0 < d\tau_h < \tau_h \text{ and } d\tau_h \to 0$$

طبق رابطه (۱۶)، به دلیل اینکه مشتق تابع $\chi(t)$ نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی ($\nu_p$) بوده و مقداری مثبت است، این تابع برای $t \geq 0$ تابعی اکیداً صعودی و با شیب ثابت است. از طرفی در زمان $t = 0$ عبارت $\chi(t) = \chi^{\infty}(t) = \ln\left[V(0)\right] = 0$ برقرار می‌باشد. بنابراین، اگر تابع $\chi^{\infty}(t)$ برای پارامترهای ورودی مسأله تابعی اکیداً نزولی باشد، رابطه (۳۱) برای $t > 0$ برقرار نمی‌باشد. اما اگر این تابع، اکیداً صعودی بوده و شیب آن بیش از $\nu_p$ باشد رابطه (۳۱) برقرار بوده و سرمایه-گذار می‌تواند به اجرای استراتژی منفعلانه بپردازد. به بیانی دیگر، استراتژی منفعلانه زمانی در ابتدای عمر پرتفوی وجود دارد که نرخ رشد آنی پرتفوی برای این استراتژی در زمان صفر بیشتر از استراتژی دیگر باشد. اما وجود چنین شرطی، کافی نیست زیرا در زمان

$t = 0$ نرخ رشد آنی پرتفوی برای هر دو استراتژی برابر می‌باشد:

(رابطه ۳۳)

$$\xi^{\infty}(0) = \xi(0) = \nu_p$$

تاکنون به بیان دو مورد از ویژگی‌های نرخ رشد آنی پرداخته شده است. اولاً، این مقدار در استراتژی فعالانه ثابت و برابر با $\nu_p$ است و دوما، مقدار آن در زمان صفر برای هر دو استراتژی برابر خواهد بود. حال بر اساس این دو ویژگی و با استفاده از الگوریتم ۲ (که در پیوست ارائه شده است) می‌توان شرط وجود این استراتژی را در زمان صفر و با توجه به خروجی «بلی-خیر» آن بررسی کرد. در این الگوریتم مقادیر $X'$، $X''$، $Y'$ و $Y''$ در زمان صفر برابرند با:

(رابطه ۳۴)

$$X'(0) = \sum_{i=1}^{N+1} w_i \mu_i$$

(رابطه ۳۵)

$$Y'(0) = \sum_{i,j=1}^{N+1} w_i w_j \sigma_{ij}$$

(رابطه ۳۶)

$$X''(0) = \sum_{i=1}^{N+1} w_i {\mu_i}^2$$

(رابطه ۳۷)

$$Y''(0) = \sum_{i,j=1}^{N+1} w_i w_j \sigma_{ij} [2(\mu_i + \mu_j) + \sigma_{ij}]$$

## ۴- یافته‌های پژوهش

پرتفوی منتخب در این پژوهش، پرتفویی واقعی متشکل از ۱۰ سهم و یک دارایی بدون ریسک با نرخ بازده ۱۵ درصدی است. با استفاده از سری زمانی تعدیل شده قیمت سهام از ابتدای سال ۱۳۹۲ تا انتهای سال ۱۳۹۴ و نیز مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای[۴۳]، مقادیر بازدهی مورد انتظار سهام و انحراف معیار آن به عنوان پارامترهای ورودی به مدل محاسبه و در جدول شماره (۲) ارائه شده است. در این جدول دارایی یازدهم همان دارایی بدون ریسک است. همچنین، تمامی محاسبات با فرض انتخاب افق سرمایه گذاری ۳۰ ساله انجام شده است. پس از حل مدل معرفی شده در رابطه (۱۷) و محاسبه اوزان بهینه دارایی ها، از این اوزان در سایر استراتژی‌ها به منظور بررسی رفتار پرتفوی و محاسبه مطلوبیت نهایی سرمایه گذار استفاده خواهد شد.

