فصلنامه علمی پژوهشی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
سال هفتم، شماره بیست و چهارم
زمستـان ۱۳۹۳

مدل دو هدفه بازنگری سبد ردیاب شاخص با لحاظ هزینه‌های معاملاتی و حل آن با الگوریتم‌های فرا ابتکاری

امیرعباس نجفی[۱]
احسان فاضلی سبزوار[۲]

تاریخ دریافت: ۹۲/۱۱/۱۲ تاریخ پذیرش: ۹۳/۱/۲۰

چکیده

بازنگری و بهینه‌سازی مداوم سبدهای ردیاب شاخص به گونه‌ای که همواره بتوان به پیگیری دقیق شاخص اطمینان داشت امری دشوار و پیچیده است. علاوه بر آن توجه به هزینه‌های معاملاتی نیز اجتناب ناپذیر است. این مقاله، مدلی جهت بهینه‌سازی مساله سبد ردیاب شاخص و روش حلی بر اساس الگوریتم ژنتیک تکاملی را ارائه می‌نماید. مدل پیشنهادی، یک مدل دوهدفه است که به دنبال حداقل نمودن خطای ردیابی و همچنین حداقل کردن هزینه‌های معاملاتی می‌باشـد. از آنجا که مدل پیشنهادی یک مدل چندهدفه بوده و دارای پیچیدگی محاسباتی (NP-hard) می‌باشـد و توابع هدف در تعارض با یکدیگـر هستنـد، الگوریتم‌های ژنتیک تکاملی مرتب‌سازی نامغلوب و رتبه‌بندی نامغلوب برای حل مدل، مورد استفاده و ارزیابی قرار گرفته است. همچنین شاخص فلزات اساسی بورس اوراق بهادار تهران در سال ۱۳۹۱ به عنوان شاخص مورد نظر جهت پیگیری و بازنگری در این مقاله نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: بازنگری سبد ردیاب شاخص، بهینه‌سازی سبد شاخص، مدیریت منفعل.

۱- استادیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی (مسئول مکاتبات) aanajafi@kntu.ac.ir
۲- کارشناس ارشد مهندسی مالی دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی ehsan.fazeli.s@gmail.com

۱- مقدمه

ردیابی شاخص یکی از روش‌های تخصیص منابع است که ریسک کمی را به دنبال دارد. به اعتقاد بسیاری از صاحب‌نظران، این رویکرد در یک افق زمانی بلند مدت بازده بالاتری را نسبت به رویکرد فعال ایجاد می‌کند. منطق زیربنایی این رویکرد سرمایه‌گذاری، ایجاد یک پورتفوی با عملکردی مشابه شاخص و به دنبال آن دستیابی به ریسکی نزدیک به بازار است که در حال حاضر با رشدی بی‌سابقه در اکثر بازارهای پیشرفته دنیا مورد استفاده قرار گرفته است.

برخی از کارشناسان معتقدند تمام سرمایه‌گذاران در مجموع، بازده بازار را به دست خواهند آورد و به همین خاطر بهتر است سرمایه‌گذاران به جای تلاش برای غلبه بر بازده بازار به دنبال دستیابی به بازدهی نزدیک به بازده بازار باشند و برای این منظور به دنبال ایجاد یک سبد بوده که بازده بازار را با تخمین مناسبی دنبال می‌کند. البته کارایی بازار عامل مهمی است که باید به آن نیز توجه نمود (ورسه‌ای و شمس، ۱۳۸۹). اما آنچه برای مدیران یک صندوق شاخص اهمیت کلیدی دارد بازنگری این سبد است. ممکن است یک سبد شاخص بدون هیچگونه بازنگری در آن، قابلیت ردیابی شاخص بازار را با تقریب مناسب نداشته باشد. علاوه بر آن، توجه به هزینه‌های معاملاتی نیز کار را مشکل‌تر می‌کند. اما با این وجود، بازنگری این سبد اجتناب ناپذیر است. امروزه با توجه به اوضاع اقتصادی جهان، رویکرد منفعلانه و تلاش برای دستیابی به بازدهی نزدیک به شاخص بازار در بسیاری از بازارها رونق گرفته و بسیاری از سرمایه‌گذاران برخلاف نگاهی که تا چند دهه قبل داشته‌اند، اکنون به دنبال مطمئن‌ترین راه برای کسب سود هستند. اما همچنان مشکل بازنگری این سبدها پابرجا بوده و صرفا متکی به تلاش و تجربه مدیران این سبدها و صندوق‌ها است.

بر همین اساس، هدف از این تحقیق ارائه مدلی به منظور بازنگری سبد ردیاب شاخص با در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی و ارائه روش‌های حلی مبتنی بر الگوریتم ژنتیک توسعه یافته است.

سوالات اساسی این تحقیق این است که: "چگونه می‌توان حداقل خطای ردیابی و حداقل هزینه‌های معاملاتی را توأمان در نظر گرفته و آن‌ها را بهینه نمود؟نتیجه حاصل از بازنگری در دوره‌های زمانی مشخص چگونه خواهد بود و در مقایسه با حالتی که بازنگری انجام نشود کدامیک مطلوب‌تر است؟"

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

۲-۱- استراتژی مدیریت فعال

مدیریت فعال شامل تلاشی منظم برای دستیابی به عملکردی بهتر از عملکرد مبنای انتخاب شده است. کلیه روشهای مدیریت فعال مستلزم جستجوی اوراق بهادار یا گروه‌هایی از اوراق بهادار غیرواقعی قیمت‌گذاری شده است. استراتژی مدیریت فعال بر این حقیقت استوار است که سرمایه‌گذاران فعال، توانایی غلبه بر متوسط بازده کل بازار را دارند. یک مدیر فعال با درجه ریسک‌پذیری بالا تلاش می‌کند سهام‌هایی را که بر سایر سهام‌ها در بازده غلبه خواهد کرد، در زمان مناسب برای خرید یا فروش انتخاب کند. پیش فرض این استراتژی این است که مدیر سرمایه می‌تواند با تکیه بر تجربه و قضاوت

خود سود بیشتری کسب نماید. (شریعت پناهی و جعفری، ۱۳۹۰)

۲-۲- استراتژی مدیریت منفعل

مدیریت منفعل در صنعت سرمایه‌گذاری، روش نسبتاً جدیدی به شمار می‌رود. قبل از سال‌های میانی دهه ۱۹۶۰، این که سرمایه‌گذاران باید در جستجوی سهام‌های غیرواقعی قیمت‌گذاری شده باشند، امری مسلم و بدیهی بود. برخی استراتژی‌های سرمایه‌گذاری، نشانه‌هایی از منفعل بودن داشتند، نظیر خرید سهام شرکت‌های «مطمئن و جاافتاده» برای دوره «بلندمدت». در سال ۱۹۶۰ با متداول شدن مفاهیم انتخاب سبد سرمایه‌گذاری مارکوویتز و تاکید بر «سبد سرمایه‌گذاری بازار» دیدگاه‌ها تغییر نمود. نخستین صندوق شاخص‌نگر سهام عادی در ایالات متحده در سال ۱۹۷۱ معرفی گردید. در پایان همان دهه حدود ۱۰۰ میلیون دلار در صندوق‌های شاخص‌نگر سرمایه‌گذاری شده بود.در استراتژی مدیریت منفعل، مدیر سرمایه‌گذاری از انعطاف‌پذیری و ریسک کمتری برخوردار بوده و پذیرفته است که در نهایت می‌تواند بازده‌ای مشابه با بازده یک شاخص بازار سهام از طریق سرمایه‌گذاری در مجموعه‌ای مناسب از سهامی که درون شاخص بازار وجود دارند، کسب نماید. البته توانایی بازبینی سبد برای دستیابی به کمترین میزان انحراف از شاخص بازار برای مدیران وجود دارد. هدف از تشکیل سبد سهام انفعالی تا حد ممکن نزدیک کردن بازده سبد سهام به یک شاخص مورد نظر است. (شریعت پناهی و جعفری، ۱۳۹۰)

۲-۳- ردیابی شاخص

مساله پیگیری شاخص مساله بازتولید عملکرد یک شاخص بازار سهام است، اما بدون خریداری تمامی سهام‌هایی که شاخص را می‌سازند. ساده‌ترین راه برای پیگیری یک شاخص، تکرار کامل است که تمامی سهام‌هایی که شاخص را می‌سازند با همان نسبت‌های موجود در شاخص، خریداری شوند. با این حال، تکرار کامل معایبی دارد (بسلی، ۲۰۰۳):

۱) سهام‌های خاصی که در شاخص هستند ممکن است (به تناسب) در مقادیر بسیار کوچکی باشند.

