فصلنامه علمی پژوهشی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
سال دوازدهم، شماره چهل‌ویکم
بهار ۱۳۹۸

بهینه سازی پرتفوی از طریق ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) تحت فرایند واریانس گاما (VG)

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۲/۳۰ تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۶/۱۵

مصطفی حیدری هراتمه[1]

چکیده

در روش های قراردادی بهینه سازی پرتفوی ، پویایی قیمت ابزار مالی با کاپیولای گوسی[1] شرح داده می شود. در بهینه سازی با روش GC ، بدون در نظر گرفتن چولگی و کشیدگی نرخ بازدهی سرمایه، CVaR بهینهٔ پرتفوی کمتر از مقدار واقع آن برآورد می شود. در این تحقیق، با معرفی فرایند های لوی[2] راهی برای بهینه سازی پرتفوی ابداع و ارائه می گردد. به نحوی که در این روش، به جای GC، بر پویایی قیمت لگاریتمی دارایی ها با تابع کاپیولا ، واریانس گاما (VGC) تمرکز دارد. با مطالعه موردی که بر روی شاخص های بازار سهام ایران انجام شد، بهترین موقعیت های کم ریسک شاخص کل، شاخص بازار و شاخص صنعت با تابع عملکرد CVaR تحت مدل VG محاسبه گردید. نتایج نشان میدهد که:

الف) CVaR با کاپیولای گوسی، میزان ریسک پرتفوی را کمتر از مقدار واقعی آن نشان می دهد.

ب) پرتفوی بهینه، VaR و CVaR وقتی هر بار یک پارامتر از چولگی یا کشیدگی نمونه تغییر می کند، پایدار می مانند اما پرتفوی بهینه با افزایش یا کاهش میانگین نمونه به طور معنی داری تغییر می کند.

ج) کاپیولای متفاوت، CVaR متفاوتی ایجاد می کند

د) در ساختار بهینه‌سازی پرتفوی، کشیدگی و دم کلفت بودن (fat-tailedness) دارای اهمیت بسیار زیادی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: پرتفوی " , " CVaR" , "واریانس گاما" , "کاپیولا" , "مونت کارلو.

۱- هیت علمی دانشگاه ازاداسلامی، واحد نراق، ایران. heidarimu@yahoo.com

۱- مقدمه

از زمانی که مارکوویتز تحقیق خود را (که در آن ساختار مدیریت میانگین/ واریانس ریسک را در سال ۱۹۵۲ معرفی نموده بود) منتشر کرد، تحقیقات تئوری و تجربی بسیاری دربارۀ بهینه سازی پرتفوی با توابع مطلوبیت [۳] و محدودیت ها و سنجه های گوناگون ریسک انجام شده است.

طرح کلی در این تحقیق بدین شرح است ابتدا مبانی نظری تحقیق و به دنبال آن خلاصه ای از فرایند واریانس گاما و ویژگی های آن تبیین و با جزییات مورد بحث قرار می گیرد. سپس ساختارهای بهینه سازی پرتفوی با کاپیولای VG (VGC) به جای کاپیولای گوسی (GC) ، مجددا فرمول نویسی می شود. یافته های تجربی و آنالیز تفاوت بین مدل های VGC و GC در بخش بعدی و نهایتا. نتیجه گیری کلی ارائه می گردد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

سنجه های ریسک، نقش بسیار حیاتی در بهینه سازی در زمان های نامطمئن دارند، به خصوص هنگام غلبه بر زیان هایی که ممکن است در شرایط مالی صنعت بیمه جبران نشوند. ارزش در معرض ریسک (VaR) به دلیل سادگی یکی از رایج ترین سنجه ها است که بیشترین میزان مطالب در قوانین این صنعت را به خود اختصاص داده است. ولی این سنجۀ ریسک، همیشه زیر جمعی [۴] یا محدب نیست. آرتزنر و همکاران (۱۹۹۹) ویژگی های اصلی را که یک سنجۀ ریسک باید برای انسجام داشته باشد ،پیشنهاد دادند.

ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) عبارت است از میانگین وزنی VaR و افت هایی که در توزیع های عمومی، بسیار بیشتر از VaR هستند (Rochafellar and Uryasev, 2002). ثابت شده است که سنجۀ ریسک CVaR یک سنجۀ ریسک منسجم در pflug (۲۰۰۰) است (Acerbi and Tasche, 2002; Acerbi et al., 2001; Rochafellar and Uryasev, 2001). بعد از آن، گروه های دیگری از سنجه ها پیشنهاد شدند که هر کدام ویژگی مجزایی داشتند: افت سرمایه در معرض ریسک شرطی (CDaR) (Chekhlov et al., 2000)، ES (Acerbi et al., 2001)، سنجه های کوژ (Follmer and Shied, 2002)، سنجه های طیفی (Acerbi and Simonetti, 2002) و سنجه های انحرافی (Rockafellar et al., 2006).

توصیف سادۀ روش حداقل سازی CVaR و مسائل بهینه سازی با محدودیت های CVaR را می توان در تحقیق چخلوف و همکاران (۲۰۰۰) یافت. Gaivoronski Pflug (۲۰۰۰) دریافت که در برخی موارد، بهینه سازی VaR و CVaR می تواند باعث ایجاد پرتفوی های متفاوت شود.

راکفلر و اوریاسِو (۲۰۰۰) نشان دادند که که می توان از تکنیک های برنامه نویسی خطی در بهینه سازی سنجه «ریسک ارزش در معرض خطر» شرطی (CVaR) استفاده نمود. مطالعات موردی گوناگونی نشان دادند که بهینه سازی ریسک با محدودیت های تابع عملکرد CVaR را می توان برای پرتفوی های بزرگ و طرح های زیادی که منابع محاسباتی نسبتا کوچک دارند انجام داد. راکفلر و اوریاسِو (۲۰۰۰) یک مطالعه موردی بر روی ریسک پائین یک پرتفوی با استفاده از تکنیک حداقل سازی CVaR انجام دادند. همچنین، روش حداقل سازی CVaR برای معتبر کردن مدیریت ریسک پرتفوی ی باند ها به کار گرفته شد (Andersson et al., 1999). در این تحقیق روش حداقل سازی CVaR که توسط راکفلر و اوریاسِو (۲۰۰۰) شرح داده شد به مسائل دیگر حاوی توابع CVaR بسط داده می شود. بعلاوه، روش حداقل سازی CVaR به مصون سازی (کاهش ریسک) پرتفوی ی مشتق شده [۵] (Alexander et al., 2003) و با هزینه معاملات (Alexander et al., 2006) بسط داده شد.