**جدول ۲- بازدهی مورد انتظار و انحراف معیار بازدهی سهام**

| ردیف | نرخ بازده مورد انتظار | انحراف معیار بازدهی |
|---|---|---|
| 1 | 0.052 | 0.185 |
| 2 | 0.163 | 0.094 |
| 3 | 0.169 | 0.204 |
| 4 | 0.162 | 0.168 |
| 5 | 0.185 | 0.440 |
| 6 | 0.169 | 0.312 |
| 7 | 0.161 | 0.137 |
| 8 | 0.172 | 0.250 |
| 9 | 0.154 | 0.054 |
| 10 | 0.162 | 0.159 |
| 11 | 0.150 | 0 |

منبع: محاسبات تحقیق

### ۴-۱- پیاده سازی استراتژی فعالانه و محاسبه وزن بهینه دارایی‌ها

در این استراتژی، وزن بهینه دارایی‌ها پس از حل مدل رابطه (۱۷) به صورت جدول شماره (۳) محاسبه خواهند شد. مطابق این جدول، برای دارایی‌هایی که وزن منفی دارند در طول عمر پرتفوی فروش استقراضی[۴۴] صورت می‌گیرد. اگر این اوزان همواره در طول عمر پرتفوی برای دارایی‌ها برقرار باشند لگاریتم ارزش پرتفوی در پایان مدت ۳۰ سال به بیشینه مقدار ممکن خود خواهد رسید. با محاسبه وزن بهینه دارایی‌ها میانگین بازدهی، انحراف معیار بازدهی و نرخ رشد لگاریتمی بهینه برای پرتفوی در طول زمان ثابت و مقادیر آن به صورت جدول شماره (۴) خواهد بود.

**جدول ۳- وزن بهینه سهام در پرتفوی**

| ردیف | نماد سهم | وزن بهینه (w) |
|---|---|---|
| 1 | پکرمان | -7.784 |
| 2 | پارسان | 3.713 |
| 3 | خودرو | -0.065 |
| 4 | سفارس | 4.120 |
| 5 | دکیمی | -0.118 |
| 6 | غبشهر | -0.671 |
| 7 | فملی | -1.789 |
| 8 | کاذر | 0.488 |
| 9 | همراه | -7.695 |
| 10 | وصنعت | 3.250 |
| 11 | دارایی بدون ریسک | 7.551 |

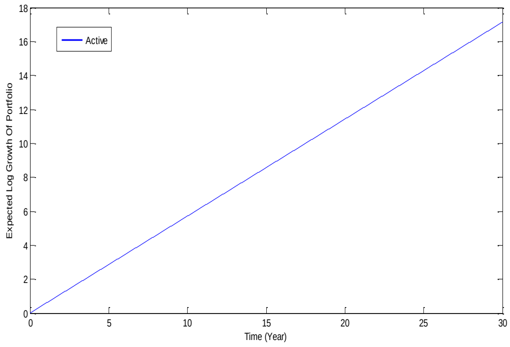
منبع: محاسبات تحقیق

**جدول ۴- میانگین بازدهی، انحراف معیار بازدهی و نرخ رشد لگاریتمی بهینه**

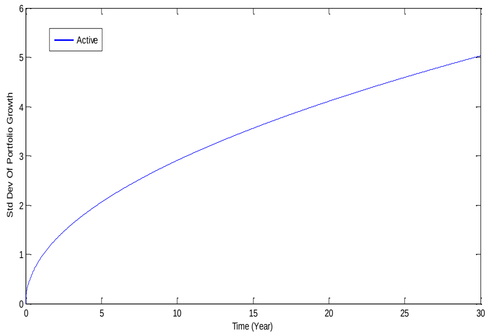
| ردیف | پارامتر | نماد | مقدار |
|---|---|---|---|
| 1 | میانگین بازدهی پرتفوی | $\mu_p$ | 0.992 |
| 2 | انحراف معیار بازدهی پرتفوی | $\sigma_p$ | 0.842 |
| 3 | نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی | $v_p$ | 0.571 |