۲) زمانی که در ترکیب شاخص تجدید نظر گردد، موجودی تمامی سهام‌ها نیازمند تغییر خواهند بود تا وزن‌های جدیدشان را در شاخص منعکس نمایند.

۳) لازم است هزینه‌های معاملاتی مربوط به خرید یا فروش سهام در نظر گرفته شود. تکرار کامل، تنها از یک فرمول ریاضی ساده برای محاسبه موجودی هر سهم استفاده می‌کند که هیچ محدودیتی در خصوص میزان هزینه‌های معاملاتی برای جلوگیری از بسیار زیاد شدن این مقدار ندارد.

مسئله ردیابی شاخص و ساختن سبد ردیاب شاخص از جنبه‌های مختلف اهمیت بسیاری یافته است و امروزه در بسیاری از بازارهای دنیا و موسسات مالی و سرمایه‌گذاری مورد استفاده قرار می‌گیرد و به همین دلیل توجه بسیاری از تحلیلگران و محققان را به خود جلب نموده است، اما ادبیات این موضوع چندان توسعه نیافته است. طی بررسی-هایی که توسط بسلی(۲۰۰۳) انجام شده است، نشان می‌دهد که تعداد کمی از مقاله‌ها به طور مشخص به این موضوع پرداخته‌اندکه همین تحقیقات اندک نیز

به صورت پراکنده انجام گرفته است. به عبارت دیگر محققان این حوزه از مدل‌های متعدد، روش‌های حل مختلف و داده‌های اولیه گوناگون برای حل مسئله سبد ردیاب استفاده کرده و معمولاً نتایج تحقیقات خود را با جزئیات ارائه نکرده‌اند. همین موضوع مقایسه کارهای انجام گرفته در ادبیات این حوزه را با مشکل مواجه می‌سازد. (ورسه‌ای و شمس، ۱۳۸۹) علاوه بر آن، مساله بازنگری سبدهای ردیاب شاخص نیز نسبت به خود مساله ردیابی شاخص کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

حنیفی و همکاران (۱۳۸۸) با استفاده از الگوریتم ژنتیک و رویکردهای بهبود یافته‌ی آن مدلی را برای انتخاب پورتفوی ردیابی کننده شاخص قیمت و بازده نقدی ارائه نمودند. این محققان نتایج حاصل از بکارگیری الگوریتم ژنتیک را با نتایج حاصل از بکارگیری روش برنامه‌ریزی درجه دوم مقایسه نمودند. این مقایسه نشان داد که الگوریتم ژنتیک نسبت به روش بهینه‌سازی درجه دوم کارایی بالاتری دارد. تابع هدف، حداقل کردن خطای ردیابی زیرمجموعه‌ای از سهام بود که در تحقیق آنها تابعی از اختلاف میان بازده پورتفوی ردیابی کننده و شاخص در نظر گرفته شده بود. محدودیت‌های وزن اقلام تشکیل دهنده پورتفو، محدودیت عدد صحیح، محدودیت تعداد سهامی که سرمایه‌گذار مایل به سرمایه‌گذاری در آن می‌باشد نیز در نظر گرفته شده بود. اما هزینه‌های معاملاتی در مدل آنها لحاظ نشده بود. آنها برای بدست آوردن بهترین نرخ‌های تقاطع و جهش از روش تیونینگ استفاده نمودند. نمونه آماری این تحقیق، متشکل از شرکت‌های پذیرفته شده در بورس تهران بود که بیشترین تأثیرگذاری را روی شاخص داشتند که به منظور دستیابی به نمونه ای با این ویژگی، آنها روش نمونه گیری قضاوتی (فیلترینگ شرکت‌ها) را مدنظر قرار دادند. چنانکه آنها ارائه نمودند دقت ردیابی الگوریتم ژنتیک چندمرحله‌ای در حد ۰,۰۰۰۰۱ بود. در تحقیق آن‌ها به چگونگی بازنگری در سبد شاخص اشاره‌ای نشده بود.

حجازی و همکاران (۱۳۹۰) با استفاده از الگوریتم ژنتیک مدلی را برای بهینه‌سازی پورتفوی، برای مدیریت صندوق شاخص بهبود یافته با در نظر گرفتن محدودیت تعداد دارایی‌های مختلف و همچنین محدودیت در وزن تخصیص داده شده به دارایی‌های مختلف صندوق ارائه کردند. علاوه بر این نیز محدودیت بودجه و همچنین محدودیت سقف و کف در صورت انتخاب سهم نیز لحاظ نشده بود. مدل در حالتی که فروش استقراضی مجاز نباشد ارائه شده و محدودیت هزینه‌های معاملاتی و نقدشوندگی نیز لحاظ نشده بود. این محققان برای محاسبه خطای ردیابی شاخص، تنها انحرافات نامطلوب بازده صندوق شاخص بهبود یافته از بازده شاخص را لحاظ کرده بودند. دوره زمانی مورد استفاده برای این پژوهش از خرداد ۱۳۷۸ تا خرداد ۱۳۸۹ در بورس اوراق بهادار تهران بوده و تمامی داده‌ها از بانک اطلاعاتی نرم‌افزار ره‌آورد نوین استخراج شده گردید. نتایج حاصل از بارگیری مدل پیشنهادی آنها با شاخص قیمت و بازده نقدی مقایسه گردید. نتایج این مقایسه بیانگر این بود که میانگین بازده صندوق‌های شاخص بهبود یافته تفاوت معنی‌دار آماری با بازده شاخص قیمت و بازده نقدی بورس اوراق بهادار تهران داشت و از آن بیشتر بود.

بسلی و همکاران (۲۰۰۳) با استفاده از الگوریتم تکاملی برای صندوق‌های شاخص، الگویی را ارائه نمودند که در آن، علاوه بر بازده مشابه با بازده

شاخص، قابلیت دستیابی به یک بازده اضافی نیز در نظر گرفته شده بود. در این مقاله، برای اولین بار انحراف از شاخص، معادل جذر میانگین مجذورات خطا اختلاف بین بازده صندوق و بازده شاخص در نظر گرفته شده و بازده اضافی نیز به صورت میانگین اختلاف بین بازده صندوق و بازده شاخص تعریف شده بود.

کولمن و همکاران (۲۰۰٤) نیز مساله حداقل سازی خطای پیگیری را زمانی که تعداد دارایی‌ها در پورتفوی پیگیری محدود باشد در نظر می‌گیرند. آنها در رویکردشان یک تابع هدف موزون شامل خطای پیگیری (پیوسته) و تعداد دارایی‌ها در پورتفوی پیگیری را حداقل می‌کنند. بخش گسسته‌ی این تابع هدف به طور پیش رونده‌ای توسط تابع پیوسته تقریب زده می‌شود. این محققان نتایج محاسباتی برای رویکردشان را با استفاده از داده‌های در دسترس ارائه شده در مقاله بسلی(۲۰۰۳) ارائه نمودند. علیرغم حجم بالای محاسبات در مدلی که آنها ارائه نمودند، اما هیچ زمان محاسباتی داده نشده است.

فانگ و همکاران (۲۰۰۵) مساله پیگیری شاخص را به عنوان یک مساله برنامه‌ریزی دوهدفه در نظر گرفتند. یک هدف در خصوص حداقل کردن میانگین انحراف منفی از بازده شاخص و هدف دیگر بازده بیشتر. آنها یک رویکرد تئوری فازی را پیشنهاد کردند که منجر به یک مدل ریاضی شد که می توانست بوسیله برنامه‌ریزی خطی حل شود. ضمن آنکه در تئوری فازی آن‌ها، میزان رضایت سرمایه گذار در ایجاد پورتفوی ردیاب شاخص تاثیرگذار بود. یک مثال عددی مربوط به انتخاب ۳۰ سهام عمومی برای پیگیری شاخص ۱۸۰ سهم بازار سهام شانگهای گزارش داده شده اما هیچ زمان محاسباتی داده نشده است.