آنها در تحقیقات خود، پویایی قیمت لگاریتمی دارایی ها را با فرایند وینر چندگانه [۶] که یک توزیع نرمال و پیوسته است شرح می دهند. متاسفانه، همانگونه که در تعداد زیادی از تحقیقات آمده است،

هر دو فرض نرمال بودن و پیوسته بودن، در داده های موجود در مدارک گوناگون نقض می شوند. همانگونه که فاما (۱۹۶۵) بیان نمود، توزیع های بازدهی ابزار مالی، کشیدگی بیشتری نسبت به توزیع های نرمال داشته و تمایل به توزیع «دم کلفت»[7] بودن دارند. این پدیده به ویژه در داده هایی که فراوانی بالایی دارند آشکار است و وقتی دوره نگهداری[8] کوتاه تر می شود برجسته تر است. از این نظر فرایند VG که اولین بار در مدلسازی مالی توسط سنتا و مادان (1990) برای غلبه بر نواقص مدل بلک شولز[9] معرفی شد، به فرایند وینر برتری دارد.

با معرفی پارامترهای اضافی، فرایند واریانس گاما (VG) دارای چند ویژگی ریاضیاتی خوب است و اثبات شده که تعدادی از یافته های اقتصادی را شرح می دهد. از نظر ریاضی، این توزیع ویژگی های خوبی دارد از جمله کشیدگی و دم کلفتی. از نظر اقتصادی، Madan و همکاران (۱۹۹۸) نشان دادند که مدل آنها می تواند تفاوت های درج شده در منابع تبسم ضریب نوسان (volatility smile) را در برگه های اختیار خرید سهام اختیار[10] شرح دهد. بعلاوه، شوتنز و کاریبونی (۲۰۰۴) نشان دادند که مدل VG آنها برای قیمت گذاری CDOs به خوبی بر انواع منحنی های اعتباری تک اسمی[11] برازش می شود.

در این تحقیق از محدودیت فرضیات نرمال و پیوسته بودن صرف نظر می شود و با این فرض مبانی روش کامل می گردد. ساختار بهینه سازی پرتفوی ، با شرح پویایی قیمت لگاریتمی دارایی ها با کاپیولای VG به جای کاپولای گوسی بسط می شود. نتیجه این که CVaR بر اساس توزیع نرمال چندگانه کلاسیک، مقدار ریسک ابزار مالی را کمتر از مقدار واقعی نشان می دهد. بنابراین پیشنهاد می شود در ساختار بهینه سازی پرتفوی با معرفی کاپیولای واریانس گاما برای توصیف پویایی ابزار، چولگی و کشیدگی در نظر گرفته شوند.

- **فرایند واریانس گاما**

سنتا و مادان (۱۹۹۰) مدلی (مدل VG) برای توزیع بازدهی لگاریتمی یک تفسیر فیزیکی ارائه دادند که دو ویژگی چولگی و دم - کلفتی بلند (long-tailedness) را در یک توزیع بازدهی لگاریتمی ترکیب می نماید. بنابراین، فرایند واریانس گاما و ویژگی های آن طبق پیشنهاد مادان و همکاران (۱۹۹۸) به شرح زیر تبیین و تصریح می گردد:

- **تعریف و ویژگی های فرایند VG**

تعریف ۱:

فرایند $VGX\,(t;\sigma,\nu,\theta)$ به صورت حرکت براونی با رانش $b(t;\theta,\sigma)$ و فرایند گاما با نرخ میانگین واحد $\gamma(t;1,\nu)$ اینگونه بیان می شود:

رابطه (۱)

$$X\,(t;\sigma,\nu,\theta)=b(\gamma(t;1,\nu);\theta,\sigma)$$

که در آن

$\mathrm{b}(\mathrm{t};\theta,\sigma)=\theta\,\mathrm{t}+\sigma\,\mathrm{w}(\mathrm{t}),\mathrm{w}(\mathrm{t})$ یک حرکت براونی استاندارد است.

این فرایند دارای سه پارامتر به قرار زیر است:

الف) σ، ناپایداری حرکت براونی

ب) ν نرخ واریانس تغییر زمانی گاما

ج) θ رانش در حرکت براونی

بنابراین می توان تحت این فرایند ناپایداری کشیدگی و چولگی را با سه پارامتر ذکر شده کنترل نمود.

قضیه ۱:

چنانچه تغییر زمان g به صورت یک تابع چگالی نرمال تشخیص داده شود، می توان تابع چگالی[12] برای فرایند VG در زمان t را به صورت شرطی بیان نمود.

رابطه (۲)

$$\mathbf{P}(X_t=x)=\int_0^{\infty}\frac{g^{t/\nu-1}\exp(-g/\nu)}{\nu^{t/\nu}\Gamma(t/\nu)}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}}\exp\left(-\frac{(x-\theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right)\mathrm{d}g$$

قضیه ۲:

تابع مشخصه برای فرایند VG عبارت است از :

رابطه (۳)

$$E\left[\exp(iuX_t)\right]=\left[\frac{1}{1-i\,\theta\nu u+\sigma^2u^2\nu/2}\right]^{t/\nu}$$

قضیه ۳:

معادلات چهار گشتاور مرکزی فرایند VG عبارتند از:

رابطه (۴)

$$E\left[X_t\right]=\theta t$$

رابطه (۵)

$$E\left[(X_t-E\left[X_t\right])^2\right]=(\theta^2\nu+\sigma^2)t$$

رابطه (۶)

$$E\left[(X_t-E\left[X_t\right])^3\right]=(2\theta^3\nu^2+3\sigma^2\theta\nu)t$$

رابطه (۷)

$$E\left[(X_t-E\left[X_t\right])^4\right]=$$
$$(3\theta^4\nu+12\sigma^2\theta^2\nu^2+6\theta^4\nu^3)t$$
$$+(3\sigma^4+6\sigma^2\theta^2\nu+3\theta^4\nu^2)t^2$$