منبع: محاسبات تحقیق

شکل (۱) نشان‌دهنده تغییرات مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی در طول عمر آن است. همان‌طور که مشاهده می‌شود این نمودار دارای شیب ثابت بوده و چنانچه سرمایه‌گذار فقط از استراتژی فعالانه استفاده کند در پایان عمر پرتفوی مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی نهایی برابر با ۱۷,۱۳ خواهد بود. شکل (۲) نیز نشان‌دهنده انحراف معیار لگاریتم ارزش پرتفوی در طول زمان است. همان‌طور که مشاهده می‌شود این مقدار برای سال‌های ابتدایی عمر پرتفوی با نرخ بیشتری نسبت به سال‌های آتی رشد خواهد کرد.




**شکل ۱- لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی فعالانه**

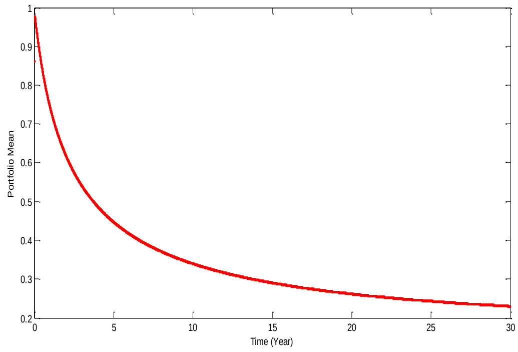



**شکل ۲- انحراف معیار لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی فعالانه**

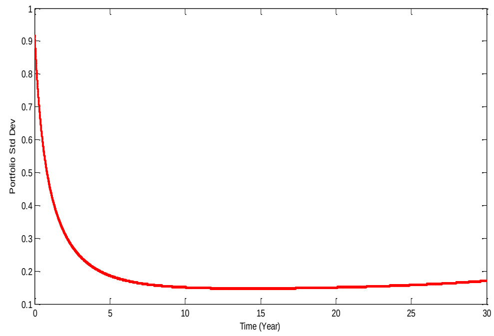
### ۲-۴- پیاده‌سازی استراتژی منفعلانه

در استراتژی منفعلانه مقادیر میانگین، انحراف معیار و نرخ رشد لگاریتمی بهینه برای پرتفوی بر خلاف استراتژی فعالانه، در طول عمر پرتفوی متغیر بوده و نمودار تغییرات آن به صورت شکل‌های (۳) تا (۵) می‌باشد.

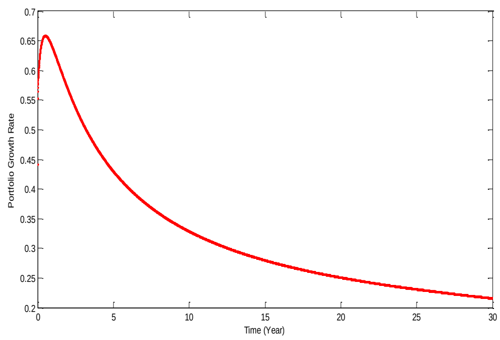
در این استراتژی با انتخاب $\tau = \infty$، تغییرات مقادیر لگاریتم ارزش پرتفوی و انحراف معیار آن در طول عمر پرتفوی مطابق با شکل‌های (۶) و (۷) خواهند بود. مطابق شکل (۶) چنانچه سرمایه‌گذار از استراتژی منفعلانه استفاده کند در پایان عمر ۳۰ ساله پرتفوی، مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی نهایی او برابر با ۶,۴۸ خواهد بود.