کاناکوز و همکاران (۲۰۰۸) در چارچوب مدل تک عاملی، به ارائه الگویی برای تشکیل صندوق‌های شاخص و صندوق‌های شاخص بهبود یافته با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط پرداختند. در مدل ارائه شده توسط این محققان، سعی شده است با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط تا حد ممکن بتای صندوق شاخص بهبود یافته نزدیک به عدد یک بشود، که در این صورت صندوق شاخص بهبود یافته تغییرات شاخص بازار را دنبال می‌کند. همچنین، تلاش شده آلفای صندوق شاخص بهبود یافته، عددی مثبت باشد تا صندوق شاخص بهبود یافته بازده بیشتری نسبت به شاخص بازار کسب کند. مدل آنها شامل هزینه‌های معامله، یک محدودیت در تعداد سهام هایی که می‌تواند خریداری شود و یک محدودیت در کل هزینه معامله که می‌تواند تحمل شود است. از آنجایی که مدل آنها از این مسائل، برنامه‌ریزی‌های خطی مختلط عدد صحیح می‌باشد، آنها از یک حل کننده‌ی استاندارد استفاده نموده‌اند. آنها یک راه‌حل سه مرحله‌ای را برای پیگیری شاخص پیشنهاد کردند که در مرحله‌ی اول، تا آنجا که ممکن است به عرض از مبدا نزدیک به صفر رگرسیون دست یابد، در مرحله‌ی دوم تا جایی که ممکن است به شیب رگرسیون (بتا) نزدیک به یک دست یابد و در مرحله ی سوم، حداقل کردن هزینه‌های انتقال با این هدف که مقادیر بدست آمده در دو مرحله‌ی قبل را حفظ نماید و برای صندوق شاخص بهبود یافته نیز یک راه‌حل دو مرحله‌ای پیشنهاد نمودند که در مرحله‌ی اول، تا جایی که ممکن است به شیب رگرسیون (بتا) نزدیک به یک دست یابد و در مرحله‌ی دوم، حداقل

کردن هزینه‌های انتقال با این هدف که مقادیر بدست آمده برای شیب رگرسیون (بتا) در مرحله‌ی قبل را حفظ نماید. اندازه‌ی مساله‌ای که آنها در نظر گرفته بودند بسیار بزرگتر از مواردی بود که قبلا کار شده است. ضمن آنکه بار محاسباتی در فرمول‌بندی و نتایج آنها در تمام موارد معقول و منطقی بوده است. مدل ارائه شده در این مقاله نتایج عددی برای هشت مجموعه داده از بازارهای بزرگ در بورس‌های هنگ کنگ، نیویورک، توکیو، آلمان و لندن بررسی شده و نتایج مطلوبی نیز به همراه داشته است.

مونت‌فورت و همکاران (۲۰۰۸) مساله سبد ردیاب شاخص را با هدف بهینه‌سازی در نظر گرفته بودند. آن‌ها خطای ردیابی را که بسلی و همکاران (۲۰۰۳) به صورت جذر میانگین مجذورات خطا در نظر گرفته بودند را بسط دادند که در این تحقیق نیز مـورد استفاده قـرار گرفته است. محدودیت‌هایی که آن‌ها در نظر گرفته بودند، محدودیت‌های اصولی را در بر می‌گرفت. علاوه بر آن محدودیت حداکثر هزینه معاملاتی مورد نظر را نیز در نظر گرفته بودند. از مدل آن‌ها می‌توان به عنوان بازنگری در سبد ردیاب نیز استفاده کرد اما هزینه‌های معاملاتی به صورت صحیح در مدل وارد نشده بود و صرفا سقف هزینه‌های معاملاتی به عنوان یک محدودیت در نظر گرفته شده بود. این امر موجب می‌شود در بازنگری نتوان دقت کافی را داشت، زیرا ممکن است برای داشتن سبدی بهینه لازم باشد هزینه معاملاتی بهینه‌ای را در نظر گرفت. اما مدل آن‌ها در تشکیل یک سبد ردیاب شاخص، مناسب عمل نمود. آن‌ها نتایج محاسباتی خود را نیز ارائه نموده‌اند.

با توجه به مرور ادبیات ارائه شده، مشاهده گردید که مساله بازنگری یک سبد ردیاب کمتر مورد توجه قرار گرفته است و روش‌های حل فراابتکاری مورد استفاده در این تحقیق نیز پیش از این استفاده نشده‌اند.

۳- مدل پژوهش و متغیرهای آن

درست بودن پیگیری شاخص معمولا با میزان خطای ردیابی [۱]، اندازه‌گیری می‌شود. چنانکه در بخش قبل هم اشاره شد روش‌های مختلفی برای محاسبه این مقدار در بازه $[1,T]$ وجود دارد که در اکثر تحقیقات به عمل آمده از عبارت زیر بدست می آید:

$$TE = \sum_{t=1}^{T}(r_{I,t} - r_{P,t})^2 \qquad \text{(رابطه ۱)}$$

که در آن $r_{I,t}$ بازده شاخص در روز t و $r_{P,t}$ بازده سبد ردیاب شاخص در روز t خواهد بود. این عبارت به خوبی میزان خطا را نشان می‌دهد و می‌گوید که آیا سبدی که در اختیار داریم سبد خوبی برای پیگیری شاخص است یا خیر. حال برای بازنگری این سبد و داشتن سبدی با کمترین میزان خطای ردیابی، با توجه به رویکردی که مونت‌فورت و همکاران (۲۰۰۸) اتخاذ کرده بودند این عبارت را بسط داده تا به عبارت مطلوب‌تری برای تابع هدف دست یابیم.

پارامترهای مورد استفاده در مدل و مقادیر ورودی به این ترتیب خواهد بود:

N: تعداد سهام در دسترس

T: زمانی که مدنظر است تا بازنگری سبد انجام شود.

$P_{i,t}$: ارزش سهم i در روز t (که در آن i مقادیر صفر تا N و t نیز مقادیر صفر تا T را دارد)

$P_{P,t}$: ارزش سبد ردیاب شاخص در روز t (که در آن t مقادیر صفر تا T را دارد)

A_i: تعداد سهم نوع i که در سبد ردیاب قرار داده شده است.

$r_{i,t}$: بازده سهم i در روز t

$r_{P,t}$: بازده سبد ردیاب شاخص در روز t

W_i: کسری از ارزش سبد ردیاب قبل از بازبینی که در مدت زمان T روی سهم i سرمایه‌گذاری شده است و به عنوان ورودی در مساله لحاظ می‌گردد.

متغیرهای تصمیم مدل نیز به صورت زیر خواهند بود:

X_i: کسری از ارزش سبد ردیاب شاخص پس از بازنگری که در زمان T روی سهم i سرمایه‌گذاری شده است و با X_i نشان داده می‌شود.

روابط بین مقادیر نیز به صورت زیر برقرار است:

$$P_{P,t} = \sum_{i=1}^{N} A_i P_{i,t} \qquad \text{(رابطه۲)}$$

$$A_i = \frac{X_i P_{P,T}}{P_{i,T}} \qquad \text{(رابطه۳)}$$

مقادیر $r_{I,t}$ و $r_{P,t}$ نیز به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$r_{I,t} = \frac{P_{I,t} - P_{I,t-1}}{P_{I,t-1}} \qquad \text{(رابطه٤)}$$

$$r_{P,t} = \frac{P_{P,t}-P_{P,t-1}}{P_{P,t-1}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i P_{i,t} - A_i P_{i,t-1}}{P_{P,t-1}} = \sum_{i=1}^{N} X_i \frac{P_{P,T}}{P_{i,T}} \left(\frac{P_{i,t}-P_{i,t-1}}{P_{P,t-1}}\right) \qquad \text{(رابطه۵)}$$

متغیرهای تصمیم X_i در رابطه ۵ و در $P_{P,t}$ قرار دارند. در نتیجه رابطه بین $r_{P,t}$ و X_i خطی نخواهد بود و چنانکه مونت‌فورت و همکاران (۲۰۰۸) نیز بیان کرده‌اند مساله به صورت یک مسئله NP-Hard خواهد بود.