- **توصیف پویایی قیمت لگاریتمی دارایی ها با فرایند VG**

در ساختار قیمت گذاری برگه های اختیار که توسط مادان و همکاران (۱۹۹۸) معرفی شد، پویایی قیمت سهام معادل

$$S_t=S_0\exp(rt+X(t;\sigma,\nu,\theta)+wt)$$

است که در آن

$$w=(1/\nu)In(1-\theta\nu-\sigma^2\nu/2)$$

ویژگی مارتینگل قیمت سهام را اثبات می کند. به دلیل فرضیات متفاوت بین ساختار قیمت گذاری برگه های اختیار و ساختار بهینه سازی پرتفوی ، از ویژگی مارتینگل قیمت سهام در این مقاله صرف نظر می شود.

خصوصیات جدید آماری برای پویایی قیمت سهام را می توان با جایگذاری حرکت براونی در مدل بلک شولز اولیه توسط فرایند VG به دست آورد. بنابراین فرایند آماری قیمت سهام اینگونه به دست آورده می شود:

رابطه (۸)

$$S_t=S_0\exp(\mu t+X(t;\sigma,\nu,\theta))$$

رابطه (۹)

$$Y_t=\mu t+X(\mathrm{t};\sigma,\nu,\theta)$$

که در آن θ,ν,σ,μ پارامترها ، Y_t بازدهی لگاریتمی دارایی ها و $X(\mathrm{t};\sigma,\nu,\theta)$ فرایند VG می باشد.

- **مدل VG چندگانه**

مقالات تحقیقاتی بسیار زیادی در مورد قیمت گذاری CDOs با معرفی کاپیولای متفاوت به جای کاپیولای گوسی از جمله : کاپیولای t دوگانه در تحقیق هال و وایت (۲۰۰۴) و کاپیولای NIG چندگانه در تحقیق مک نیل و همکاران (۲۰۰۵) و غیره وجود دارد.

همانطور که قبلا اشاره شد اکثر تحقیقات در مورد بهینه سازی پرتفوی ، بر توزیع نرمال چندگانه تمرکز دارند. در این بخش مدل VG چندگانه برای توصیف پویایی قیمت ابزارهای مالی پیشنهاد گردید. حال با این فرض الگوریتم بهینه سازی پرتفوی با تابع عملکرد CVaR با استفاده از کاپیولای VG ارائه می شود.

- **پرتفوی ی مدل سازی شده با کاپیولای VG**

یک پرتفوی شامل n ابزار $S_1,S_2,\dots,S_n$ را در نظر بگیرید. چنانچه بازدهی لگاریتمی i امین دارایی در فاصله زمانی t به صورت Y_t^i نشان داده شود که با کاپیولای VG چندگانه بدین صورت تعریف می شود:

رابطه (۱۰)

$$S_t^i = S_0^i \exp(\mu^i t + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} X_t^k)$$

یعنی

رابطه (۱۱)

$$Y_t^i = \mu^i t + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} X_t^k$$

که در آن $\{X_t^k, k = 1,2,\dots,n\}$ فاکتورهای VG چندگانه به صورت زیر هستند و مستقل از t فرضی می باشند.

رابطه (۱۲)

$$X_t^k \sim VG(t; \sigma_k, \nu_k, \theta_k),$$

در عمل فرض می شود ۲۵۲ روز تجاری در یک سال وجود دارد و $t = (1/252)$ نشان دهنده یک روز تجاری است. برای سهولت ، $A = [a_{ik}]$ به صورت ماتریس ضرایب و Y_t^i به صورت خلاصه با Y^i نشان داده می شود تا بازدهی لگاریتمی روزانه برای i امین بار به صورت معادله ۱۱ نشان داده شود.

- **ساختار بهینه سازی پرتفوی با CVaR تحت فرایند VG**

چنانچه موقعیت های یک پرتفوی با ابزار $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ و نمونه های بازدهی های ابزاری مدلسازی شده با کاپیولای VG چندگانه با $Y = (Y^1, Y^2, \dots, Y^n)^T$ نشان داده شود. و زیان (افت)[13] پرتفوی $f_{(m,y)} = -m^T Y$ به صورت برگشتی منفی تعریف می شود. مساله بهینه سازی با تابع عملکرد CVaR بدین صورت تعریف می شود:

رابطه (۱۳)

$$CVaR_\beta = E\left[f(m,Y) \, \mathrm{f(m, Y)} \geq VaR_\beta \right]$$

آنگاه مساله بهینه سازی برابر می شود با:

$$\min CVaR_\beta(-m^T Y)$$

معادلات ۱۴ الی ۱۸:

$$:s.t$$

$$E\left[-m^T Y \leq -r_0\right]$$

$$Y^i = \mu^i + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} X^k$$

$$X^k \approx VG(t; \sigma_k, \nu_k, \theta_k)$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = 1$$

$$j = \overline{1,n} \qquad , \qquad m_j \geq 0$$

که در آن

β سطح احتمال است، بدین معنی که اگر β برابر ۹۵٪ باشد $CVaR_\beta$ میانگین ۵٪ بدترین زیان ها است.

Y بردار ابزار

m بردار وزنی ابزارها

r_0 نرخ بدون مخاطره در فاصله زمانی t

X^kk امین فاکتور VG و

$\theta_k, \mu_k, \sigma_k,$ سه پارامتر فرایند VG هستند.

این ساختار مشابه ساختار راکفلر و اوریاسِو (۲۰۰۰) است با این تفاوت که در آن بازدهی لگاریتمی ابزار مالی، به جای کاپیولای گوسی چندگانه، با کاپیولای VG چندگانه توصیف شده است.