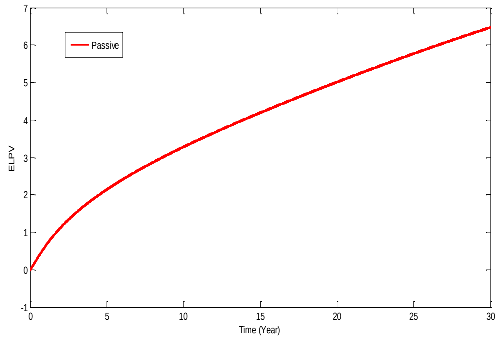

**شکل ۳- میانگین بازدهی پرتفوی در دو استراتژی فعالانه و منفعلانه**



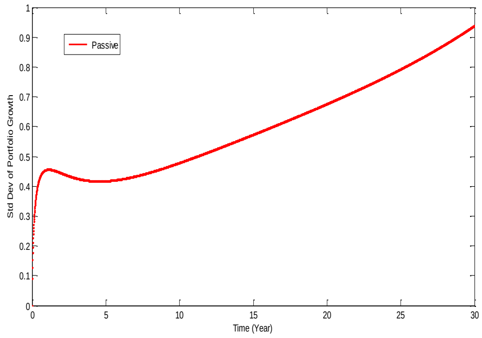

**شکل ۴- انحراف معیار بازدهی پرتفوی در دو استراتژی فعالانه و منفعلانه**



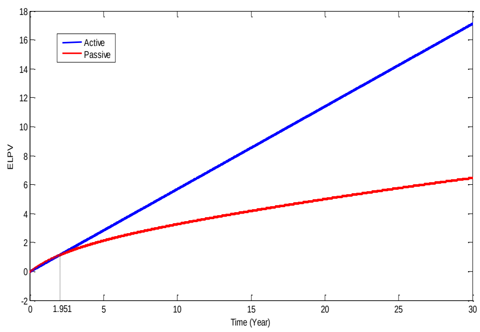

**شکل ۵- نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی در دو استراتژی فعالانه و منفعلانه**




**شکل ۶- لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی منفعلانه**



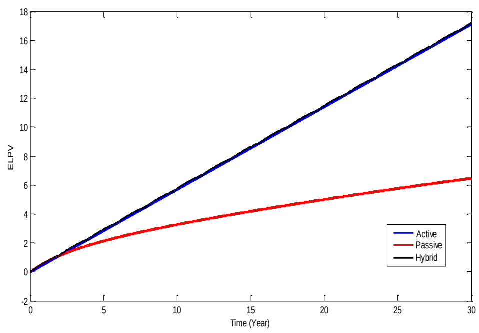

**شکل ۷- انحراف معیار لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی منفعلانه**



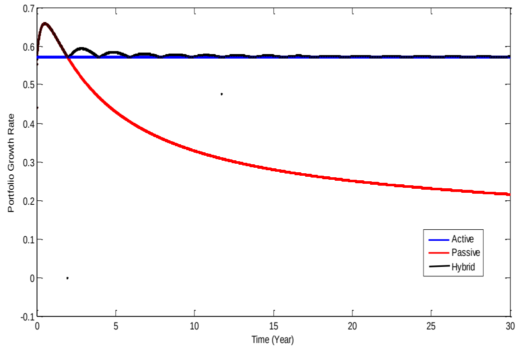

**شکل ۸- لگاریتم ارزش پرتفوی در دو استراتژی فعالانه و منفعلانه**

### ۴-۳- پیاده‌سازی استراتژی ترکیبی

به منظور محاسبه زمان متوازن‌سازی ترکیبی ابتدا بایستی با پیاده‌سازی الگوریتم شماره ۲ (پیوست) وجود یا عدم وجود این استراتژی در ابتدای عمر پرتفوی را بررسی کرد. پاسخ این الگوریتم برای پرتفوی معرفی شده، وجود استراتژی ترکیبی را تأیید می‌کند. با پیاده‌سازی الگوریتم شماره ۱ (پیوست) اولین زمان متوازن‌سازی برابر با $\tau_h =$ ۱٫۹۵۱ محاسبه می‌شود. این زمان از تقاطع مقادیر لگاریتم ارزش پرتفوی برای دو استراتژی فعالانه و منفعلانه در طول زمان محاسبه شده و در شکل (۸) نمایش داده شده است. برای محاسبه سایر زمان‌های متوازن‌سازی کافی است فواصل زمانی ۱٫۹۵۱ سال را تا انتهای عمر پرتفوی ادامه دهیم. در نتیجه سایر زمان‌های متوازن‌سازی نیز به صورت $i\,\tau_h = \{1.951,\ 3.902,\ ...,29.265\}$ خواهد بود. همان‌طور که در شکل (۹) مشاهده می‌شود مقدار لگاریتم ارزش پرتفوی نهایی در پایان عمر پرتفوی و در استراتژی ترکیبی برابر با ۱۷٫۱۹ می‌باشد. نمودار نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی در استراتژی ترکیبی نیز در شکل (۱۰) نمایش داده شده است.