بر اساس رویکردی که مید و سالکین (۱۹۸۹) استفاده کرده‌اند برای یک سبد ردیاب شاخص مناسب خواهیم داشت:

$$\frac{P_{P,T}}{P_{P,t-1}} \approx \frac{P_{I,T}}{P_{I,t-1}} \qquad \text{(رابطه٦)}$$

که با جاگذاری در رابطه ۵ داریم:

(رابطه۷)

$$r_{P,t} \approx \sum_{i=1}^{N} X_i \frac{P_{I,T}}{P_{i,T}} \left(\frac{P_{i,t}-P_{i,t-1}}{P_{I,t-1}}\right) = \sum_{i=1}^{N} X_i R_{i,t}$$

که در این عبارت برای مقدار $R_{i,t}$ داریم:

$$R_{i,t} = \frac{P_{I,T}}{P_{i,T}} \left(\frac{P_{i,t}-P_{i,t-1}}{P_{I,t-1}}\right) \qquad \text{(رابطه۸)}$$

با جایگذاری رابطه ۷ در رابطه ۱، تابع هدف اول مدل به صورت زیر بدست می‌آید:

$$TE = \sum_{i=1}^{T} \left(r_{I,t} - \sum_{i=1}^{N} X_i R_{i,t}\right)^2 \approx \sum_{t=1}^{T} r_{I,t}^2 - 2\sum_{i=1}^{N} X_i \sum_{t=1}^{T} r_{I,t} R_{i,t} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sum_{t=1}^{T} R_{i,t} R_{j,t}$$

(رابطه۹)

بازنگری سبد شاخص در شرایطی که میزان هزینه‌های معاملاتی نامطلوب باشد ممکن است مورد نظر واقع نشود. بنابراین می‌توان تابع هدف دوم را به منظور حداقل کردن میزان هزینه‌های معاملاتی در نظر گرفت. بنابراین خواهیم داشت:

d_i: قدرمطلق تغییر در سهم i که بر این اساس تعداد N متغیر تصمیم نیز به مساله اضافه می شود.

k_i: هزینه معاملاتی سهم i که به عنوان درصدی از ارزش معامله در نظر گرفته می شود.

b_t: مجموع ارزش سبد در تاریخ t

$$b_t \sum_{i=1}^{N} d_i k_i \qquad \text{(رابطه۱۰)}$$

محدودیت‌های مورد استفاده در مدل همان‌طور که کاناکوز و همکاران (۲۰۰۸) نیز ارائه کرده‌اند محدودیت‌های اصولی هستند:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad \text{(رابطه۱۱)}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که مجموع متغیرهای تصمیم مساله باید برابر با یک شود.

$$\forall\, i : X_i \geq \alpha_i \qquad \text{(رابطه۱۲)}$$

$$\forall\, i : X_i \leq \beta_i \;\; for \;\; (\beta_i \geq \alpha_i) \qquad \text{(رابطه۱۳)}$$

رابطه‌های ۱۲ و ۱۳ حد بالا و پایین متغیرهای تصمیم را نشان می‌دهد. در اینجا مقدار صفر برای α_i و مقدار یک برای β_i در نظر گرفته شده است. چنانکه بسلی و همکاران (۱۹۹۹) نیز بیان کرده‌اند، این محدودیت‌ها برای جلوگیری از ایجاد یک سبد نامطلوب مورد نیاز است.

با توجه به تابع هدف دوم، محدوده متغیر d_i نیز باید مشخص شود که به کمک دو محدودیت ذیل این کار انجام می‌شود:

$$W_i - X_i \leq d_i \qquad \text{(رابطه۱۴)}$$

$$X_i - W_i \leq d_i \qquad \text{(رابطه۱۵)}$$

که دو محدودیت فوق باعث خواهد شد که مقدار d_i برابر قدرمطلق تغییر در سهم i گردد.

٤- نتایج پژوهش

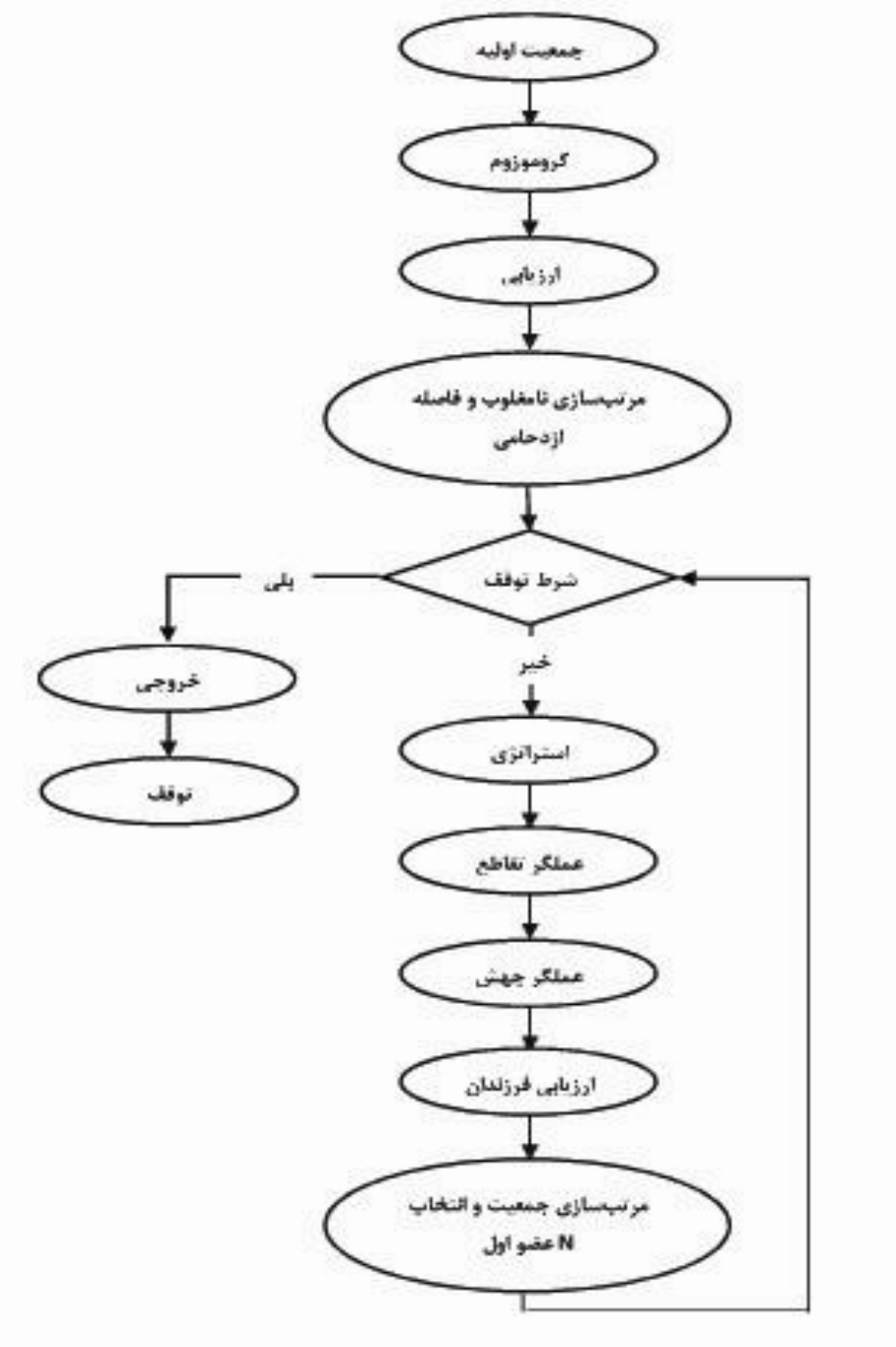
از آنجا که مدل پیشنهادی یک مدل دو هدفه بوده و توابع هدف در تعارض با یکدیگر هستند، به منظور بدست آوردن جواب‌های مناسب برای چنین مسائلی که جزء دسته مسایل NP-hard می‌باشند رویکردهای فراابتکاری توسعه داده شده است. هنگامی که دیدگاه چندهدفه مطرح باشد، حل مساله به مراتب سخت‌تر می‌شود و نیاز به استخراج مجموعه جوابهای پارتو (مجموعه جواب‌های نامغلوب یا غلبه نشده) می باشد. روش‌های فراابتکاری که اخیرا توسعه داده شده است، می‌تواند ابزاری مناسب برای حل این نوع مسائل باشد. یکی از این الگوریتم‌های فراابتکاری الگوریتم ژنتیک می‌باشد. الگوریتم‌های ژنتیک تکاملی مرتب‌سازی نامغلوب و رتبه‌بندی نامغلوب برای حل مدل پیشنهادی در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

٤-١ الگوریتم ژنتیک مرتب سازی نامغلوب (NSGA^{۲})

یکی از کارآمدترین و مشهورترین الگوریتم‌های بهینه‌یابی چند هدفه، الگوریتم ژنتیک مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II) است که توسط دب و همکاران در سال ۲۰۰۲ ارائه شد. این الگوریتم یکی از سریع‌ترین و توانمندترین الگوریتم‌های بهینه‌سازی است که نسبت به سایر روش‌ها از پیچیدگی عملیاتی کمتری برخوردار بوده و با استفاده از اصل عدم تسلط (عدم غلبه کردن) و محاسبه فاصله ازدحام، نقاط بهینه پارتو را به دست می‌آورد که از گستردگی مطلوبی در حوزه تغییرات توابع اهداف برخوردارند و به طراح، آزادی انتخاب طراحی مورد نظر خود را از میان طراحی های بهینه شده می‌دهد. شکل ۱ فلوچارت الگوریتم NSGA-II را نمایش می‌دهد.