- **الگوریتم بهینه سازی پرتفوی**

حل مساله بهینه سازی فوق، به دلیل غیر همواری CVaR و توزیع غیر نرمال کاپیولای VG مشکل است. بنابراین در این تحقیق با ترکیب شبیه سازی مونت کارلو و تکنیک های برنامه نویسی غیر خطی پیشنهاد شده توسط راکفلر و اوریاسِو (۲۰۰۰) مساله به شرح مراحل زیر قابل حل می شود.

مرحله اول: تخمین ماتریس ضرایب

در این مرحله ، پارامترهای مدل VG چندگانه به جای روش MLE در تحقیق مادان و همکاران (۱۹۹۸) از طریق محاسبه گشتاور[14]تخمین زده می شود. با توجه به استقلال سدید و زیاد فرایند VG، معادلات ۴

گشتاور مرکزی اول و کوواریانس توزیع بازدهیی در فاصله زمانی t به صورت زیر است (که می تواند به طور خلاصه با قضیه ۳ و فرضیات (۱۰) الی (۱۲) ثابت شود):

طبق معادلات (۱۹) الی (۲۲) به شرح زیر

$$E\left[Y^{i}\right]=(\mu^{i}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\theta_{k})t$$

$$COV(Y^{i},Y^{j})=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{jk}(\theta_{k}^{2}v_{k}+\sigma_{k}^{2})\,t$$

$$E\left[(Y^{i}-EY^{i})^{3}\right]=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}^{3}\left[(2\theta_{k}^{3}v_{k}^{2}+3\theta_{k}v_{k}\sigma_{k}^{2})t\right.$$

$$\begin{aligned}E\left[(Y^{i}-EY^{i})^{4}\right]=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}^{4}\Big[&(3\sigma_{k}^{4}v_{k}+12\sigma_{k}^{2}\theta_{k}^{2}v_{k}^{2}\\&+6\theta_{k}^{4}v_{k}^{3})t+(3\sigma_{k}^{k}+6\sigma_{k}^{2}\theta_{k}^{2}v_{k}+3\theta_{k}^{4}v_{k}^{2})t^{2}\Big]\\&+\sum_{k\neq j}\alpha_{ik}^{2}\alpha_{ij}^{2}(\theta_{k}^{2}v_{k}+\sigma_{k}^{2})(\theta_{i}^{2}v_{j}+\sigma_{j}^{2})t^{2}\end{aligned}$$

ماتریس ضرایب A و واریانس متغیر وابسته $X^1,X^2,\dots,X^n$ با ماتریس کوواریانس داده های نمونه بازدهی لگاریتمی محاسبه می شود. حال توجه نمایید که :

$$V\triangleq Cov(Y^{i},Y^{j})_{n\times n},\quad A\triangleq(a_{ik})_{n\times n},\quad S\triangleq\begin{pmatrix}s & 0\\0 & s_n\end{pmatrix}_{n\times n}$$

که در آن

$$S_k^2\triangleq(\theta_k^2v_k+\sigma_k^2)t$$

حال با استفاده از معادله (۲۰) در مرحله ۲ $A/t=A(SS^T)A^T$ بدست می آید. بدون از دست رفتن عمومیت[۱۵] موضوع ، A و S به ترتیب به عنوان مقدار ویژه (eigenvalue) و فاکتور ویژه (eigenvector) ماتریس معین و مثبت V/t انتخاب می شوند که می توان آن را به راحتی با نرم افزار MATLAB به دست آورد.

مرحله دوم: تخمین پارامترهای فاکتور

می توان ۴ گشتاور اول داده های نمونه را محاسبه نمود و با فاکتورهای محاسبه شده در مرحله ۱ به معادلات غیر خطی دست یافت . معادلات ذیل را می توان با الگوریتم گوسی - نیوتن [۱۶] در نرم افزار MATLAB حل نمود.

$$\mu^{i}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\theta_{k}=\frac{E\left[Y'^{i}\right]}{t}$$

$$\theta_{k}^{2}v_{k}+\sigma_{k}^{2}=\frac{S_{k}^{2}}{t}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}^{3}(2\theta_{k}^{3}v_{k}^{2}+3\theta_{k}v_{k}\sigma_{k}^{2})=\frac{E\left[(Y_{i}-EY^{i})^{3}\right]}{t}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}^{4}\left[(3\sigma_{k}^{4}v_{k}+12\sigma_{k}^{2}\theta_{k}^{2}v_{k}^{2}+6\theta_{k}^{4}v_{k}^{3})t+(3\sigma_{k}^{4}+6\sigma_{k}^{2}\theta_{k}^{2}v_{k}+3\theta_{k}^{4}v_{k}^{2})t^{2}\right]\\&+\sum_{k\neq j}\alpha_{ik}^{2}\alpha_{ij}^{2}(\theta_{k}^{2}v_{k}+\sigma_{k}^{2})(\theta_{i}^{2}v_{j}+\sigma_{j}^{2})t^{2}=E\left[(Y^{i}EY^{i})^{4}\right]\end{aligned}$$

مرحله سوم: ایجاد طرح

با پارامترهای محاسبه شده در مرحله ۱ و ۲، فاکتورهای توزیع VG چندگانه $((X^1,X^2,\dots,X^n))$ از طریق روش مونت کارلو شبیه سازی می شود و با توجه به فرضیات (۱۰) الی (۱۲) مشاهدات[۱۷] ابزار مالی بازدهی لگاریتمی[۱۸] به دست می آیند.