**شکل ۹- لگاریتم ارزش پرتفوی در استراتژی‌های فعالانه، منفعلانه و ترکیبی**




**شکل ۱۰- نرخ رشد لگاریتمی پرتفوی در استراتژی‌های فعالانه، منفعلانه و ترکیبی**

**جدول ۵- مقدار مطلوبیت نهایی در استراتژی‌های مختلف**

| ردیف | نوع استراتژی | تناوب متوازن‌سازی | لگاریتم ارزش پرتفوی نهایی |
|---|---|---|---|
| ۱ | فعالانه | 0.02 | 17.132 |
| ۲ | منفعلانه | 30 | 6.480 |
| ۳ | ترکیبی | 1.951 | 17.192 |

منبع: محاسبات تحقیق

### ۵- نتیجه‌گیری و بحث

هدف سرمایه‌گذار در روش بهینه لگاریتمی، بیشینه‌سازی مطلوبیت خود در انتهای افق سرمایه‌گذاری با پیاده‌سازی متوازن‌سازی پیوسته‌زمان است. تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار در این استراتژی به صورت لگاریتم ارزش پرتفوی تعریف شده و اوزان بهینه محاسبه شده برای دارایی‌ها زمانی تابع مطلوبیت او را بیشینه می‌کند که افق سرمایه‌گذاری نامحدود باشد. اما پیاده‌سازی استراتژی پیوسته‌زمان عملاً غیرممکن بوده و از طرفی، افق‌های زمانی نیز معمولاً محدود می‌باشند. در نتیجه استفاده از این اوزان برای دارایی‌ها در روشی غیر از استراتژی فعالانه بهینه نخواهد بود. بنابراین در این مقاله به معرفی روشی پرداخته شد که بتوان با استفاده از این اوزان و با متوازن‌سازی‌های کمتر در طول افق زمانی، به

مطلوبیت حاصل از پیاده‌سازی روش بهینه لگاریتمی دست یافت. مزیت اصلی این روش حذف متوازن‌سازی‌های پی‌درپی و نیز هزینه معاملات اضافه در عین حفظ مطلوبیت در مقایسه با استراتژی پیوسته‌زمان است. بدین منظور به بررسی دو موضوع در این مقاله پرداخته شد. موضوع اول، پیاده‌سازی استراتژی منفعلانه با تناوبی برابر با افق زمانی سرمایه-گذار و دیگری، پیاده‌سازی یک استراتژی ترکیبی با تناوبی کمتر از استراتژی فعالانه. روابط مربوط به تابع مطلوبیت در هر دو استراتژی محاسبه و بر روی پرتفویی با ۱۱ دارایی شامل ۱۰ سهم و یک دارایی بدون ریسک پیاده‌سازی شد. نتایج نشان داد که پیاده‌سازی استراتژی منفعلانه بر روی پرتفوی، مطلوبیت نهایی سرمایه گذار را در مقایسه با استراتژی فعالانه کاهش می‌دهد. این در حالی است که پیاده-سازی استراتژی ترکیبی با تناوبی کمتر از استراتژی فعالانه مطلوبیت آن را مقداری بهبود خواهد داد. با مقایسه مقادیر تابع مطلوبیت استراتژی های مختلف در جدول (۵) مشاهده می شود که در صورت عدم در نظر گرفتن هزینه معاملات، استراتژی ترکیبی همواره عملکرد بهتری نسبت به دو استراتژی دیگر خواهد داشت. از سوی دیگر، مزیت بکارگیری این استراتژی برای متوازن سازی در شرایط وجود هزینه معاملات، بیشتر نمایان خواهد چرا که در این حالت تفاوت مطلوبیت بین استراتژی های فعالانه و ترکیبی بیشتر از مقدار فعلی آن در جدول (۵) خواهد بود. از طرفی، در این شرایط، مقایسه بین استراتژی‌های فعالانه و منفعلانه امکان‌پذیر نبوده و انتخاب بهترین نوع از میان آنها، بستگی به نوع تابع هزینه معاملات دارد. با توجه به نتایج این پژوهش، به سرمایه گذاران پیشنهاد می-شود با تسهیل فرآیند متوازن‌سازی از طریق جایگزین کردن استراتژی ترکیبی به جای استراتژی فعلانه، هم هزینه ناشی از معاملات پی در پی را کاهش دهند و هم به مطلوبیتی بیشتری نسبت به پیاده سازی استراتژی فعالانه که چیزی جز رسیدن به ارزش بیشتر پرتفوی در انتهای افق سرمایه‌گذاری نیست، دست یابند.