در NSGA-II، به طور همزمان حفظ نخبه‌گرایی و پراکندگی مد نظر قرار گرفته است. در این روش ابتدا یک جمعیت از فرزندان با استفاده از جمعیت والدین ایجاد می‌شود که اندازه هر دو جمعیت N

است. این دو جمعیت با هم ادغام می‌شوند و یک جمعیت با ۲N عضو را به وجود می‌آورند. این جمعیت با استفاده از مرتب‌سازی نامغلوب دسته‌بندی شده و در نهایت جمعیت جدید شامل بهترین اعضاء تا N عضو به دست می‌آید. به هر جمعیت دسته‌بندی شده یک جبهه می‌گویند.



شکل ۱- فلوچارت الگوریتم NSGA-II

٤-٢ الگوریتم ژنتیک رتبه‌بندی نامغلوب (NRGA[٣])

در سال ۲۰۰۸ یک الگوریتم تکاملی چندهدفه با نام الگوریتم ژنتیک مبتنی بر رتبه‌بندی نامغلوب‌ها به طور موفقیت‌آمیزی توسط عمرالجدان و همکارانش (۲۰۰۸) برای بهینه‌سازی توابع غیرمحدب، غیرخطی و گسسته توسعه داده شد. آنها الگوریتم‌های چند هدفه‌ای را که بر اساس مرتب کردن غیر مغلوب‌ها کار می‌کردند، مورد بررسی قرار دادند.

بر اساس مسائل موجود در رویکردهای قبلی، آن‌ها رویکرد جدیدی را با ترکیب الگوریتم انتخاب چرخه رولت مبتنی بر رتبه‌بندی و الگوریتم رتبه‌بندی جمعیت بر اساس پارتو توسعه دادند که الگوریتم ژنتیک رتبه‌بندی نامغلوب‌ها (NRGA) نام‌گذاری شد. این ترکیب، یک رتبه‌بندی دولایه‌ای بر اساس انتخاب بهترین جواب‌ها (با توجه به برازش و گستردگی) به طور تصادفی انتخاب می‌کند. این الگوریتم در اکثر موارد قادر به دستیابی به گستردگی بهتری از جواب‌ها در مرز پارتو و همچنین همگرایی زودتر به مرز بهینه پارتو، در مقایسه با سایر الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه می‌باشد.

٤-٣- اشتراکات دو الگوریتم

٤-٣-١- طرح کدگذاری برای حل مدل با الگوریتمها

نمایش کروموزوم: منظور از نحوه نمایش کروموزوم در واقع چگونگی نمایش یک جواب شدنی متناظر با مدل ارائه شده است که یک فاکتور کلیدی در الگوریتم ژنتیک برای حل مسائل بهینه سازی شمرده می‌شود. کـروموزوم‌های مربوط به این تحقیق یک رشته عدد nتایی هستند که هر درایه آن درصد سرمایه‌گذاری در هر سهم موجود در بازار است.

مکانیزم تولید جواب اولیه: جواب اولیه بصورت کامل تصادفی تولید می شود.

تابع برازش: تابع برازش، تابع هدف مسئله می‌باشد، یعنی هر کروموزوم تبدیل به جواب متناظر شده و در تابع هدف قرار می‌گیرد، آن‌گاه اگر مقدار تابع هدف برای هر جواب بهتر باشد، کروموزوم متناظر با آن جواب، مناسب‌تر خواهد بود.

استراتژی انتخاب: با توجه به جمعیت فعلی، جمعیت بعدی از طریق استراتژی‌های انتخاب، تقاطع و جهش به دست می‌آید. عملگر انتخاب، افرادی را که دارای پتانسیل لازم برای جابه‌جایی از جمعیت فعلی هستند را انتخاب می‌کند. در این تحقیق از تورنامنت دودویی استفاده شده است.

عملگر تقاطع: در مساله ارائه شده از عملگر تقاطع حسابی استفاده شده است. این عملگر بدین صورت می‌باشد که اگر کروموزم‌های پدر و مادر را A و B بنامیم، از آنها دو فرزند به نام a , b بصورت زیر حاصل می شود. α عددی بین صفر و یک می باشد که برای هر ترکیب می‌تواند مقدار مختلفی داشته باشد:

$$a = \alpha A + (1-\alpha)B \qquad \text{(رابطه١٦)}$$

$$b = \alpha B + (1-\alpha)A \qquad \text{(رابطه١٧)}$$

عملگر جهش: در مساله ارائه شده، دو روش برای انجام عملگر جهش پیشنهاد شده است. یک کروموزم بصورت تصادفی انتخاب می‌شود سپس یک ژن از این کروموزم بصورت تصادفی انتخاب می‌شود.

روش اول : هر سهام باید مقداری بین α_i و β_i به خود بگیرد. در روش اول ژن جدید بر اساس فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$X_{new} = \alpha_i + (x_i - \alpha_i) * Rand \qquad \text{(رابطه۱۸)}$$

روش دوم: هر سهام باید مقداری بین α_i و β_i به خود بگیرد. در روش دوم ژن جدید بر اساس فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$X_{new} = \beta_i - (\beta_i - x_i) * Rand \qquad \text{(رابطه۱۹)}$$

مکانیزم بروزرسانی جمعیت از یک تکرار به تکرار بعد: در اینجا جمعیت فرزندان و والدین را با هم ترکیب می‌کنیم و در نتیجه جمعیتی به اندازه دو برابر سایز جمعیت اولیه ایجاد می‌نماییم. هدف از ترکیب کردن این است که جواب‌های برتر بین جمعیت والدین و فرزندان از بین نرود. سپس از یک مرتب‌سازی نامغلوب برای دسته‌بندی تمام جمعیت استفاده می‌شود. البته این مرتب‌سازی نسبت به مرتب سازی بر روی جمعیت والدین به تعداد مقایسه بیشتری نیاز دارد. در این شیوه یک مقایسه عمومی بین اعضایی که مجموعه‌ای از دو جمعیت فرزندان و والدین است، انجام می‌شود و پس از ایجاد صف‌های متفاوت نامغلوب به ترتیب اولویت (اولویت صف‌ها نسبت به هم) جمعیت بعدی یکی یکی از این صف‌ها پر می‌شود. پر کردن با بهترین صف نامغلوب شروع شده و سپس به ترتیب با دومین صف نامغلوب و همینطور سومین و الی آخر تا زمانی که نسل بعد پر شود، ادامه می‌یابد. از آنجا که اندازه جمعیت والدین و فرزندان دو برابر جمعیت والدین است، تمام اعضای آن ممکن است نتوانند در جمعیت نسل بعد قرار گیرند و به راحتی جواب‌های باقیمانده را حذف خواهیم کرد. در مورد جواب‌هایی که در صف آخر با استفاده از عملگر نخبه‌گرایی از بین می‌روند باید مهارت بیشتری به کار برده و جواب‌هایی که در ناحیه ازدحام کمتری قرار دارند را حفظ کرد. در واقع برای رعایت اصل چگالی در بین جواب‌ها، جواب‌هایی که در ناحیه ازدحامی کوچکتری هستند، برای پر کردن نسل بعد در اولویت قرار دارند.