مرحله چهارم: خطی سازی

همانطور که گفته شد در این تحقیق برای حل مساله بهینه سازی غیر خطی ، از تکنیک معرفی شده توسط راکفلر و اوریاسِو (۲۰۰۰) استفاده گردید و CVaR_β بهینه مطابق بخش ۳،۲ محاسبه گردید. همانطور که توسط راکفلر و اوریاسِو (۲۰۰۰) پیشنهاد شد، CVaR_β برابر حداقل سازی تابع $F(m,\alpha)$ خواهد بود، یعنی: رابطه (۲۳)

$$CVaR_{\beta}=\min_{\alpha\in R}F(m,\alpha)$$

که در آن $F(m,\alpha)$ به صورت زیر خواهد بود : رابطه (۲۴)

$$F(m,\alpha)=\alpha+\frac{1}{1-\beta}\int_{Y\in R^{n}}(-m^{T}Y-\alpha)^{+}dF(Y)\approx$$

$$\alpha+\frac{1}{(1-\beta)J}\sum_{j=1}^{j}(-m^{T}Y_{j}-\alpha)^{+}$$

انتگرال فوق با نقاط گسسته $Y_{j}, j = 1, \dots, J$ در فضای R^n که در بخش ۳ شبیه سازی گرید ، تقریب زده می شود. بنابراین با استفاده از متغیرهای ساختگی Z_j، مسائل (۱۴) الی (۱۸) به یک مساله برنامه نویسی خطی خلاصه می گردد. (که با نرم افزار Lingo 8.0 قابل حل خواهد بود)

نهایتا مطابق معادلات (۲۵) الی (۳۱) ، مساله زیر شکل می گیرد :

$$\min_{Z,\alpha,m} \alpha + \frac{1}{(1-\beta)j} \sum_{j=1}^{j} Z_j$$

$$s.t:$$

$$Z_j \geq -m^T Y_j - \alpha \quad , \quad Z_j \geq 0$$

$$Y^i = \mu^i + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} X^k$$

$$X^k \approx VG(t; \sigma_k, v_k, \theta_k)$$

$$E\left[-m^T Y \leq -r_0\right]$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = 1$$

$$j = \overline{1,n} \qquad m_j \geq 0 \quad ,$$

۲-۱- پیشینه پژوهش

یو و همکاران (۲۰۱۴) سبد بهینه سهام شرکتهای ام اس و گوگل را در چارچوب میانگین - ارزش در معرض خطر شرطی تعیین کرده اند نتایج نشان میدهد که بازده پرتفوی انتخاب شده مطابق با بازده سبد مدل میانگین- واریانس است ولی ریسک بازدهی به دست آمده از ریسک پرتفوی مدل میانگین- واریانس بیشتر است.

لی و خو (۲۰۱۳) مطالعه ای در رابطه با بهینه سازی پویا در چارچوب مدل میانگین- ارزش در معرض خطر شرطی و ارزش در معرض خطر انجام داده اند. آنها در این مطالعه انواع مدلها با یک و دو محدودیت را ازمون نموده و نتیجه گیری کرده اند که زمانی که محدودیت حد بالا برای ریسک در نظر گرفته نشود، پرتفوی بهینه وجود نخواهد داشت.

انگلبرچت (۲۰۱۲) در پایاننامه خود با عنوان " مقایسه روشهای ارزش در معرض ریسک برای پرتفوی های سواپ نرخ بهره و قراردادهای سلف" به اجرای شیوه های مختلف محاسبه ارزش در معرض ریسک شامل مدل دلتا- نرمال، شبیه سازی تاریخی کلاسیک، شبیه سازی تعیین سبد بهینه سهام با استفاده از روش تاریخی با بهنگام سازی نوسان و شبیه سازی مونت کارلو و مقایسه آنها بر روی سبد در برگیرنده مشتقات نرخ بهره، پیمان های نرخ سلف و سواپ نرخ بهره پرداخته است. نتایج نشان داد که که شبیه سازی تاریخی نسبت به سایر مدلها بدترین کارکرد را داشته و روش شبیه سازی تاریخی با بهنگام سازی نوسان بهبودی بر روش شبیه‌سازی تاریخی کلاسیک میباشد.

گوردون و باپتیستا (۲۰۱۱) در مطالعه خود به مقایسه روش میانگین- واریانس و میانگین- ارزش در معرض ریسک برای انتخاب سبد بهینه سهام پرداخته اند. آنها از توزیع -های نرمال و t برای برآورد پارامتریک ارزش در معرض ریسک کمک گرفتهاند. نتایج این تحقیق نشان دهنده آن است که برای برخی از سرمایه گذاران ریسک گریز، پرتفویی که دارای واریانس بالا تر باشد ممکن است ارزش در معرض خطر پایینتری داشته باشد.

سونی (۲۰۰۵) روشهای پارامتریک محاسبه ارزش در معرض ریسک برای پرتفوی های شامل سواپ نرخ بهره در بازار هند را مقایسه کرده است. در این مطالعه از روشهای میانگین متحرک موزون نمایی و گارچ جهت محاسبه ارزش در معرض خطر و پیش بینی نوسانات استفاده شده است. نتایج نشان داده است که مدل گارچ نسبت به سایر مدل ها ، نتایج دقیق تری ارائه می دهد.

در تحقیق دیگری که توسط سونر و شِرِو (۱۹۹۴) انجام شد، سیاست های بهینه با اتکا به مفهوم راه حل ویسکوزیته در همیلتون – جاکوبی و بل من به طور کامل مشخص شدند.

مرتون (۱۹۶۹، ۱۹۷۱) پیشگام کاربرد مدل های تصادفی زمان - پیوسته در مطالعه بازارهای مالی (بدون هزینه معاملات) بود. وی نشان داد که سیاست سرمایه گذاری بهینه برای یک سرمایه گذار دائمی

نسبتا ریسک گریز این است که در کل دوره سرمایه گذرای، بخش ثابتی ازکل سرمایه ریسک پذیرش را نگه دارد. مدل مرتون مبنی بر هزینه معاملات نسبی، اولین بار توسط ماگیل و کانستانتینیدس (۱۹۷۶) و دیویس نورمن (۱۹۹۰) که مساله هزینه های معاملات در یک زمان نامحدود را مطالعه کردند، انجام شد.

مرور مطالعات تجربی نشان میدهد که در خارج از کشور و داخل کشور مطالعات زیادی در مورد محاسبه ارزش در معرض خطر با استفاده از انواع رویکردها و تعیین سبد بهینه در این چارچوب انجام یافته است اما در کمتر مواردی از طریق مدل ارزش در معرض ریسک شرطی تحت فرایند واریانس گاما به بهینه یابی پرتفوی پرداخته است .

۳- مطالعه موردی برای بازار سهام ایران

اکنون بازار سهام ایران به عنوان یک مطالعه موردی بررسی می شود. برای اطمینان از اینکه این مطالعه به اندازه کافی تنوع را در برگرفته و می تواند نماینده خوبی باشد، شاخص های کل، بازار و صنعت، به عنوان ابزار پرتفوی انتخاب می شود. داده های مورد استفاده، عبارتند از ۶۲۶ مشاهدهٔ روزانه از بازدهی های لگاریتمی در دوره زمانی ۹۲ الی ۹۴ .