## فهرست منابع


* زندیه، مصطفی و امیری، مقصود (۱۳۹۲). «تأثیر متوازن‌سازی مجدد مدل چند دوره‌ای پرتفوی سرمایه‌گذاری، بر روی بازدهی پرتفوی، با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، موسسه آموزش عالی غیرانتفاعی و غیردولتی رجاء قزوین.
* فدایی نژاد، محمد اسماعیل و بنائیان، حمید (۱۳۸۹). «طراحی مدل متوازن‌سازی مجدد پرتفوی سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی بر مبنای رویکرد تصمیم‌گیری فازی»، هشتمین کنفرانس بین‌المللی مدیریت، گروه پژوهشی آریانا.
* Algoet, P. Cover, T. (1988). "Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment". The Annals of Probability
* Arnott, R. Lovell, R. (1993). "Rebalancing: Why? When? How often?". Journal of investing (۱)
* Bernstein, W. "The rebalancing bonus: Theory and practice". Available At: http://www.efficientfrontier.com/ef/996/rebal.htm.
* Branger, N. Breuer, B. Schlag, C. (2010). "Discrete-time implementation of continuous-time portfolio strategies" European Journal of Finance 16 (2)
* Calvet, L. Campbell, J. Sodini, P. (2009)."Fight or flight? Portfolio rebalancing by individual investors". Quarterly Journal of Economics 124 (1)
* Collins, P. Stampfli, J. (2005). "Risk, return and rebalancing". Tech. rep., Schultz Collins Lawson Chambers, Inc.
* Das, S. Goyal, M. (2014). "Discrete-Time Log-Optimal Portfolio Rebalancing: A Scalable Efficient Algorithm". IEEE Computational Intelligence for Financial Engineering and Economics
* Fenton, L. (1960). "The sum of log-normal probability distributions in scatter

transmission systems". Communications Systems, IRE Transactions on 8 (1)
* GyRfi, L. UrbN, A. Vajda, I. (2007). "Kernel-based semi-log-optimal empirical portfolio selection strategies". International Journal of Theoretical and Applied Finance (IJTAF) 10 (03)
* Hull, J. (2011). "Options, Futures, and Other Derivatives". Prentice Hall, New Jersey
* Johnson, B. (2010). "Algorithmic trading & DMA". 4Myeloma Press.
* Kritzman, S. Page, S. (2009). "Optimal rebalancing: a scalable solution". Journal of Investment Management 7 (1)
* Liu, J. Longstaff, F. Pan, J. (2003). "Dynamic asset allocation with event risk". Journal of Finance
* Luenberger, D. (1988). "Investment science". Oxford Univ. Press, New York
* Masters, S. (2003). "Rules for rebalancing". Journal of Portfolio Management
* Merton, R. (1971). "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model". Journal of Economic Theory 3 (4)
* Neftci, S. (2000). "An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives". Advanced Finance, Academic Press, London
* Sun, W. Fan, A. Chen, L. Schouwenaars, T. Albota, M. (2006). "Using dynamic programming to optimally rebalance portfolios". The Journal of Trading 1 (2)
* Thompson, J. "What history tells us better to have rebalanced regularly than not at all". Financial Planning
* Tokat, Y. "Portfolio rebalancing in theory and practice". Journal of Investing.