٤-٤- نتایج محاسباتی

٤-٤-١- شاخص‌های مقایسه الگوریتم‌ها

از بین شاخص‌های تعریف شده در این زمینه، سه شاخص در نظر گرفته شده‌اند که در این قسمت به تعریف آنها می‌پردازیم تا پس از بیان نتایج، جهت مقایسه عملکرد الگوریتم‌ها، بکار گرفته شوند.

۱) شاخص متوسط فاصله از نقطه ایده‌ال($MID^{٤}$)

با استفاده از این شاخص، فاصله نزدیکی بین جواب‌های پارتو و نقطه ایده‌آل آن جواب‌های (f_1^{best}, f_2^{best}) حاصل می‌گردد. این شاخص از رابطه ۲۰ محاسبه می‌شود.

(رابطه۲۰)

$$MID = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(f_{1i}-f_1^{best})^2+(f_{2i}-f_2^{best})^2}}{n}$$

که در آن f_1^{best} و f_2^{best} نقطه ایده‌آل، توابع هدف هستند. n تعداد جواب‌های پاراتو بوده و f_{1i} و f_{2i} نیز به ترتیب مقدار تابع هدف اول و دوم به ازای جواب i می‌باشند. هرچه شاخص MID کمتر باشد الگوریتم به دلیل تولید جواب‌هایی با متوسط فاصله کمتر از نقطه ایده‌آل، اولویت بالاتری دارد.

۲) شاخص پراکندگی($DM^{٥}$)

با بکارگیری این شاخص، گستردگی مجموعه جواب‌ها برای الگوریتم بر اساس رابطه ۲۱ محاسبه

می‌گردد. هر چه مقدار این شاخص بیشتر باشد، الگوریتم اولویت بالاتری دارد.

$$DM = \sqrt{(maxf_{1i} - minf_{1i})^2 + (maxf_{2i} - minf_{2i})^2}$$
(رابطه۲۱)

در این فرمول نیز f_{1i} و f_{2i} به ترتیب مقدار تابع هدف اول و دوم به ازای جواب i می‌باشند و کمترین مقدار و بیشترین مقدار این توابع هدف در میان کل جواب‌ها در رابطه بالا به کار می‌روند.

۳) شاخص یکنواختی فضا (SM[۶])

با بکارگیری این شاخص، یکنواختی انتشار جواب‌های نامغلوب طبق رابطه ۲۲ حاصل می‌شود. هر چه شاخص SM کمتر باشد الگوریتم مناسب‌تر است.

$$SM = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}|\bar{d} - d_i|}{(n-1)\bar{d}}$$ (رابطه۲۲)

در رابطه فوق، d_i نشان‌دهنده فاصله اقلیدسی بین هر دو جواب متوالی در مرز بهینه به دست آمده توسط هر الگوریتم است و $\bar{d}$ معرف میانگین مقادیر است.

٤-٤-۲ تنظیم پارامترهای هر الگوریتم

چهار فاکتور کنترلی در هر دو الگوریتم تنظیم می‌گردد که این فاکتورها عبارتند از:

nPop : اندازه جمعیت اولیه

P_c: احتمال رخ دادن تقاطع

P_m: احتمال رخ دادن جهش

maxit: حداکثر تعداد تکرارها

این چهار عامل در سه سطح نیز مورد آزمایش قرار گرفتند که بر اساس آن آرایه متعامد L9 روش تاگوچی استفاده می‌گردد. در تنظیم پارامتر از شاخص ترکیبی وزنی استفاده شده است. لازم به ذکر است که برای این امر، نتیجه بررسی هر یک از ۹ آزمایش، به شاخص انحراف نسبی [۷] (RDI)، مطابق رابطه ۲۳ تبدیل شده است:

(رابطه۲۳)

$$RDI = \left|\frac{Algorithm_{solution} - Best_{solution}}{Max_{solution} - Min_{solution}}\right| * 100$$

که در آن

$Algorithm_{solution}$: مقدار به دست آمده برای شاخص مورد نظر در هر آزمایش

$Best_{solution}$: بهترین مقدار به دست آمده برای شاخص در آزمایشات

$Max_{solution}$: بیشترین مقدار به دست آمده برای شاخص در آزمایشات

$Min_{solution}$: کمترین مقدار به دست آمده برای شاخص در آزمایشات

برای تنظیم پارامتر، یک مساله با اطلاعات ۲٦ شرکت تشکیل دهنده شاخص فلزات اساسی در یک ماه انتخاب شده و هر مساله با ۹ نوع تنظیم معرفی شده در آرایه متعامد روش تاگوچی حل گردید. در نهایت برای هر سطح از آزمایش مقدار سه شاخص MID و DM و SM محاسبه گردیده و به مقادیر RDI تبدیل شدند و مقادیر RDI_{MID} و RDI_{DM} و RDI_{SM} از نتایج مساله برای هر سطح بدست آمد. شاخص ترکیبی برای تنظیم پارامترهای این الگوریتم از میانگین RDI_{MID} و RDI_{DM} و RDI_{SM} در نظر گرفته شده است.

سطوح بهینه فاکتورهای دو الگوریتم NSGA-II و NRGA پس از تنظیم پارامتر به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ آمده است.

جدول۱- سطح بهینه فاکتورهای الگوریتم NSGA-II

پارامتر	مقدار بهینه پارامتر
nPop	۸۰
P_c	۰,٦
P_m	۰,٤
maxit	۵۰

جدول۲- سطح بهینه فاکتورهای الگوریتم NRGA

پارامتر	مقدار بهینه پارامتر
nPop	٤۰
P_c	۰,۹۹
P_m	۰,۲
maxit	۷۰

٤-٤-۳- نتایج محاسباتی حاصل از حل مدل

پس از تنظیم پارامترهای الگوریتم های مورد نظر، در این قسمت به حل مساله و بازنگری سبد در ۱۰ دوره (ماه) تعریف شده توسط دو الگوریتم پرداخته و نتایج عملکرد دو الگوریتم با هم مقایسه شده است.

در جدول ۳ مقادیر شاخص‌های مورد نظر، که توسط هر الگوریتم در مورد ۱۰ مساله محاسبه شده، آمده است.

٤-٤-٤- آزمون نرمال بودن مقادیر شاخص‌ها

برای بررسی نرمال بودن داده‌ها از روش تست کلوموگروف - اسمیرنوف استفاده گردید. تمامی داده‌ها نرمال بوده و p مقدار گزارش شده از ۰,۰۵ بزرگتر می‌باشند لذا در سطح اطمینان ۰,۹۵ دلیلی بر رد فرض صفر (فرض نرمال بودن) وجود ندارد. در این حالت می‌توان جهت مقایسه الگوریتم‌ها از آزمون‌های پارامتریک استفاده نمود. در ادامه آزمون‌های پارامتریک صورت پذیرفته و پس از مشاهده نتایج، مقادیر P-مقدار و نمودارهای جعبه‌ای، نتایج ذیل حاصل گردید.

جدول ۳- نتایج محاسباتی و مقادیر شاخص‌ها

Problem	MID		DM		SM	
	NSGA-II	NRGA	NSGA-II	NRGA	NSGA-II	NRGA
۱	۱٦۰٦۹۱	۵۹۳۲٤	٤۸۵۱۰,٦	۷۰۹٦۹,۸	۰,۹۵۰۳۰	۰,۸۸۲۸۸
۲	۱۸۷٤۲۷	۱٦۸۵۳۳	۲۳۸٦۷,۷	٦۷۹۰۲,۰	۱,۰۲۵۵۲	۱,۰۰۱۵۵
۳	۱۲۷۷۰۷	۲۹۱۳٦۹	۹۸۳۷۱,۸	٤٤۲۸۸,۰	۰,٦۷۰۲۲	۰,۵۹۲۷۰
٤	٦۲٤۹٤	۱۲۹٦۵۷	۵۲٤٤٦,۳	۲٦۸٤٤,۲	۰,۹۱۰۵٦	۰,۷۷٦۰۷
۵	۱۰۳۰٦۵	۷۳۸۳۰	۸۱۹۲۸,۷	۸٤۹۷۷,۰	۰,۸۰۹۸۵	۰,۷۵۷۸۵
٦	٦۸۵۳۳	۹٦۷۳۳	۷٦۹۸۷,۰	۷۲۳۹۱,۰	۰,۷۹٦۹۱	۰,۸۰۸۹۳
۷	۱۰۵۵٤٤	٦۵۱۹۲	٦٤٤۷۱,۲	٤۹۰٤۰,۲	۰,۸۵۹۱۱	۰,٦٤۰۹۳
۸	٦۲۵۳٦	۱۲۰۲۹۹	٤۳۸٤۵,۲	۸۰۹۵۰,۲	۰,۸۰۷۱۳	۰,٦۹۵۳۳
۹	٤٦٦۸۸	۲٦٤۱۲	۳٦۸۲۹,۹	٦۱۸۰٦,۱	۰,۷۰۷۳۳	۰,٦۹۳۸۸
۱۰	٤٤٦۷۳	۱٤۰۵۳۰	۳۲۹۹۹,۳	۳۵۳۳۹,۳	۰,۷۹۱۷۷	۰,۸۱۲۲۳