تجزیه و تحلیل با محاسبهٔ میانگین، چولگی، کشیدگی و کوواریانس داده های نمونه در جدول ۱ و ۲ شروع می شود.

جدول ۱- میانگین، چولگی و کشیدگی بازده پرتفوی

	Mean	Skewness	Kurtosis
Kol index	0.0163	- 0.641	4.435
Bazar index	0.0145	- 0.865	6.567
Sanat index	0.0127	- 0.982	7.872

جدول ۲- ماتریس کوواریانس ابزار پرتفوی

	Kol index	Bazar index	Sanat index
Kol index	0.712	0.567	0.389
Bazar index	0.567	0.652	0.345
Sanat index	0.389	0.345	0.632

جدول ۳- تخمین ماتریس ضرایب A

0.472	0.593	0.823
- 0.721	0.129	0.765
0.195	- 0.92	0.594

همانطور که در جدول ۱ نشان داده شده است چولگی و کشیدگی هر شاخص، تفاوت معنی داری با چولگی و کشیدگی توزیع نرمال (که به ترتیب برابر ۰ و ۳ هستند) دارد. به عبارت دیگر، ساختار بهینه سازی پرتفوی تحت توزیع های نرمال چندگانه، به شدت با بازار سهام ایران برازش می شود که توجیه مستدلی جهت وارد کردن کاپیولای VG از قیمت گذاری های CDOs در بهینه سازی پرتفوی خواهد بود.

جداول ۳ و ۴ نتایج عددی تخمین گشتاور متناظر با فاکتورها و ابزارهای هر پرتفوی را نشان می دهد. با این پارامترها، مشاهدات (J) بازدهی لگاریتمی ابزارهای مالی با کاپیولای VG به دست می آیند که می توان آنها را در برنامه نویسی معادلات خطی ۲۵ الی ۳۱ جایگزین نمود.

مساله بهینه سازی خطی مقید با استفاده از Lingo 8.0 **قابل** حل خواهد بود. برای مقایسه تفاوت و اختلاف بین بهینه سازی پرتفوی تحت دو کاپولای

متفاوت، دو نوع اعداد تصادفی برای تقریب زدن انتگرال در نظر گرفته می شود.

توالی عددی تصادفی کاپیولای گوسی (مشابه روش راکفلر و اوریاسِو (۲۰۰۰)) و توالی عددی تصادفی کاپیولای VG (که با پارامترهای تخمین زده شده در بخش ۲ شبیه سازی شدند) با روش مونت کارلو شبیه سازی شدند. که نتایج محاسبات با β فرضی و $r_0 = 0.0012$ در جداول ۵ و ۶ آمده است.

همانطور که در این دو جدول مشاهده می گردد، می توان نتیجه گرفت که وقتی تعداد نمونه ها زیاد می شود موقعیت های پرتفوی تقریبا به آهستگی به هم نزدیک می شوند (همگرا می شوند) ولی با این حال، وقتی تعداد مشاهدات بیشتر از ۱۰۰۰۰ می شود، تفاوت نسبی بین VaR و CVaR محاسبه شده کمتر از ۱٪ است.

جدول ۴- تخمین پارامترهای $\mu^{i}, \sigma_k, \nu_k, \theta_k$ (I , k = 1,2,3)

	μ		θ	σ^2	ϑ
Y_1	0.754	X_1	0.126	0.014	0.076
Y_2	0.812	X_2	0.247	0.032	0.046
Y_3	0.783	X_3	-0.684	0.045	0.008

جدول ۵- پرتفوی VaR و CVaR با روش CVaR حداقل، تحت فرایند VG چندگانه با محدودیت میانگین زیان پرتفوی کمتر از $r_0 = -0.0012$ (مقدار β تعداد نمونه ها در یک شبیه سازی، سه موقعیت، VaR محاسبه شده، CVaR محاسبه شده)

β	J	Kol index	Bazar index	Sanat index	VaR	CVaR	Itr	Time (S)
0.9	1000	0.515	0.423	0.234	0.013	0.014	321	0
0.9	3000	0.612	0.365	0.346	0.012	0.016	543	1
0.9	5000	0.539	0.458	0.268	0.014	0.016	912	4
0.9	10000	0.510	0.452	0.245	0.015	0.017	1623	7
0.9	20000	0.586	0.376	0.267	0.012	0.015	2689	32
0.95	1000	0.634	0.364	0.329	0.021	0.019	96	0
0.95	3000	0.532	0.478	0.283	0.017	0.018	301	2
0.95	5000	0.538	0.427	0.265	0.019	0.018	538	2
0.95	10000	0.601	0.365	0.383	0.018	0.017	628	4
0.95	20000	0.586	0.431	0.246	0.017	0.019	1296	22
0.99	1000	0.673	0.236	0.319	0.025	0.021	57	0
0.99	3000	0.549	0.465	0.248	0.027	0.022	81	2
0.99	5000	0.592	0.379	0.327	0.029	0.021	341	0
0.99	10000	0.579	0.478	0.285	0.025	0.023	261	1
0.99	20000	0.621	0.384	0.345	0.023	0.024	491	7

شبیه سازی ها به روش مونت کارلو انجام شده اند.