## یادداشت‌ها

1. Algorithmic Trading Systems
2. Johnson
3. Portfolio Rebalancing
4. Transaction Costs
5. Das and Goyal
6. Log-Optimal Approach
7. Expected Log of Portfolio Value
8. از این پس منظور از «لگاریتم ارزش پرتفوی» همان «لگاریتم ارزش مورد انتظار پرتفوی» است.
9. از این پس منظور از استراتژی منفعلانه همان متوازن‌سازی گسسته زمان با تناوب متوازن سازی صفر است.
10. Collins
11. Rebalancing To Allowed Range
12. Threshold Rebalancing
13. Calvet
14. Losing Stocks
15. Winning Stocks
16. Arnott
17. Lovell
18. Thompson
19. Bernstein
20. Masters
21. Merton
22. Algoet
23. Cover
24. Liu
25. Sun
26. Kritzman
27. Branger
28. Stationary
29. Geometric Bronian Motion
30. Derivatives
31. Log-Normal
32. Asset Growth Rate
33. Growth Rate of Log of Portfolio Return
34. Luenberger
35. Instantaneous Rate of Return of Portfolio
36. Ito’s Lemma
37. Neftci
38. Das
39. Lagrange Multipliers
40. Fenton-Wilkinson Approach
41. Expected Instantaneous Portfolio Growth
42. Hybrid Rebalancing Strategy
43. CAPM
44. Short Sell

## پیوست

**الگوریتم شماره ۱ - مراحل محاسبه اولین زمان متوازن‌سازی ( $\tau_h$ )**

Require: $\mu, S, r_f, N, T, \delta T$
$\tau_c \leftarrow 0$
$[v_p, w, \mu] \leftarrow ComputeLogOptimalParams(\mu, S, r_f, N)$
if !IsPassiveStrategyPossible(w,$\mu$,S) then
    return $\tau_c$
end if
$\chi^\infty \leftarrow 0, \chi \leftarrow 0$
for t=0 to T by $\delta$T do
    $X \leftarrow 0,\ Y \leftarrow 0$
    for i=1 to N+1 do
        $X \leftarrow X + w[i]e^{\mu[i]t}$
        for j=1 to N+1 do
            $Y \leftarrow Y + w[i]w[j]e^{(\mu[i]+\mu[j])t}(e^{\sigma[i,j]t}-1)$
        end for
    end for
    $\chi^\infty \leftarrow \ln(X) - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{Y}{X^2})$
    $\chi \leftarrow v_p t$
    if $\chi^\infty < \chi$ then
        return $\tau_c \leftarrow t - \delta T$
    end if
end for
return $\tau_c$

**الگوریتم شماره ۲- شرط وجود استراتژی ترکیبی**

Require: $w, \mu, S, N$
$X' \leftarrow 0,\ X'' \leftarrow 0,\ Y' \leftarrow 0,\ Y'' \leftarrow 0$
for i=1 to N+1 do
    $X' \leftarrow X' + w[i]\mu[i]$
    $X'' \leftarrow X'' + w[i]\mu[i]^2$
    for j=1 to N+1 do
        $Y' \leftarrow Y' + w[i]w[j]\sigma[i,j]$
        $Y'' \leftarrow Y'' + w[i]w[j]\sigma[i,j](2(\mu[i]+\mu[j])+\sigma[i,j])$
    end for
end for
if $(X''-X'^2)-\frac{1}{2}(Y''-Y'^2)+2X'Y' \geq 0$ then
    return true
else
    return false
end if