٤-٤-٥- آزمون پارامتریک

۱) شاخص متوسط فاصله از نقطه ایده‌ال (MID)

در مورد این شاخص کمتر بودن اولویت ایجاد می‌نماید، درنتیجه آزمون این شاخص، مقدار p- مقدار کمتر از ۰,۰۵ نبوده و فرض صفر که فرض برابری میانگین دو الگوریتم است رد نمی‌شود و هر دو الگوریتم در این شاخص عملکرد نسبتا مشابهی دارند. مشاهده گردید که الگوریتم NSGA II میانگین کمتری دارد پس می‌توان نتیجه گرفت که در شاخص MID، الگوریتم NSGA II عملکرد نسبتا بهتری داشته است.

۲) شاخص پراکندگی (DM)

در خصوص این شاخص بیشتر بودن بیانگر مزیت الگوریتم می باشد. در نتیجه آزمون این شاخص، مقدار p–مقدار کمتر از ۰,۰۵ نبوده و فرض صفر که فرض برابری میانگین شاخص دو الگوریتم است رد نمی‌شود و لذا هر دو الگوریتم در این شاخص عملکرد نسبتا مشابهی دارند. لیکن الگوریتم NRGA میانگین بیشتری دارد، لذا می‌توان نتیجه گرفت که در این شاخص، الگوریتم NRGA عملکرد نسبتا بهتری داشته است.

۳) شاخص یکنواختی فضا (SM)

در مورد این شاخص کمتر بودن اولویت ایجاد می‌نماید. در نتیجه آزمون این شاخص، مقدار p- مقدار کمتر از ۰,۰۵ نبوده و فرض صفر که فرض برابری میانگین شاخص دو الگوریتم است رد نمی شود و هر دو الگوریتم در این شاخص نیز عملکرد نسبتا مشابهی دارند. مشاهده گردید که الگوریتم NRGA میانگین کمتری دارد، لذا می‌توان نتیجه گرفت که در این شاخص، الگوریتم NRGA عملکرد نسبتا بهتری داشته است.

٤-٤-٦- روش تاپسیس برای تعیین نمره نهایی هر الگوریتم

با توجه به نتایج آزمون‌های صورت گرفته و با توجه به اینکه در شاخص MID، الگوریتم NSGA-II نتیجه بهتری ارائه داده اما در مورد شاخص‌های DM و SM الگوریتم NRGA نتیجه مطلوب‌تری را ارائه نموده است قادر به تصمیم‌گیری نهایی در خصوص نحوه عملکرد دو الگوریتم نسبت به یکدیگر نخواهیم بود. از اینرو با استفاده از روش تاپسیس در نهایت بین دو الگوریتم به کار گرفته شده، الگوریتم برتر مشخص می‌گردد. در این روش این دو الگوریتم، دو گزینه موجود هستند که با توجه به نتایج حاصل از بررسی سه شاخص و همین طور میانگین زمان اجرای الگوریتم به عنوان چهار معیار برای تصمیم گیری، گزینه برتر معرفی خواهد شد. در ابتدا گزینه ایده‌آل که در تمامی معیارها برتر باشد و گزینه ضد ایده‌آل که در تمامی معیارها دارای بدترین عملکرد است تعیین می‌گردد. سپس فاصله هر گزینه از گزینه ایده‌آل و ضد ایده‌آل اندازه‌گیری می‌شود. گزینه انتخابی باید دارای کمترین فاصله از راه‌حل ایده‌آل و هم‌زمان بیشترین فاصله از راه‌حل ضدایده‌آل باشد.

مقادیر موجود در جدول ٤ با استفاده از رابطه ٢٤ بی‌مقیاس می‌شوند:

$$r_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{2} r_{ij}^2}} \qquad \text{(رابطه ٢٤)}$$

از آنجا که هر چهار معیار دارای ارزش برابری می‌باشند

برای ایجاد ماتریس بی‌مقیاس شده وزین وزن هر معیار را برابر ۰/۲۵ در نظر می‌گیریم. برای هر

گزینه، نمره نهایی با استفاده از رابطه ۲۵ محاسبه می‌گردد:

$$\frac{d_i^-}{d_I^+ + d_i^-} \qquad \text{(رابطه ۲۵)}$$

که در آن d_i^+ و d_i^- به ترتیب فواصل اقلیدسی گزینه iام از گزینه ایده‌آل و ضدایده‌آل است.

جدول ٤- مقادیر میانگین معیارها به ازای گزینه‌ها

	MID	DM	SM	time CPU (second)
NSGA-II	۹۶۹۳۵/۸	٥٦٠٢٥/٧٧	۰/۸۳۲۸۷	۳۰/۹۹٥۱٦۷
NRGA	۱۱۷۱۸۹/۹	٥۹٤٥۰/۷۸	۰/۷٦٦۲۳٥	۲٦/۹٦۲٦۷۷

در نهایت برای هر یک از الگوریتم‌ها نمره نهایی به صورت زیر بدست آمد:

نمره نهایی الگوریتم NSGA-II = ۰/٥۲۱۸

نمره نهایی الگوریتم NRGA = ۰/٤۷۸۲

در نتیجه از آنجا کـه الگـوریتم NSGA-II نمـره بالاتری کسب نموده، به عنوان گزینـه بهتـر انتخـاب می‌گردد.

سبد اولیه از طریق حل مدل بدون در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی ایجاد گردید. با هدف بازنگری در شاخص این سبد، دوره‌های زمانی ماهیانه برای بازنگری سبد در نظر گرفته شد. در هر دوره با توجه به تصمیم‌گیری مدیر سبد، تصمیم بر انتخاب جوابی با کمترین میزان در مقدار تابع هدف اول مساله یعنی خطای پیگیری صورت گرفت. در هر دوره هزینه های معاملاتی نیز بر مدیر سبد متحمل گردید. نهایتا در انتهای دوره یعنی ۲۸ اسفند ۱۳۹۱ نتایج به شـرح جدول ۵ حاصل گردید.

جدول ۵- نتایج حاصل از بازنگری سبد ردیاب شاخص فلزات اساسی بورس اوراق بهادار تهران سال ۱۳۹۱