جدول ۶- پرتفوی، VaR و CVaR با روش CVaR حداقل، تحت فرایند VG چندگانه با محدودیت میانگین زیان پرتفوی کمتر از - $r_0 = -0.0012$ (مقدار β تعداد نمونه ها در یک شبیه سازی، سه موقعیت، VaR محاسبه شده، CVaR محاسبه شده)

β	J	Kol index	Bazar index	Sanat index	VaR	CVaR	Itr	Time (S)
0.9	1000	0.534	0.531	0.243	0.013	0.123	267	0
0.9	3000	0.578	0.456	0.286	0.017	0.145	383	1
0.9	5000	0.598	0.441	0.292	0.018	0.137	982	3
0.9	10000	0.637	0.342	0.321	0.016	0.141	1476	6
0.9	20000	0.621	0.387	0.311	0.017	0.147	2734	27
0.95	1000	0.657	0.346	0.332	0.201	0.184	167	0
0.95	3000	0.689	0.256	0.378	0.211	0.167	301	2
0.95	5000	0.691	0.267	0.387	0.212	0.192	398	1

β	J	Kol index	Bazar index	Sanat index	VaR	CVaR	Itr	Time (S)
0.95	10000	0.623	0.356	0.334	0.224	0.196	895	5
0.95	20000	0.611	0.376	0.318	0.227	0.174	1501	17
0.99	1000	0.663	0.332	0.345	0.245	0.026	201	0
0.99	3000	0.674	0.012	0.367	0.323	0.239	259	2
0.99	5000	0.678	0.002	0.465	0.329	0.263	161	1
0.99	10000	0.635	0.356	0.348	0.302	0.281	409	4
0.99	20000	0.682	0.328	0.365	0.316	0.285	538	8

شبیه سازی ها به روش مونت کارلو انجام شده اند.

جدول ۷- مقایسه پرتفوی، VaR و CVaR با روش CVaR حداقل، تحت هر دو کاپیولای گوسی (G) و VG (J = 20000 و r_0 = 0.0012)

β	Copula	VaR	CVaR	Dif (%)
0.9	G	0.014	0.015	0.234
	VG	0.011	0.017	
0.95	G	0.019	0.019	0.376
	VG	0.021	0.021	
0.99	G	0.029	0.025	0.639
	VG	0.032	0.036	

جدول ۸- پرتفوی، VaR و CVaR با روش CVaR حداقل، تحت فرایند VG چندگانه که در آن یک پارامتر شاخص کل) هر بار با 0. 99 = □ و J = 20000 تغییر می کند.

Parameter	Value	Kol index	Bazar index	Sanat index	VaR	CVaR
Mean	0.014	0.091	0.423	0.716	0.231	0.123
Mean	0.008	0.423	0.763	0.007	0.265	0.102
Skewness	0.439	0.672	0.342	0.324	0.254	0.118
Skewness	-1.156	0.634	0.376	0.311	0.248	0.117
Kurtosis	31.435	0.645	0.356	0.312	0.241	0.116
r_0	0.0912	0.218	0.436	0.643	0.236	0.115
r_0	0.018	1	0.518	0.649	0.213	0.114

به عنوان مثال، در جدول (۷) مقایسه بین نتایج CVaR بهینه با کاپیولای گوسی ($CVaR_G$) و CVaR با کاپیولای VG ($CVaR_{VG}$) وقتی تعداد نمونه ها برابر ۲۰۰۰۰ است دیده می شود. مشاهده می شود که $CVaR_{VG}$ بهینه به میزان معنی داری بیشتر از $CVaR_G$ است (به سطر ۷ جدول ۵). چنانچه ما به التفاوت نسبی بین $CVaR_G$ و $CVaR_{VG}$ با Dif نشان داده شود اینگونه تعریف می شود:

رابطه (۳۲)

$$Dif = \frac{CVaR_{VG} - CVaR_G}{CVaR_G}$$

با توجه به موقعیت β = 0.99 ، CVaR بهینه برابر ۰,۰۱۸ = $_{VG}$ می باشد که آشکارا بیشتر از $CVaR_{VG}$ =0.015 در روش کاپیولای گوسی است. بنابراین ما نتیجه گرفته می شود که CVaR با کاپیولای گوسی، میزان ریسک پرتفوی را کمتر از مقدار واقعی آن نشان می دهد. این امر وقتی β به ۱ میل می کند (جدول ۷) جدی تر هم می شود. در مقایسه با موقعیت قبل، تفاوت نسبی CVaR بهینه کاپیولای گوسی با VG برابر 37.6% با در نظر گرفتن β = 0.95 می شود که این مقدار وقتی β = 0.99 باشد حتی تا 63.9٪ هم افزایش می یابد .

چنانچه به طور جداگانه برای تخمین حساسیت پارامترهای تخمینی و پایداری الگوریتم بهینه سازی، بدون از دست رفتن عمومیت، میانگین، چولگی و کشیدگی شاخص کل، تغییر یابد. پرتفوی بهینه،

VaR و CVaR با روش CVaR حداقل، تحت فرایند VG چندگانه مطابق جدول ۸ تغییر خواهد کرد. اولین سطر ، نتیجه پارامترهای اولیه در جدول ۱ و ۲ را نشان می دهد. سطور دیگر در برگیرندۀ نتایج تغییر پارامترهای میانگین، چولگی و کشیدگی هستند. نتیجه این که پرتفوی ی بهینه، VaR و CVaR وقتی هر بار یک پارامتر از چولگی یا کشیدگی نمونه تغییر می کند، پایدار می مانند (سطر ۴ الی ۶ در جدول ۸). اما پرتفوی ی بهینه با افزایش یا کاهش میانگین نمونه به طور معنی داری تغییر می‌کند (سطور ۲ و ۳ در جدول ۸). همچنین وقتی محدودیت میانگین پرتفوی (R_0) کاهش پیدا کند، موقعیت شاخص کل به سرعت بالا می رود (سطر ۷ و ۸).

نهایتا این پدیده ها نه تنها نشان می دهند که کاپیولای متفاوت، CVaR متفاوتی ایجاد می کند، بلکه یادآوری می کند که در ساختار بهینه‌سازی پرتفوی، کشیدگی و دم کلفت بودن (fat-tailedness) دارای اهمیت بسیار زیادی می باشد.

۶- نتیجه‌گیری و بحث

در این تحقیق، یک روش جدید برای بهینه سازی پرتفوی با توصیف پویایی های قیمت لگاریتمی دارایی ها با کاپیولای VG به جای کاپیولای گوسی مورد توجه قرار گرفت. که موقعیت های بهینه ابزار مالی و CVaR با معرفی تکنیک های خطی سازی پیشنهادی توسط راکفلر و اوریاسو (۲۰۰۰) به دست آمد . از طریق یک مطالعه موردی بر روی سه شاخص در بازار سهام ایران، مشاهده گردید که کاپیولای VG می تواند به طور کارآمدی بر نواقص کاپیولای گوسی (که CVaR پرتفوی را کمتر از مقدار واقعی آن نشان می دهد) غلبه نماید. بعلاوه، الگوریتم بهینه با پارامترهای چولگی و کشیدگی، پایدار می باشد. بنابراین، توصیف پویایی های ابزاری توسط کاپیولای VG و ساده سازی ساختار بهینه سازی پرتفوی توسط آن پیشنهاد می گردد. روش کاپیولای VG پیشنهادی جای زیادی برای ارتقا دارد، از جمله می توان به تغییر پویایی توصیف قیمت لگاریتمی دارایی ها توسط کاپیولاهای متفاوت همانند NIG یا فرایندهای دیگر لوی ، یا بسط ساختار به مدل های تصادفی زمان - پیوسته با محدودیت های $CVaR_{VG}$ اشاره نمود.

پیشنهادهای پژوهش عبارتند از:

- چون کاپیولای واریانس گاما، ارزش در معرض ریسک شرطی پرتفوی در نزدیک حد واقعی آن تعیین می کند پیسنهاد می گردد در بهینه یابی پرتفوی از آن استفاده شود .
- چون پرتفوی بهینه با افزایش یا کاهش میانگین نمونه به طور معنی داری تغییر می کند پیشنهاد می گردد الگوها برای نمونه های با دامنه متعدد اجرا گردد.

فهرست منابع

* Acerbi, C., Simonetti, P., 2002. Portfolio Optimization with Spectral. Measures of Risk. Working paper. http://www.gloriamundi.org.
* Acerbi, C., Tasche, D., 2002. On the coherence of expected shortfall. J. Bank. Financ. 26 (7), 1487–1503.
* Acerbi, C., Nordio, C., Sirtori, C., 2001. Expected shortfall as a tool for financial risk management. Working paper.http://www.gloriamundi.org.
* Alexander, S., Coleman, T.F., Li, Y., 2003. Derivative portfolio hedging based on CVaR. In: Szego, G. (Ed.), Risk Measures for the 21st Century. Wiley, London, pp. 339–363.
* Alexander, S., Coleman, T.F., Li, Y., 2006. Minimizing CVaR and VaR for a portfolio of derivatives. J. Bank. Financ. 30, 583–605.
* Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D., Uryasev, S., 1999. Credit risk optimization with conditional Value-at-Risk. Mathematical Programming B.
* Artzner, P., Delbaen, F., Ebner, J.-M., Heath, D., 1999. Coherent measures of risk. Math. Financ. 9 (3), 203–228.
* Cariboni, J., Schoutens,W., 2004. Pricing credit default swaps under Lévy models. UCS Report 2004-07, K.U. Leuven.
* Chekhlov, A., Uryasev, S.P., Zabarankin, M., April 8, 2000. Portfolio optimization

with drawdown constraints. Research Report #2000-5. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=223323.

* Dai, M., Yi, F., January 2006. Finite-horizon optimal investment with transaction costs: a parabolic double obstacle problem. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=868499.
* Davis, M.H.A., Norman, A.R., 1990. Portfolio selection with transaction costs. Math. Oper. Res. 15, 676–713.
* Fama, E.F., 1965. The behavior of stock market prices. J. Bus. 38, 34–105.
* Follmer, H., Shied, A., 2002. Convex measures of risk and trading constraints. Financ. Stochast. 6 (4), 429–447.
* Hull, J., White, A., 2004. Valuation of a CDO and an nth to default CDS without Monte Carlo simulation. J. Deriv. 12, 8–23.
* Liu, H., Loewenstein, M., 2002. Optimal portfolio selection with transaction costs and finite horizons. Rev. Financ. Stud. 15 (3), 805–835.
* Madan, D.B., Seneta, E., 1990. The variance gamma (V.G.) model for share market returns. J. Bus. 63, 511–524.
* Madan, D.B., Carr, P.P., Chang, Eric C., 1998. The variance gamma process and option pricing. Eur. Financ. Rev. 2, 79–105.
* Magill, M.J.P., Constantinides, G.M., 1976. Portfolio selection with transaction costs. J. Econ. Theory 13, 264–271.
* McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P., 2005. Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, Tools. Princeton University press.
* Merton, R.C., 1969. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. Rev. Econ. Stat. 51 (2), 247–257.
* Merton, R.C., 1971. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model. J. Econ. Theory 3, 373–413.
* Pflug, G., 2000. Some remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk. In: Uryasev, S. (Ed.), Probabilistic ConstrainedOptimization: Methodology and Applications. Kluwer Academic Publishers. Rockafellar, R.T., Uryasev, S., 2000. Optimization of conditional Value-at-Risk. J. Risk 2, 21–41.
* Rockafellar, R.T., Uryasev, S., 2001. Conditional Value-at-Risk for general loss distributions. Research Report 2001–5. ISE Department, University of Florida. http://www.ise.ufl.edu/uryasev/cvar2.pdf.
* Rockafellar, R.T., Uryasev, S., 2002. Conditional Value-at-Risk for general loss distributions. J. Bank. Financ. 26 (7), 1443–1471.
* Rockafellar, R.T., Uryasev, S., Zabarankin, M., 2006. Generalized deviation measures in risk analysis. Financ. Stocast. 10, 51–74.
* Shreve, S.E., Soner, H.M., 1994. Optimal investment and consumption with transaction costs. Ann. Appl. Probab. 4 (3), 609–692.
* Chao Sun, Jing-Yang Yang, Sheng-Hong, Li., 2007. On reset option pricing in binomial market with both fixed and proportional transaction costs. Appl. Math. Comput. 193 (1), 143–153

یادداشت‌ها

[1] Gaussian Copula
[2] Levy process
[3] utility functions
[4] sub-additive
[5] derivative
[6] multiple Weiner process
[7] fat tails
[8] holding period
[9] Black-Scholes
[10] equity options
[11] single name
[12] density function
[13] loss
[14] moment estimation
[15] generality
[16] Gauss-Newton
[17] sceneries
[18] Log return