هزینه‌های معاملاتی	شاخص سبد بازنگری شده با الگوریتم NRGA	هزینه‌های معاملاتی	شاخص سبد بازنگری شده با الگوریتم NSGA	شاخص سبد اولیه بدون بازنگری	شاخص فلزات اساسی	
-	-	-	-	۱۰٦/۲۸۱۰	۱۰٦/۳۰٤۱	۱۳۹۱/۰۱/۲۸
۱۰۸٦۹۳	-	٥۷٤۱٦۲	-	۹٦/۸۸٥٥	۹۹/۸٤٦۱	۱۳۹۱/۰۲/۲۸
۲۱۹٤٦٤	۹٤/۷۲٤۱	۳٤۰٥۷۳	۹٤/٦٦۲۹	۹۲/۷٥۰۰	۹٦/٦۰۱٦	۱۳۹۱/۰۳/۲۸
٥٥٥۹٤٥	۹۰/٦۰٥۹	۱۸٤٦۳٥	۸٥/۷۷۹۰	۹۱/٥۲۸۷	۸٦/۰۲۲۷	۱۳۹۱/۰٤/۲۸
۲۳۷٤۳٥	۸۳/٤٤۸۱	۹۹۷٤۱	۸۳/۲۳۰۱	۸۹/۲۳٤٥	۷۹/۷۱۰٤	۱۳۹۱/۰٥/۲۸
۱۱٤۷۷۳	۱۰۲/۰۹۰٥	۱٤۹٤٤۱	۹٦/۸۲٦۷	۱۰۲/۰۰۷٦	۹۸/۹۳۰۰	۱۳۹۱/۰٦/۲۸
۱٤۱٥۱٦	۱۱٥/۹۲۲۹	۱۱٤۷٤٥	۱۱٦/۰۷۰٤	۱۱۲/۹۲۹٦	۱۲۰/٤۳۰۹	۱۳۹۱/۰۷/۲۸
۹۱۷٦۷	۱۲۲/٦٦۰۸	۱۳٥٥۱۰	۱۲۳/٥۱۹۱	۱۱٥/۲۱۷۷	۱۲۹/۹۸٦٥	۱۳۹۱/۰۸/۲۸
۱٦۳۹۸۷	۱٤٦/۲۹۲۸	۷۰٦٦٦	۱٤۸/٤۹٦۹	۱۲۷/٦۸۱۲	۱٥۳/٥۷۹۲	۱۳۹۱/۰۹/۲۸
۳۰۰۹۱	۱٥۸/۸۱۰۲	٦٥۸٦٦	۱٥۸/۸۳٦٥	۱۳۸/۳۱۹۰	۱٦۳/٥۷٤۰	۱۳۹۱/۱۰/۲۸
۲۱۷۸۲۱	۱٥٥/۱۰۹۸	٦٥٦۷۹	۱٥۲/۹۳۰۹	۱٤۰/۰٦٦۹	۱٦۲/۱۳۲۷	۱۳۹۱/۱۱/۲۸
-	۱٤۲/۳٥٦٥	-	۱٤۲/۷۸٥۱	۱۲۳/٦۱۷۱	۱٤۹/٥۱٦٥	۱۳۹۱/۱۲/۲۸

٦- نتیجه‌گیری و بحث

نکته قابل ذکر آن است که دوره پایه برای محاسبه شاخص‌ها ابتدای سال ۱۳۹۱ و در تاریخ ۱۳۹۱/۰۱/۰۷ در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود شاخص فلزات اساسی در انتهای دوره برابر با ١٤٩/٥١٦٥ بوده است حال آنکه شاخص سبد اولیه بدون در نظر گرفتن هیچگونه بازنگری در طی دوره برابر با ١٢٣/٦١٧١ بوده است و این نشان دهنده نیاز به بازنگری در این سبد را در طی دوره را نشان می‌دهد. چنانکه مشاهده می‌شود در صورت انجام بازنگری‌های دوره‌ای که در اینجا ماهیانه در نظر گرفته شده است، در روش حل با الگوریتم NSGA-II شاخص ١٤٢/٧٨٥١ و در روش حل با الگوریتم NRGA شاخص ١٤٢/٣٥٦٥ حاصل شده است که اختلاف تقریبی نسبتا مناسبی با شاخص فلزات اساسی دارند. همچنین هزینه‌های معاملاتی متحمل شده توسط مدیر این سبد نیز مشخص شده، که با توجه به میزان سود کسب شده مقدار ناچیزی خواهد بود.

پیشنهاد زمینه‌هایی برای تحقیق به طور خلاصه عبارتند از:

- برآورد دوره‌های زمانی برای بازنگری سبد ردیاب شاخص
- تعیین معیارهایی برای انتخاب جواب از بین مجموعه جواب‌های پارتو در هر مرحله بازنگری
- ارائه سایر روش‌های فراابتکاری برای حل مدل ارائه شده
- اضافه کردن جستجوی محلی به الگوریتم NSGA-II برای افزایش قابلیت کیفیت جواب‌ها
- استفاده از سایر روش‌های مقایسه برای بررسی کیفیت جواب‌های هر الگوریتم

فهرست منابع

* حجازی،رضوان.۱۳۹۰. "تشکیل صندوق شاخصی بهبود یافته با استفاده از الگوریتم ژنتیک"، فصلنامه‌ی بورس اوراق بهادار، شماره ١٤، ١٣٥-١٥٧.
* حنیفی، فرهاد و بحرالعلوم. ۱۳۸۸. "طراحی و تحلیل مقایسه‌ای الگوریتم های فرابتکاری جهت پیاده-سازی سرمایه‌گذاری شاخص محور در بورس تهران"، فصلنامه‌ی چشم انداز مدیریت، شماره ۳۲، ۸۹-۱۰۸.
* شریعت‌پناهی، سید مجید و جعفری، ابوالفضل. ۱۳۹۰. مدیریت سرمایه‌گذاری، انتشارات اتحاد، چاپ سوم، تهران.
* عبده تبریزی، حسین. ۱۳۸۹. مبانی بازارها و نهادهای مالی، انتشارات پیشبرد، چاپ سوم، تهران.
* ورسه‌ای، محسن و شمس، ناصر. ۱۳۸۹. "ارائه یک روش حل ابتکاری به منظور بهینه سازی حل مساله سبد ردیاب شاخص و پیاده سازی آن برای اولین بار در بازار سهام تهران"، هشتمین کنفرانس بین المللی مدیریت.
* Al Jadaan. O., Rajamani L., Rao. C.R., 2008. Non-Dominated Ranked Genetic Algorithm for Solving Multi-Objectie Optimization Problems: NRGA, Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 60-67.
* Alexander C., Dimitriu A., 2005. Indexing, cointegration and equity market regimes", Journal of Finance and Economics , 10, 213–231.
* Beasley, N, Meade & Chang., 2003. "An evolutionary heuristic for the index

tracking problem", European Journal of Operational Research, 148(3), 621-243.
* Canakgoz, N. A. & Beasley, J. E., 2008. Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation, European Journal of Operational Research, 196(1),48-399.
* Deb, K., Goldberg, D. E., 1989. An investigation of niche and species formation in genetic function optimization. Third International Conference on Genetic Algorithms, pp. 42–50.
* Deb. Kalyanmoy, Pratap. Amrit, Meyarivan., 2002. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm:NSGA-II, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 6(2) , 182–97.
* Dose, C., Cincotti, S., 2005. Clustering of financial time series with application to index and enhanced index tracking portfolio, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 355(1), 145-151.
* Focardi, Sergio M., Fabozzi, Frank J., A methodology for index tracking based on time-series clustering, Quantitative Finance, vol 4(4), 417-425.
* Corielli F., Marcellino M., Factor based index tracking, Journal of Banking and Finance.
* Oh K.J., Kim T.Y., Min S., 2005. Using genetic algorithm to support portfolio optimization for index fund management, Expert Systems with Applications, 28, 371–379.
* Wu L.C., Chou S.C., Yang C.C., Ong C.S., 2007. Enhanced index investing based on goal programming, Journal of Portfolio Management, 33(3), 49–56.
* Montfort. Kees, Visser. Elout, Fijn van draat. Laursens., 2008. Index Tracking by Means of Optimized Sampling, The Journal of Portfolio Management, 34(2), 143-151.
* Okay N., Akman U.. 2003. Index tracking with constraint aggregation, Applied Economics Letters 913–916.
* Qian L., Sun L., Bao L., 2011. Enhanced index tracking based on multi-objective immune algorithm, Expert Systems with Applications, 38, 6101-6106.
* Jansen R., Van Dijk R., 2002. Optimal benchmark tracking with small portfolios, Journal of Portfolio Management, 29, 33–39.
* Focardi S.M., Fabozzi F.J., 2004. A methodology for index tracking based on timeseries clustering, Quantitative Finance 417–425.
* Srinivas, N., Deb, K., 1995. Multi-objective function optimization using non-dominated sorting genetic algorithms. Evolutionary Computation, 2(3), 221–48.
* Coleman T.F., Li Y., Henniger J., 2006. Minimizing tracking error while restricting the number of assets, Journal of Risk, 8, 33–56.
* U. Derigs, N.-H. Nickel., 2003. Meta-heuristic based decision support for portfolio optimisation with a case study on tracking error minimization in passive portfolio management, OR Spectrum, 25, 345–378.
* Y. Fang, S.-Y. Wang. 2005., A fuzzy index tracking portfolio selection model, Lecture Notes in Computer Science, 3516, 554–561.

یادداشت‌ها

[1]- Tracking Error (TE)
[2]- Non-dominated Sorting Genetic Algorithm
[3]- Non-dominated Ranked Genetic Algorithm
[4]- Mean Ideal Distance Metric
[5]- Diversification Metric
[6]- Spacing Metric
[7]- Relative Deviation Index